УДК 517.956.223

УСРЕДНЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА С БЫСТРО МЕНЯЮЩИМСЯ ТИПОМ НЕЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ: РАЗМЕРНОСТЬ ПРОСТРАНСТВА $n \geq 3$, КРИТИЧЕСКИЙ СЛУЧАЙ

А. В. Подольский, Т. А. Шапошникова*

Представлено академиком РАН В.В. Козловым 12.10.2018 г.

Поступило 26.10.2018 г.

Изучена задача усреднения уравнения Пуассона в ограниченной области, на части границы которой заданы быстро меняющиеся краевые условия: ε -периодически повторяющиеся краевое условие Неймана и нелинейное краевое условие Робина, содержащее параметр, зависящий от $\varepsilon > 0$. Диаметр участков границы, на которых задано нелинейное краевое условие Робина, есть величина $a_\varepsilon \ll \varepsilon$, которая также является параметром задачи. Рассматривается критическое соотношение между этими параметрами.

Ключевые слова: усреднение, уравнение Пуассона, краевая задача, осциллирующее краевое условие.

DOI: <https://doi.org/10.31857/S0869-56524853263-268>

В настоящей работе изучено асимптотическое поведение при $\varepsilon \rightarrow 0$ решения u_ε краевой задачи для уравнения Пуассона с быстро меняющимся типом граничных условий, заданных на части границы области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$. Аналогичная задача для $n = 2$ изучена в [1]. Предполагается, что на подмножествах диаметра $a_\varepsilon = C_0 \varepsilon^\alpha$, где C_0 — некоторая положительная константа, $\alpha > 1$, расположенных ε -периодически на границе $\Gamma_1 \equiv \partial\Omega \cap \{x_1 = 0\}$, задано нелинейное условие Робина вида $\partial_\nu u_\varepsilon + \varepsilon^{-\beta} \sigma(u_\varepsilon) = 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, а на остальной части границы Γ_1 задано однородное условие Неймана. Таким образом, рассматриваемая задача содержит два параметра: α и β , различные соотношения между которыми приводят к различным асимптотическим поведением решения. Здесь рассматривается случай, когда параметры принимают так называемое критическое значение: $\alpha = \beta = \frac{n-1}{n-2}$. При этих значениях параметров усреднённая задача содержит новое нелинейное краевое условие. В работе построена усреднённая модель и доказана слабая в $H^1(\Omega, \Gamma_2)$ сходимости решения u_ε исходной задачи к решению u_0 усреднённой задачи.

Усреднению краевых задач с быстро меняющимся типом граничных условий посвящено много статей, см., например, [2–5] и имеющуюся там библиографию. Мы также упоминаем работы, в которых аналогичная задача была изучена для перфорированных

областей с нелинейным краевым условием типа Робина, заданным на границе полостей, см. [8–14].

Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}_+^n \equiv \mathbb{R}^n \cap \{x_1 > 0\}$, $n \geq 3$, с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$, состоящей из двух частей Γ_1 и Γ_2 , более того, $\Gamma_1 = \partial\Omega \cap \{x \in \mathbb{R}^n: x_1 = 0\} \neq \emptyset$. Пусть γ_0 — область с гладкой границей на плоскости $x_1 = 0$, такая что $\bar{\gamma}_0 \subset \left\{x \in \mathbb{R}^n: x_1 = 0, |x_j| < \frac{1}{2}, 2 \leq j \leq n\right\}$. Определим множество $\delta B = \{x: \delta^{-1}x \in B\}$, $\delta > 0$.

Пусть

$$\tilde{\gamma}_\varepsilon = \bigcup_{z \in \mathbb{Z}'} (a_\varepsilon \gamma_0 + \varepsilon z) = \bigcup_{z \in \mathbb{Z}'} \gamma_\varepsilon^j, \quad (1)$$

где $\mathbb{Z}'$ — множество векторов вида $z = (0, z_2, \dots, z_n)$ с целыми координатами z_i , $i = 2, 3, \dots, n$, $a_\varepsilon = C_0 \varepsilon^\alpha$, $\alpha = \frac{n-1}{n-2}$, $C_0 > 0$.

Определим множество γ_ε как объединение таких множеств $\gamma_\varepsilon^j \subset \tilde{\gamma}_\varepsilon$, что $\bar{\gamma}_\varepsilon^j \subset \Gamma_1$ и $\rho(\partial\Gamma_1, \bar{\gamma}_\varepsilon^j) \geq 2\varepsilon$, т.е.

$$\gamma_\varepsilon = \bigcup_{j \in \Upsilon_\varepsilon} \gamma_\varepsilon^j,$$

где $\Upsilon_\varepsilon = \{j \in \mathbb{Z}', \rho(\partial\Gamma_1, \bar{\gamma}_\varepsilon^j) \geq 2\varepsilon\}$. Заметим, что $|\Upsilon_\varepsilon| \equiv d\varepsilon^{1-n}$, где $d = \text{const} > 0$.

Рассматривается краевая задача

$$\begin{aligned} -\Delta u_\varepsilon &= f(x), \quad x \in \Omega, \\ \partial_{x_1} u_\varepsilon &= \varepsilon^{-\beta} \sigma(u_\varepsilon), \quad x \in \gamma_\varepsilon, \\ \partial_{x_1} u_\varepsilon &= 0, \quad x \in \Gamma_1 \setminus \bar{\gamma}_\varepsilon, \\ u_\varepsilon &= 0, \quad x \in \Gamma_2, \end{aligned} \quad (2)$$

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

*E-mail: shaposh.tan@mail.ru

Рис. 1. Область Ω , множество γ_ϵ .

где $f \in L^2(\Omega)$. Предполагается, что функция $\sigma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывно дифференцируема и удовлетворяет условиям: $\sigma(0) = 0$ и существуют положительные постоянные k_1, k_2 , такие что

$$k_1 \leq \sigma'(u) \leq k_2 \quad \forall u \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Следовательно, имеем

$$k_1 u^2 \leq u \sigma(u) \leq k_2 u^2 \quad \forall u \in \mathbb{R}.$$

Под обобщённым решением задачи (2) будем понимать функцию $u_\epsilon \in H^1(\Omega, \Gamma_2)$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\int_{\Omega} \nabla u_\epsilon \nabla \varphi dx + \epsilon^{-\beta} \int_{\gamma_\epsilon} \sigma(u_\epsilon) \varphi dx' = \int_{\Omega} f \varphi dx, \quad (4)$$

где φ — произвольная функция из $H^1(\Omega, \Gamma_2)$, $x' = (0, x_2, \dots, x_n)$. Через $H^1(\Omega, \Gamma_2)$ обозначено замыкание в $H^1(\Omega)$ бесконечно дифференцируемых функций в $\bar{\Omega}$, обращающихся в нуль в окрестности границы Γ_2 .

Известно, что задача (2) имеет единственное обобщённое решение $u_\epsilon \in H^1(\Omega, \Gamma_2)$.

Полагая в интегральном тождестве (4) в качестве пробной функцию $\varphi = u_\epsilon$ и используя неравенства (3), получим оценки

$$\|\nabla u_\epsilon\|_{L_2(\Omega)} \leq K, \quad \epsilon^{-\beta} \|u_\epsilon\|_{L_2(\gamma_\epsilon)}^2 \leq K, \quad (5)$$

здесь и далее предполагается, что константа K не зависит от ϵ .

Из полученных оценок следует, что существует подпоследовательность (сохраним за ней обозначение исходной), такая что при $\epsilon \rightarrow 0$ имеем

$$\begin{aligned} u_\epsilon &\rightarrow u_0 \text{ слабо в } H^1(\Omega, \Gamma_2), \\ u_\epsilon &\rightarrow u_0 \text{ сильно в } L_2(\Omega). \end{aligned} \quad (6)$$

В силу монотонности функции $\sigma(u)$ имеем, что u_ϵ удовлетворяет интегральному неравенству для произвольной функции $\varphi \in H^1(\Omega, \Gamma_2)$:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla \varphi \nabla (\varphi - u_\epsilon) dx + \epsilon^{-\beta} \int_{\gamma_\epsilon} \sigma(\varphi) (\varphi - u_\epsilon) dx' &\geq \\ &\geq \int_{\Omega} f (\varphi - u_\epsilon) dx. \end{aligned} \quad (7)$$

Через $T_r(x)$ обозначим шар в $\mathbb{R}^n$ радиуса r с центром в точке x . Пусть $P_\epsilon^j = \epsilon j$, $j \in \mathbb{Z}'$, тогда определим $T_{\epsilon/4}^j = T_{\epsilon/4}(P_\epsilon^j)$. Для произвольного множества $A \subset \mathbb{R}^n$ положим $A^+ = \{x \in A \mid x_1 > 0\}$, $A^- = \{x \in A \mid x_1 < 0\}$ и $A^0 = \{x \in A \mid x_1 = 0\}$.

Пусть $w_\epsilon^j(u, x) \in H^1((T_{\epsilon/4}^j)^+, (\partial T_{\epsilon/4}^j)^+)$, $j \in \gamma_\epsilon$ — обобщённое решение краевой задачи

$$\begin{aligned} \Delta w_\epsilon^j &= 0, \quad x \in (T_{\epsilon/4}^j)^+, \\ \partial_{x_1} w_\epsilon^j + \epsilon^{-\beta} \sigma(u - w_\epsilon^j) &= 0, \quad x \in \gamma_\epsilon^j, \\ \partial_{x_1} w_\epsilon^j &= 0, \quad x \in (T_{\epsilon/4}^j)^0 \setminus \bar{\gamma}_\epsilon^j, \\ w_\epsilon^j &= 0, \quad x \in (\partial T_{\epsilon/4}^j)^+, \end{aligned} \quad (8)$$

где $u \in \mathbb{R}$ — параметр.

Определим функцию

$$W_\epsilon(u, x) = \begin{cases} w_\epsilon^j(u, x), & x \in (T_{\epsilon/4}^j)^+, j \in \gamma_\epsilon, \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{j \in \gamma_\epsilon} \overline{(T_{\epsilon/4}^j)^+}. \end{cases} \quad (9)$$

Лемма 1. Для W_ϵ , определённой в (9), справедливы оценки

$$\begin{aligned} \|\nabla W_\epsilon\|_{L_2(\Omega)}^2 + \epsilon^{-\beta} \|W_\epsilon\|_{L_2(\gamma_\epsilon)}^2 &\leq K u^2, \\ \|W_\epsilon\|_{L_2(\Omega)}^2 &\leq K \epsilon^2 u^2. \end{aligned} \quad (10)$$

Следовательно, при $\epsilon \rightarrow 0$ по некоторой подпоследовательности имеем

$$\begin{aligned} W_\epsilon &\rightarrow 0 \text{ слабо в } H^1(\Omega, \Gamma_2), \\ W_\epsilon &\rightarrow 0 \text{ слабо в } L_2(\Omega). \end{aligned} \quad (11)$$

Пусть $\hat{w}(u, y)$ — решение задачи

$$\begin{aligned} \Delta \hat{w} &= 0, \quad y \in \mathbb{R}_+^n, \\ \partial_{y_1} \hat{w} + C_0 \sigma(u - \hat{w}) &= 0, \quad y \in \gamma_0, \\ \partial_{y_1} \hat{w} &= 0, \quad y_1 = 0, y \notin \bar{\gamma}_0, \\ \hat{w} &\rightarrow 0 \text{ при } |y| \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (12)$$

где $u \in \mathbb{R}$ — параметр.

Обозначим через $\mathcal{C}$ — пространство функций $\varphi \in C^\infty(\overline{\mathbb{R}_+^n})$, для которых существует $R > 0$, такое что $\varphi \equiv 0$ вне $(T_R)^+$, где T_R — шар радиуса R с центром в начале координат.

Для функций из данного пространства справедливо неравенство типа Гальярдо—Ниренберга—Соболева.

Лемма 2. Пусть $\varphi \in \mathcal{C}$, тогда

$$\|\varphi\|_{L_2^*(\mathbb{R}_+^n)} \leq K \|\nabla \varphi\|_{L_2(\mathbb{R}_+^n)}, \quad (13)$$

где $2^* = \frac{2n}{n-2}$, K — положительная константа, зависящая только от n .

Введём на пространстве $\mathcal{C}$ норму

$$\|v\|_{\mathcal{C}} \equiv \|\nabla v\|_{L^2(\mathbb{R}_+^n)}. \quad (14)$$

Обозначим через $\mathcal{V}$ пополнение пространства $\mathcal{C}$ по данной норме. Получим гильбертово пространство $\mathcal{V}$.

Будем говорить, что функция $\hat{w} \in \mathcal{V}$ является обобщённым решением задачи (12), если она удовлетворяет интегральному тождеству

$$-\int_{\mathbb{R}_+^n} \nabla \hat{w} \nabla \varphi dy + C_0 \int_{\gamma_0} \sigma(u - \hat{w}) \varphi dy' = 0 \quad (15)$$

для произвольной функции $\varphi \in \mathcal{V}$.

Имеет место

Теорема 1. Существует единственное обобщённое решение $\hat{w} \in \mathcal{V}$ задачи (12), и для него имеет место оценка

$$|\hat{w}(u, y)| \leq \frac{K|u|}{|y|^{n-2}} \quad \forall y \in \overline{\mathbb{R}_+^n}, \quad (16)$$

где константа K не зависит от u .

Доказательство. Рассмотрим оператор $A: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}'$, задаваемый соотношением

$$\langle A(v), w \rangle = \int_{\mathbb{R}_+^n} \nabla v \nabla w dy - C_0 \int_{\gamma_0} \sigma(u - v) w dy', \quad (17)$$

где $v, w \in \mathcal{V}$. Легко показать, что данный оператор является ограниченным, монотонным и коэрцитивным.

Следовательно, оператор A удовлетворяет условиям теоремы 2.1 в [15]. Отсюда заключаем, что существует решение задачи (12). Докажем единственность решения. Пусть $\hat{w}_1$ и $\hat{w}_2$ — два обобщённых решения задачи (12). Рассмотрим разность интегральных тождеств для функций $\hat{w}_1$ и $\hat{w}_2$:

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} \nabla(\hat{w}_1 - \hat{w}_2) \nabla \varphi dy + C_0 \int_{\gamma_0} (\sigma(u - \hat{w}_2) - \sigma(u - \hat{w}_1)) \varphi dy' = 0,$$

где $\varphi \in \mathcal{V}$.

Возьмём в качестве пробной функции $\varphi = \hat{w}_1 - \hat{w}_2$. Получим

$$\mathcal{I} = \int_{\mathbb{R}_+^n} |\nabla(\hat{w}_1 - \hat{w}_2)|^2 dy + C_0 \int_{\gamma_0} (\sigma(u - \hat{w}_2) - \sigma(u - \hat{w}_1))(\hat{w}_1 - \hat{w}_2) dy' = 0. \quad (18)$$

Воспользовавшись свойствами функции σ , выводим

$$0 \leq \|\hat{w}_1 - \hat{w}_2\|_{\mathcal{V}}^2 + C_0 k_1 \|\hat{w}_1 - \hat{w}_2\|_{L_2(\gamma_0)}^2 \leq \mathcal{I} = 0. \quad (19)$$

Откуда заключаем, что $\hat{w}_1 = \hat{w}_2$.

Лемма 3. Функция $\hat{w}(u, y)$ является непрерывной по Липшицу и монотонной по параметру, u , более того, имеет место оценка

$$|\hat{w}(u_1, y) - \hat{w}(u_2, y)| \leq |u_1 - u_2|, \quad u_1, u_2 \in \mathbb{R}, \quad (20)$$

в $\mathbb{R}_+^n$ и п.в. в γ_0 .

Определим функцию

$$\begin{aligned} H(u) &= - \int_{\gamma_0} \partial_{y_1} \hat{w}(u, 0, y') dy' = \\ &= C_0 \int_{\gamma_0} \sigma(u - \hat{w}(u, 0, y')) dy', \quad u \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (21)$$

Лемма 4. Функция $H(u)$, определённая в (21), является непрерывной по Липшицу и монотонной.

Далее приводятся леммы, устанавливающие связь между вспомогательными функциями $w_\varepsilon^j(u, x)$ и $\hat{w}(u, y)$.

Лемма 5. Для всех $u \in \mathbb{R}$ и п.в. $x \in (T_{\varepsilon/4}^j)^+$ имеем

$$|w_\varepsilon^j(u, x)| \leq \left| \hat{w}\left(u, \frac{x - P_\varepsilon^j}{a_\varepsilon}\right) \right|. \quad (22)$$

Лемма 6. Для функций $w_\varepsilon^j(u, x)$ и $\hat{w}(u, y)$ имеют место оценки

$$\|\nabla(v_\varepsilon^j(x))\|_{L_2((T_{\varepsilon/4}^j)^+)}^2 + k_1 \varepsilon^{-\beta} \|v_\varepsilon^j(x)\|_{L_2(\gamma_\varepsilon^j)}^2 \leq K \varepsilon^n, \quad (23)$$

$$\|v_\varepsilon^j(x)\|_{L_2((T_{\varepsilon/4}^j)^+)}^2 \leq K \varepsilon^{n+2}, \quad (24)$$

где $v_\varepsilon^j(x) = w_\varepsilon^j(u, x) - \hat{w}\left(u, \frac{x - P_\varepsilon^j}{a_\varepsilon}\right)$.

Лемма 7. Пусть $H(u)$ — функция, определённая в (21), φ — произвольная функция из $C^\infty(\overline{\Omega})$. Тогда для

произвольной последовательности $h_\varepsilon \in H^1(\Omega, \Gamma_2)$ такой, что $h_\varepsilon \rightharpoonup h$ слабо в $H^1(\Omega, \Gamma_2)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, имеем

$$\left| \sum_{j \in \Upsilon_\varepsilon} \int_{(\partial T_{\varepsilon/4}^j)^+} \partial_\nu \tilde{w} \left(\varphi(\tilde{P}_\varepsilon^j), \frac{x - P_\varepsilon^j}{a_\varepsilon} \right) h_\varepsilon(x) ds + C_0^{n-2} \int_{\Gamma_1} H(\varphi(x')) h dx' \right| \rightarrow 0 \quad (25)$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$, где ν — вектор внешней единичной нормали к $(\partial T_{\varepsilon/4}^j)^+$, направленный по радиусу шара $T_{\varepsilon/4}^j$.

В следующей теореме даётся описание предельной функции u_0 , полученной в (6).

Теорема 2. Пусть $n \geq 3$, $\alpha = \beta = \frac{n-1}{n-2}$ и u_ε — обобщённое решение задачи (2). Тогда функция u_0 , определённая в (6), является обобщённым решением следующей задачи:

$$\begin{aligned} -\Delta u_0 &= f, \quad x \in \Omega, \\ \partial_{x_1} u_0 - C_0^{n-2} H(u_0) &= 0, \quad x \in \Gamma_1, \\ u_0 &= 0, \quad x \in \Gamma_2, \end{aligned} \quad (26)$$

где $H(u)$ — функция, определённая в (21).

Доказательство. Положим $\varphi(x) - \tilde{w}_\varepsilon(\varphi)$ в качестве пробной функции в интегральном тождестве (7), где $\tilde{w}_\varepsilon(\varphi) = W_\varepsilon(\varphi(P_\varepsilon^j), x)$, если $x \in (T_{\varepsilon/4}^j)^+$ для $j \in \Upsilon_\varepsilon$ и $\tilde{w}_\varepsilon(\varphi) = 0$, если $x \in \Omega \setminus \bigcup_{j \in \Upsilon_\varepsilon} \overline{(T_{\varepsilon/4}^j)^+}$. Из оценок (10) следует, что для произвольной функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ имеем $\tilde{w}_\varepsilon(\varphi) \rightarrow 0$ в $H^1(\Omega)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Таким образом, получим

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \nabla(\varphi - \tilde{w}_\varepsilon(\varphi)) \nabla(\varphi - \tilde{w}_\varepsilon(\varphi) - u_\varepsilon) dx + \\ & + \varepsilon^{-\beta} \sum_{j \in \Upsilon_\varepsilon} \int_{\gamma_\varepsilon^j} \sigma(\varphi - w_\varepsilon^j(\varphi(P_\varepsilon^j), x)) \times \\ & \times (\varphi - w_\varepsilon^j(\varphi(P_\varepsilon^j), x) - u_\varepsilon) dx' \geq \\ & \geq \int_{\Omega} f(\varphi - \tilde{w}_\varepsilon(\varphi) - u_\varepsilon) dx. \end{aligned} \quad (27)$$

Преобразуем данное неравенство к виду

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \nabla \varphi \nabla(\varphi - \tilde{w}_\varepsilon(\varphi) - u_\varepsilon) dx - \\ & - \sum_{j \in \Upsilon_\varepsilon} \int_{(\partial T_{\varepsilon/4}^j)^+} \partial_\nu w_\varepsilon^j(\varphi(P_\varepsilon^j), x) (\varphi - u_\varepsilon) ds - \\ & - \varepsilon^{-\beta} \sum_{j \in \Upsilon_\varepsilon} \int_{\gamma_\varepsilon^j} \sigma(\varphi(P_\varepsilon^j) - w_\varepsilon^j(\varphi(P_\varepsilon^j), x)) \times \\ & \times (\varphi - w_\varepsilon^j(\varphi(P_\varepsilon^j), x) - u_\varepsilon) dx' + \\ & + \varepsilon^{-\beta} \sum_{j \in \Upsilon_\varepsilon} \int_{\gamma_\varepsilon^j} \sigma(\varphi(x) - w_\varepsilon^j(\varphi(P_\varepsilon^j), x)) \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times (\varphi - w_\varepsilon^j(\varphi(P_\varepsilon^j), x) - u_\varepsilon) dx' \geq \\ & \geq \int_{\Omega} f(\varphi - \tilde{w}_\varepsilon(\varphi) - u_\varepsilon) dx. \end{aligned} \quad (28)$$

Используя свойства функций σ и φ , для $x \in \gamma_\varepsilon^j$ имеем $|\sigma(\varphi(x) - w_\varepsilon^j(\varphi(P_\varepsilon^j), x)) - \sigma(\varphi(P_\varepsilon^j) - w_\varepsilon^j(\varphi(P_\varepsilon^j), x))| \leq K_1 |\varphi(x) - \varphi(P_\varepsilon^j)| \leq K_2 |x - P_\varepsilon^j| = K_2 a_\varepsilon$. Из данной оценки и из (5) следует, что

$$\begin{aligned} & \left| \varepsilon^{-\beta} \sum_{j \in \Upsilon_\varepsilon} \int_{\gamma_\varepsilon^j} (\sigma(\varphi(x) - w_\varepsilon^j(\varphi(P_\varepsilon^j), x)) - \right. \\ & \left. - \sigma(\varphi(P_\varepsilon^j) - w_\varepsilon^j(\varphi(P_\varepsilon^j), x))) u_\varepsilon dx' \right| \leq \\ & \leq K_2 \varepsilon^{-\beta} a_\varepsilon \|u_\varepsilon\|_{L_2(\gamma_\varepsilon)}^2 \leq K a_\varepsilon. \end{aligned}$$

Проводя аналогичные рассуждения, заключаем, что в силу оценки (10) имеем

$$\begin{aligned} & \left| \varepsilon^{-\beta} \sum_{j \in \Upsilon_\varepsilon} \int_{\gamma_\varepsilon^j} (\sigma(\varphi(x) - w_\varepsilon^j(\varphi(P_\varepsilon^j), x)) - \right. \\ & \left. - \sigma(\varphi(P_\varepsilon^j) - w_\varepsilon^j(\varphi(P_\varepsilon^j), x))) w_\varepsilon^j dx' \right| \leq \\ & \leq K_2 \varepsilon^{-\beta} a_\varepsilon \|W_\varepsilon\|_{L_2(\gamma_\varepsilon)}^2 \leq K a_\varepsilon. \end{aligned}$$

Также имеет место оценка

$$\begin{aligned} & \left| \varepsilon^{-\beta} \sum_{j \in \Upsilon_\varepsilon} \int_{\gamma_\varepsilon^j} (\sigma(\varphi(x) - w_\varepsilon^j(\varphi(P_\varepsilon^j), x)) - \right. \\ & \left. - \sigma(\varphi(P_\varepsilon^j) - w_\varepsilon^j(\varphi(P_\varepsilon^j), x))) \varphi dx' \right| \leq \\ & \leq K_2 a_\varepsilon \varepsilon^{-\beta} \max_{\Omega} |\varphi| \sum_{j \in \Upsilon_\varepsilon} |\gamma_\varepsilon^j| \leq K a_\varepsilon \varepsilon^{-\beta} \varepsilon^{1-n} a_\varepsilon^{n-1} = K a_\varepsilon. \end{aligned}$$

Следовательно, неравенство (28) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \nabla \varphi \nabla(\varphi - \tilde{w}_\varepsilon(\varphi) - u_\varepsilon) dx - \\ & - \sum_{j \in \Upsilon_\varepsilon} \int_{(\partial T_{\varepsilon/4}^j)^+} \partial_\nu w_\varepsilon^j(\varphi(P_\varepsilon^j), x) (\varphi - u_\varepsilon) ds + Z_\varepsilon \geq \\ & \geq \int_{\Omega} f(\varphi - \tilde{w}_\varepsilon(\varphi) - u_\varepsilon) dx, \end{aligned} \quad (29)$$

где $Z_\varepsilon \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Из оценок (10) следует

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \nabla \varphi \nabla(\varphi - \tilde{w}_\varepsilon(\varphi) - u_\varepsilon) dx = \int_{\Omega} \nabla \varphi \nabla(\varphi - u_0) dx, \quad (30)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} f(\varphi(x) - \tilde{w}_\varepsilon(\varphi) - u_\varepsilon) dx = \int_{\Omega} f(\varphi - u_0) dx. \quad (31)$$

Найдём предел оставшегося слагаемого в левой части неравенства (29). Рассмотрим $v_\varepsilon^j = \left(\hat{w}(\varphi(P_\varepsilon^j), \frac{x - P_\varepsilon^j}{a_\varepsilon}) - w_\varepsilon^j(\varphi(P_\varepsilon^j), x) \right)$. Используя формулу Грина и лемму 6, приходим к неравенству

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{j \in Y_\varepsilon} \int_{(\partial T_{\varepsilon/4}^j)^+} \partial_\nu v_\varepsilon^j (\varphi - u_\varepsilon) ds \right| = \\ & = \left| \sum_{j \in Y_\varepsilon} \left(\int_{T_{\varepsilon/4}^j} \nabla v_\varepsilon^j \nabla (\varphi - u_\varepsilon) dx - \int_{\gamma_\varepsilon^j} \partial_\nu v_\varepsilon^j (\varphi - u_\varepsilon) dx' \right) \right| \leq \\ & \leq \left| \sum_{j \in Y_\varepsilon} \int_{T_{\varepsilon/4}^j} \nabla v_\varepsilon^j \nabla (\varphi - u_\varepsilon) dx \right| + \\ & + \varepsilon^{-\beta} \left| \sum_{j \in Y_\varepsilon} \int_{\gamma_\varepsilon^j} (\sigma(\varphi(P_\varepsilon^j) - w_\varepsilon^j) - \sigma(\varphi(P_\varepsilon^j) - \hat{w})) (\varphi - u_\varepsilon) dx' \right|. \end{aligned}$$

Оценим выражения, стоящие в правой части последнего неравенства. Легко видеть, что

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{j \in Y_\varepsilon} \int_{T_{\varepsilon/4}^j} \nabla v_\varepsilon^j \nabla (\varphi - u_\varepsilon) dx \right| \leq \\ & \leq \sum_{j \in Y_\varepsilon} \|\nabla v_\varepsilon^j\|_{L_2(T_{\varepsilon/4}^j)} \|\nabla (\varphi - u_\varepsilon)\|_{L_2(T_{\varepsilon/4}^j)} \leq \\ & \leq \varepsilon^{1/2} \sum_{j \in Y_\varepsilon} \|\nabla (\varphi - u_\varepsilon)\|_{L_2(T_{\varepsilon/4}^j)}^2 + \\ & + \sum_{j \in Y_\varepsilon} \varepsilon^{-1/2} \|\nabla v_\varepsilon^j\|_{L_2(T_{\varepsilon/4}^j)}^2 \leq \\ & \leq K_1 (\varepsilon^{1/2} + \varepsilon^{-1/2} \varepsilon^n \varepsilon^{1-n}) = K \sqrt{\varepsilon}. \end{aligned} \quad (32)$$

Далее оценим второе выражение. Из леммы 6 и оценок (5) выводим

$$\begin{aligned} & \varepsilon^{-\beta} \left| \sum_{j \in Y_\varepsilon} \int_{\gamma_\varepsilon^j} (\sigma(\varphi(P_\varepsilon^j) - w_\varepsilon^j) - \sigma(\varphi(P_\varepsilon^j) - \hat{w})) \times \right. \\ & \times (\varphi - u_\varepsilon) ds \left. \right| \leq K_1 \varepsilon^{-\beta} \sum_{j \in Y_\varepsilon} \int_{\gamma_\varepsilon^j} |v_\varepsilon^j| |\varphi - u_\varepsilon| ds \leq \\ & \leq K_1 \varepsilon^{-1/2} \varepsilon^{-\beta} \sum_{j \in Y_\varepsilon} \|v_\varepsilon^j\|_{L_2(\gamma_\varepsilon^j)}^2 + \\ & + K_1 \varepsilon^{1/2} \varepsilon^{-\beta} (\|\varphi\|_{L_2(\gamma_\varepsilon)}^2 + \|u_\varepsilon\|_{L_2(\gamma_\varepsilon)}^2) \leq \\ & \leq K_1 \varepsilon^{-1/2} \varepsilon^n \varepsilon^{1-n} + K_1 \varepsilon^{1/2} \leq K \sqrt{\varepsilon}. \end{aligned} \quad (33)$$

Объединяя полученные оценки, получим

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{j \in Y_\varepsilon} \int_{(\partial T_{\varepsilon/4}^j)^+} \left(\partial_\nu \hat{w}(\varphi(P_\varepsilon^j), \frac{x - P_\varepsilon^j}{a_\varepsilon}) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \partial_\nu w_{\varepsilon/4}^j(\varphi(P_\varepsilon^j), x) \right) u_\varepsilon \varphi ds \right| \leq K \sqrt{\varepsilon}. \end{aligned} \quad (34)$$

Из данного неравенства и леммы 7 следует, что

$$\begin{aligned} & - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{j \in Y_\varepsilon} \int_{(\partial T_{\varepsilon/4}^j)^+} \partial_\nu w_\varepsilon^j(\varphi(P_\varepsilon^j), x) (\varphi - u_\varepsilon) ds = \\ & = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{j \in Y_\varepsilon} \int_{(\partial T_{\varepsilon/4}^j)^+} \partial_\nu \hat{w}_\varepsilon \left(\varphi(P_\varepsilon^j), \frac{x - P_\varepsilon^j}{a_\varepsilon} \right) (\varphi - u_\varepsilon) ds = \\ & = C_0^{n-2} \int_{\Gamma_1} H(\varphi) (\varphi - u_0) dx'. \end{aligned} \quad (35)$$

Объединяя исследованные предельные переходы и используя тот факт, что $Z_\varepsilon \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, получим, что u_0 удовлетворяет вариационному неравенству

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \nabla \varphi \nabla (\varphi - u_0) dx + C_0^{n-2} \int_{\Gamma_1} H(\varphi) (\varphi - u_0) dx' \geq \\ & \geq \int_{\Omega} f(\varphi - u_0) dx \end{aligned} \quad (36)$$

для произвольной функции φ из $H^1(\Omega, \Gamma_2)$.

Положим $\varphi = u_0 \pm \lambda \psi$, $\lambda > 0$, $\psi \in H^1(\Omega, \Gamma_2)$ в (36) и перейдём к пределу при $\lambda \rightarrow 0$. Тогда получим

$$\int_{\Omega} \nabla u_0 \nabla \psi dx + C_0^{n-2} \int_{\Gamma_1} H(u_0) \psi dx = \int_{\Omega} f \psi dx, \quad (37)$$

где ψ — произвольная функция из $H^1(\Omega, \Gamma_2)$. Что завершает доказательство теоремы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дуаз Ж.И., Гомез-Кастро Д., Подольский А.В., Шапошникова Т.А. // ДАН. 2018. Т. 480. № 6. С. 644–649.
2. Zubova M.N., Shaposhnikova T.A. // Math. Notes. 2007. V. 82. Iss. 4. P. 481–491.
3. Damlamian A., Li Ta-Tsien // J. Math. Pures Appl. (9). 1987. V. 66. № 4. P. 351–361.
4. Chechkin G.A. // Sb. Math. 1994. V. 79. № 1. P. 191–222.
5. Borisov D.I. // Asymptot. Anal. 2003. V. 35. № 1. P. 1–26.
6. Oleinik O.A., Shaposhnikova T.A. // Rend. Mat. Acc. Lincei. Ser. 9. 1995. V. 6. P. 133–142.
7. Oleinik O.A., Shaposhnikova T.A. // Rend. Mat. Acc. Lincei. Ser. 9. 1996. V. 7. P. 129–146.
8. Kaizu S. // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. 1989. V. 36. P. 43–86.
9. Jager W., Neuss-Radu M., Shaposhnikova T.A. // Nonlin. Anal.: Real World Appl. 2014. V. 15. P. 367–380.
10. Gomez D., Lobo M., Perez E., Podol'skii A.V., Shaposhnikova T.A. // ESAIM Control Optim. Calc. Var. 2017. DOI: 10.1051/cocv/2017026.
11. Дуаз Ж.И., Гомез-Кастро Д., Подольский А.В., Шапошникова Т.А. // ДАН. 2016. Т. 469. № 2. С. 148–153.

12. *Diaz J.I., Gomez-Castro D., Podol'skii A.V., Shaposhnikova T.A.* // Adv. Nonlin. Anal. 2017. DOI: 10.1515/anona-2017-0140.
13. *Перес Е., Зубова М.Н., Шапошникова Т.А.* // ДАН. 2014. Т. 457. № 5. С. 520–525.
14. *Diaz J.I., Gomez-Castro D., Shaposhnikova T.A., Zubova M.N.* // Electronic J. of Different. Equat. 2017. V. 2017. № 178. P. 1–25.
15. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972. 587 с.

HOMOGENIZATION OF THE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE POISSON EQUATION WITH RAPIDLY OSCILLATING NONLINEAR BOUNDARY CONDITIONS: SPACE DIMENSION $n \geq 3$, CRITICAL CASE

A. V. Podolskiy, T. A. Shaposhnikova

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov October 12, 2018

Received October 26, 2018

The homogenization of the Poisson equation in a bounded domain with rapidly oscillating boundary conditions specied on a part of the domain boundary is studied. A Neumann boundary condition alternates with an ε -periodically distributed nonlinear Robin condition involving the coefficient $\varepsilon^{-\beta}$, where $\beta \in \mathbb{R}$. The diameter of the boundary portions with a nonlinear Robin condition is of order $O(\varepsilon^\alpha)$, $\alpha > 1$. A critical relation between the parameters α and β is considered.

Keywords: homogenization, Poisson's equation, boundary value problem, oscillating boundary condition.