

УДК 517.518.1+514.7

ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТЕЙ-ГРАФИКОВ НА ГРУППАХ КАРНО С СУБЛОРЕНЦЕВОЙ СТРУКТУРОЙ

М. Б. Карманова

Представлено академиком РАН Ю.Г. Решетняком 08.10.2018 г.

Поступило 17.10.2018 г.

Для графиков достаточно гладких отображений нильпотентных градуированных групп доказана формула площади на сублоренцевых структурах произвольной глубины с многомерным временем.

Ключевые слова: нильпотентная градуированная группа, внутренний базис, гёльдерово отображение, сублоренцева структура, многомерное время, отображение-график, площадь поверхности.

DOI: <https://doi.org/10.31857/S0869-56524852145-148>

Тема исследования — вывод метрических свойств поверхностей-графиков на сублоренцевых структурах произвольной глубины с многомерным временем. Основа для построения таких структур — хорошо известная геометрия Минковского (см., например, [1] и цитируемые авторами литературные источники). Отличительной особенностью является то, что квадрат расстояния вдоль одного из направлений (называемого временным) всегда отрицателен. Работы по исследованиям неголономных обобщений геометрии Минковского и их применениям появились относительно недавно [2–5]. Кроме того, изучаются структуры и с многомерным временем [6, 7]. Недавно были установлены новые результаты для частного случая сублоренцевых структур с многомерным временем: доказана формула площади для графиков, построенных по отображениям двухступенчатых групп, выведены достаточные условия, чтобы поверхность-график была пространственно-подобной, и получены аналитические и геометрические свойства максимальных поверхностей [8, 9]. В данной работе снимается ограничение на глубину образа и прообраза отображения, по которому строится график. Кроме того, сублоренцева структура, как и понятие пространственно-подобной поверхности, описывается в самом общем случае. Основным результатом — формула адаптированной площади для пространственно-подобных поверхностей-графиков.

Введём необходимые для формулировки основных результатов определения и перечислим актуальные результаты.

Определение 1 (см., например, [10]). Нильпотентной градуированной группой (Ли) называется связная односвязная стратифицированная группа Ли $\mathbb{G}$, алгебра Ли V которой градуирована, т.е. представляется в виде $V = \bigoplus_{k=1}^M V_k$, $[V_1, V_k] \subset V_{k+1}$, $[V_k, V_M] = \{0\}$, $k = 1, 2, \dots, M-1$.

Обозначение 1. Обозначим топологическую размерность группы $\mathbb{G}$ символом N , базисные векторные поля — $X_1, \dots, X_N$, хаусдорфову размерность — v и положим $n_i = \dim V_i$, $i = 1, 2, \dots, M$. Для группы $\tilde{\mathbb{G}}$ будем использовать те же обозначения только со знаком “~”.

Определение 2. Если базисное поле X_l принадлежит V_k , то его степень $\deg X_l$ равна k , $l = 1, 2, \dots, N$, $k = 1, 2, \dots, M$.

Согласованное с субримановой структурой расстояние определяется для $w = \exp\left(\sum_{i=1}^N w_i X_i\right)(v)$ как

$$d_\infty(w, v) = \max_{i=1, \dots, N} \left\{ |w_i|^{\frac{1}{\deg X_i}} \right\}.$$

Определение 3. Пусть $\mathbb{G}, \tilde{\mathbb{G}} \subset \mathbb{U}$, где $\mathbb{U}$ — нильпотентная градуированная группа топологической размерности $N + \tilde{N}$, $\mathbb{G} \cap \tilde{\mathbb{G}} = 0 = (\mathbf{0}, \tilde{\mathbf{0}})$, поля $X_1, \dots, X_N, \tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_{\tilde{N}}$ определены на всей группе $\mathbb{U}$ и составляют её базис, $\Omega \subset \mathbb{G}$ — открытое множество, и $\varphi: \Omega \rightarrow \tilde{\mathbb{G}}$. Отображение-график φ_Γ сопоставляет каждой точке $x \in \Omega$ элемент

$$\varphi_\Gamma(x) = \exp\left(\sum_{j=1}^{\tilde{N}} \varphi_j(x) \tilde{X}_j\right)(x),$$

где $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\tilde{N}}$ — координатные функции:

$$\varphi(x) = \exp \left(\sum_{j=1}^{\tilde{N}} \varphi_j(x) \tilde{X}_j \right) (\tilde{\mathbf{0}}).$$

Замечание 1. Случай $\mathbb{U} = \mathbb{G} \times \tilde{\mathbb{G}}$ является частным для описанного в определении 3. Коммутаторы вида $[X_i, \tilde{X}_j]$ могут быть нетривиальными.

Определение 4. Пусть $u \in \mathbb{G}$. Отображение $\theta_u: (w_1, \dots, w_N) \mapsto w = \exp \left(\sum_{i=1}^N w_i X_i \right) (u)$ называется системой нормальных координат относительно u . В этом случае набор $(w_1, \dots, w_N)$ называется нормальными координатами точки w относительно u (в базисе $\{X_i\}_{i=1}^N$).

Определение 5 (см., например, [11]). Пусть $\mathbb{G}$ и $\tilde{\mathbb{G}}$ — нильпотентные градуированные группы Ли, $E \subset \mathbb{G}$, $\psi: E \rightarrow \tilde{\mathbb{G}}$, и функция $\tilde{d}: \psi(E) \times \tilde{\mathbb{G}} \rightarrow \mathbb{R}_+$ равна нулю только на одинаковых элементах и симметрична. Будем говорить, что ψ полиномиально h -с-дифференцируемо в (предельной) точке $x \in E$ относительно $\tilde{d}$, если существует отображение $\mathcal{L}_x: \mathbb{G} \rightarrow \tilde{\mathbb{G}}$ такое, что

- 1) $\tilde{d}(\psi(w), \mathcal{L}_x(w)) = o(d_\infty(x, w))$, $E \ni w \rightarrow x$;
- 2) $\mathcal{L}_x(w) = \theta_{\psi(x)} \circ L_x \circ \theta_x^{-1}(w)$, где L_x полиномиально зависит от $w_1, \dots, w_N$, а $\exp \left(\sum_{i=1}^N w_i X_i \right) (x) = w$.

Напомним основные результаты статьи [11] о существовании внутренних базисов, которые позволяют переносить субриманову структуру с прообраза на образ нелипшицевых отображений и тем самым сохранять хаусдорфову размерность.

Теорема 1 [11]. Пусть $\mathbb{G}, \tilde{\mathbb{G}} \subset \mathbb{U}$, где $\mathbb{U}$ — нильпотентная градуированная группа топологической размерности $N + \tilde{N}$, $\mathbb{G} \cap \tilde{\mathbb{G}} = 0 = (\mathbf{0}, \tilde{\mathbf{0}})$, а $\Omega \subset \mathbb{G}$ — открытое множество. Пусть ещё $\varphi: \Omega \rightarrow \tilde{\mathbb{G}}$ имеет гладкость $\left[\frac{\max\{M, \tilde{M}\} + p - 1}{p} \right]$ по переменным степени p , $p = 1, 2, \dots, M$. Тогда для любого $x \in \Omega$ существует базис $\{^x X_1, \dots, ^x X_N, ^x \tilde{X}_1, \dots, ^x \tilde{X}_{\tilde{N}}\}$ такой, что множество

$$(\tilde{\theta}_{\varphi(x)} \circ \theta_{\varphi(x)}^{-1})(D_{\text{diag}}(\hat{D}_p \varphi(x))(x)(\text{Box}(x, r)))$$

совпадает с $\hat{D}_p \varphi(x)(\text{Box}(x, r))$. Здесь $\theta_{\varphi(x)}$ — отображение нормальных координат в исходном базисе, $\tilde{\theta}_{\varphi(x)}$ — аналогичное отображение в новом базисе, а для отображения ξ символ $D_{\text{diag}} \xi$ обозначает блочно-диагональную часть дифференциала $D\xi$, состоящую

из блоков размерностей $(n_i + \tilde{n}_i) \times n_i$, $i = 1, 2, \dots, \max\{M, \tilde{M}\}$.

Результат теоремы 1 справедлив для графиков как контактных (т.е. таких, что образ горизонтальных полей горизонтален), так и гёльдеровых отображений (в рассматриваемом случае это класс отображений, удовлетворяющих условиям теоремы 1, которые в общем случае не переводят горизонтальные поля в горизонтальные).

Опишем теперь сублоренцеву структуру на $\mathbb{U}$. Поскольку на таких структурах существуют направления, квадрат длины вдоль которых отрицателен, то разобьём в описании базисные векторные поля по этому признаку на “положительные” и “отрицательные”. Положим $\{X_1, \dots, X_N, \tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_{\tilde{N}}\} = \{Y_1, \dots, Y_{\hat{N}}\}$, где $\hat{N} = N + \tilde{N}$. Кроме того, пусть алгебра

Ли $\hat{V}$ на $\mathbb{U}$ равна $\bigoplus_{k=1}^{\hat{M}} \hat{V}_k$, где $\hat{M} = \max\{M, \tilde{M}\}$, и каждое $\hat{V}_k$ состоит из полей, входящих в V_k и $\tilde{V}_k$. Далее пусть $\hat{V}_k = \text{span}\{\hat{V}_k^+, \hat{V}_k^-\}$, где $\hat{V}_k^-$ совпадает с линейной оболочкой поднабора или полного набора базисных полей, входящих в $\tilde{V}_k$, а множества $\hat{V}_k^+$ и $\hat{V}_k^-$ не пересекаются, $k = 1, 2, \dots, \hat{M}$.

Поскольку во внутреннем базисе дифференциалы полиномиальных субримановых дифференциалов имеют блочно-диагональный вид в силу теоремы 1, где каждый блок состоит из единичной матрицы размерности n_i и либо $(\tilde{n}_i \times n_i)$ -блока $D(\hat{D}_p \varphi)_{\tilde{V}_i, V_i}$ матрицы $D(\hat{D}_p \varphi)$ (здесь и далее, так как рассматривается адаптированный базис, под $D(\hat{D}_p \varphi)$ понимается блочно-диагональная часть дифференциала, т.е. $D_{\text{diag}}(\hat{D}_p \varphi)$), либо $(\tilde{n}_i \times n_i)$ -блока $(\hat{D}\varphi)_{\tilde{V}_i, V_i}$ матрицы $\hat{D}\varphi$, то, перегруппируя при необходимости поля в образе, представим эти блоки как объединение частей $D(\hat{D}_p \varphi^+)_{\tilde{V}_i, V_i}$ и $D(\hat{D}_p \varphi^-)_{\tilde{V}_i, V_i}$ (соответственно $(\hat{D}\varphi^+)_{\tilde{V}_i, V_i}$ и $(\hat{D}\varphi^-)_{\tilde{V}_i, V_i}$), где “минусовые” части состоят из строк, соответствующих полям из $\hat{V}_i^-$, $i = 1, 2, \dots, \tilde{M}$.

Приведём определения сублоренцевых расстояния и меры сразу для внутреннего базиса. В определениях 5 и 6, свойстве 1, а также лемме 1 и теореме 2, положим $(^x Y_1, \dots, ^x Y_{\hat{N}}) = (^x X_1, \dots, ^x X_N, ^x \tilde{X}_1, \dots, ^x \tilde{X}_{\tilde{N}})$.

Определение 5 (ср. [12]). Пусть $w = \exp \left(\sum_{i=1}^{\hat{N}} w_i^x Y_i \right) (v)$. Определим величину $^x d_2^2(w, v)$ следующим образом:

$${}^x\mathfrak{d}_2^2(w, v) = \max_{k=1, \dots, \hat{M}} \left\{ \operatorname{sgn} \left(\sum_{j: Y_j \in \hat{V}_k^+} y_j^2 - \sum_{j: Y_j \in \hat{V}_k^-} y_j^2 \right) \times \right. \\ \left. \times \left| \sum_{j: Y_j \in \hat{V}_k^+} y_j^2 - \sum_{j: Y_j \in \hat{V}_k^-} y_j^2 \right|^{1/k} \right\}.$$

Множество $\{w \in \mathbb{U}: {}^x\mathfrak{d}_2^2(w, v) < r^2\}$ называется шаром относительно ${}^x\mathfrak{d}_2^2$ радиуса $r > 0$ с центром в точке v и обозначается символом ${}^x\operatorname{Box}_2^{\mathfrak{d}}(v, r)$.

Замечание 2. При отображении θ_v^{-1} шар ${}^x\operatorname{Box}_2^{\mathfrak{d}}(v, r)$ переходит в декартово произведение множеств

$$\left\{ (y_{s_k+1}, \dots, y_{s_k+n_k+\tilde{n}_k}): \operatorname{sgn} \left(\sum_{j: Y_j \in \hat{V}_k^+} y_j^2 - \sum_{j: Y_j \in \hat{V}_k^-} y_j^2 \right) \times \right. \\ \left. \times \left| \sum_{j: Y_j \in \hat{V}_k^+} y_j^2 - \sum_{j: Y_j \in \hat{V}_k^-} y_j^2 \right| < r^{2k} \right\}, \quad s_k = \sum_{l=1}^{k-1} n_l + \tilde{n}_l, \\ s_1 = 0, \quad k = 1, 2, \dots, \hat{M}.$$

Прежде чем определить понятие внутренней меры на поверхностях-образах, сформулируем требование на свойства (полиномиального) субриманова дифференциала Φ .

Предположение 1. Пусть выполнены условия теоремы 1. Длины строк $D(\hat{D}_P\Phi)_{\tilde{V}_j, V_j}^-$ (для гёльдеровых в субримановом смысле отображений) и $(\hat{D}\Phi)_{\tilde{V}_j, V_j}^-$ (для контактных отображений) не превосходят величину $\frac{1}{\dim V_j} - c$, $c > 0$, $j = 1, 2, \dots, \min\{M, \tilde{M}\}$. Здесь $\hat{D}\Phi$ — h -дифференциал контактного отображения [13].

Свойство 1. Предположение 1 обеспечивает свойство пространственноподобия для поверхности $\Phi_\Gamma(\Omega)$: иными словами, как и в случае двуступенчатых сублоренцевых структур [8], для всех $v \in \Phi_\Gamma(\Omega)$

локально такая поверхность будет лежать вне множества

$$\left\{ w = \exp \left(\sum_{i=1}^{\hat{N}} w_i^x Y_i \right) (v): \right. \\ \left. \sum_{j: Y_j \in \hat{V}_k^+} y_j^2 = \sum_{j: Y_j \in \hat{V}_k^-} y_j^2, \quad k = 1, 2, \dots, \hat{M} \right\}$$

за исключением точки $v \in \Phi_\Gamma(\Omega)$.

Определение 6 (ср. [12, 14]). Пусть $S = \Phi_\Gamma(\Omega)$. Значение адаптированной, или внутренней, меры $\mathcal{H}_\Gamma^v$ для подмножеств S вычисляется по формуле

$$\mathcal{H}_\Gamma^v(A) = \prod_{j=1}^M \omega_{\dim V_j} \liminf_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} r_i^v: \right. \\ \left. \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Phi_\Gamma^{-1}(x_i) \operatorname{Box}_2^{\mathfrak{d}}(x_i, r_i) \supset A, \quad x_i \in A, \quad r_i < \delta \right\}.$$

Для вывода основного результата важно следующее свойство внутренней меры.

Лемма 1. Функция множества $\Phi: S \rightarrow \mathbb{R}$, заданная как

$$\Phi: A \mapsto \mathcal{H}_\Gamma^v(A), \quad \text{где } A \subset S,$$

обладает следующими свойствами:

1) она абсолютно непрерывна относительно $\mathcal{H}^v$ на $\mathbb{G}$;

2) она аддитивна на удалённых шарах.

Основной результат сообщения — следующая

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1.

Тогда для отображений-графиков и $v = \sum_{k=1}^M n_k k$ справедлива формула площади

$$\int_{\Omega} \mathcal{J}(\Phi_\Gamma, x) d\mathcal{H}^v(x) = \int_{\Phi_\Gamma(\Omega)} d\mathcal{H}_\Gamma^v(y),$$

где якобиан равен

$$\prod_{j=1}^M \sqrt{\det(E_{n_j} + D(\hat{D}_P\Phi^+)_{\tilde{V}_j, V_j}^*(x) D(\hat{D}_P\Phi^+)_{\tilde{V}_j, V_j}(x) - D(\hat{D}_P\Phi^-)_{\tilde{V}_j, V_j}^*(x) D(\hat{D}_P\Phi^-)_{\tilde{V}_j, V_j}(x))}$$

для графиков гёльдеровых отображений и

$$\prod_{j=1}^M \sqrt{\det(E_{n_j} + (\hat{D}\Phi^+)_{\tilde{V}_j, V_j}^*(x) (\hat{D}\Phi^+)_{\tilde{V}_j, V_j}(x) - (\hat{D}\Phi^-)_{\tilde{V}_j, V_j}^*(x) (\hat{D}\Phi^-)_{\tilde{V}_j, V_j}(x))}$$

для графиков контактных отображений.

Источник финансирования. Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России (проект № 1.3087.2017/4.6).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Миклюков В.М., Клячин А.А., Клячин В.А. Максимальные поверхности в пространстве-времени Минковского. <http://www.uchimsya.info/maxsurf.pdf>
2. Берестовский В.Н., Гичев В.М. // Алгебра и анализ. 1999. Т. 11. В. 4. С. 1–34.
3. Grochowski M. // J. Dyn. Control Syst. 2006. V. 12. № 2. P. 145–160.
4. Korolko A., Markina I. // Complex Anal. Oper. Theory. 2010. V. 4. № 3. P. 589–618.
5. Крым В.Р., Петров Н.Н. // Вестн. СПГУ. Сер. 1. 2008. В. 3. С. 68–80.
6. Craig W., Weinstein S. // Proc. Rog. Soc. A. 2008. V. 465. № 2110. P. 3023–3046.
7. Bars I., Terning J. Extra Dimensions in Space and Time. B.: Springer, 2010.
8. Карманова М.Б. // ДАН. 2017. Т. 474. № 2. С. 151–154.
9. Карманова М.Б. // ДАН. 2018. Т. 480. № 1. С. 16–20.
10. Folland G.B., Stein E.M. Hardy Spaces on Homogeneous Groups. Princeton: Princeton Univ. Press, 1982.
11. Карманова М.Б. // Сиб. мат. журн. 2017. Т. 58. № 2. С. 305–332.
12. Карманова М.Б. // Изв. РАН. Сер. мат. 2014. Т. 78. № 3. С. 53–78.
13. Vodopyanov S. Geometry of Carnot—Carathéodory Spaces and Differentiability of Mappings. The Interaction of Analysis and Geometry // Contemp. Math. 2007. V. 424. P. 247–301.
14. Карманова М.Б. Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53. № 4. С. 839–861.

AREA OF GRAPH SURFACES ON CARNOT GROUPS WITH SUB-LORENTZIAN STRUCTURE

M. B. Karmanova

Presented by Academician of the RAS Yu.G. Reshetnyak October 8, 2018

Received October 17, 2018

For graph mappings constructed from sufficiently smooth mappings of nilpotent graded groups, we prove area formula on sub-Lorentzian structures of arbitrary depth with multi-dimensional time.

Keywords: nilpotent graded group, intrinsic basis, Hölder mapping, sub-Lorentzian structure, multi-dimensional time, graph mapping, surface area.