

УДК 539.3

ОБ ОДНОМ НОВОМ ТИПЕ ТРЕЩИН, ДОПОЛНЯЮЩИХ ТРЕЩИНЫ ГРИФФИТСА—ИРВИНА

Академик РАН В. А. Бабешко^{1,2,*}, О. М. Бабешко², О. В. Евдокимова¹

Поступило 21.11.2018 г.

Выявлены различия в описании условий разрушения трещинами материалов. Для трещин Гриффитса—Ирвина разрушение определяется величиной коэффициента интенсивности напряжений в вершине трещины, в случае трещин нового типа разрушение происходит по причине роста концентраций напряжений, вплоть до сингулярных.

Ключевые слова: метод блочного элемента, граничная задача, трещины нового типа, трещины Гриффитса—Ирвина.

DOI: <https://doi.org/10.31857/S0869-56524852162-165>

ВВЕДЕНИЕ

Построенная Гриффитсом теория трещин [1], в дальнейшем усовершенствованная Ирвиным [2], получила развитие в ряде работ отечественных и зарубежных исследователей [3–15]. Среди них следует отметить работу [3], в которой исследовалась физическая сторона проблемы трещин, а в работе [4] дана строгая математическая теория этих объектов, открывшая путь к многочисленным приложениям. В условиях оправданно кажущегося исчерпания теоретических проблем в теории трещин при изучении скрытых дефектов в материалах и разломов литосферных плит в сейсмологии [5–7] пришлось столкнуться с ситуацией, которая никак не укладывалась в теорию трещин Гриффитса—Ирвина, хотя и казалась происходящей из неё. А именно в граничных задачах, описывающих поведение скрытых дефектов в материалах с покрытиями, а также в геофизических процессах в зоне разломов литосферных плит [5], было выявлено возникновение сингулярных концентраций контактных напряжений при сближении плит, что приводит к стартовым землетрясениям. То же относится и к скрытым дефектам. В этих граничных задачах изучалось напряжённо-деформированное состояние блочной структуры, состоящей из трёх блоков: двух двумерных, моделируемых полубесконечными пластинами Кирхгофа, которые без трения лежали на третьем, моделируемом трёхмерным упругим слоем. Внешнее воздействие осуществлялось вер-

тикальными усилиями, действующими на плиты, включающими и их вес [5].

Концентрация контактных напряжений на поверхности упругого основания под краями каждой их сближившихся плит была получена в виде

$$\begin{aligned} g_{3\lambda}(x_1, x_2) &\rightarrow \sigma_{2\lambda}(x_1, x_2)x_2^{-1} + \sigma_{3\lambda}(x_1, x_2)\ln|x_2|, \\ g_{3r}(x_1, x_2) &\rightarrow \sigma_{2r}(x_1, x_2)x_2^{-1} + \sigma_{3r}(x_1, x_2)\ln|x_2|. \end{aligned} \quad (1)$$

Функции $\sigma_{nb}(x_1, x_2)$, $b = \lambda, r$, $n = 2, 3$, непрерывны по обоим параметрам. При расширении постановок граничных задач с целью охвата всех типов граничных условий, диктуемых различными типами внешних воздействий на блочные структуры, вновь было обнаружено устойчивое возникновение сингулярных концентраций напряжений в зонах контактов блочных элементов теперь уже и в касательных составляющих векторов контактных напряжений [6]. Это обстоятельство дало повод для поиска единой причины, приводящей к описанным явлениям.

Возникло предположение, что причина состоит в специфике взаимодействия двумерного объекта — покрытия в форме пластины Кирхгофа — с трёхмерным основанием. Однако рассмотрение задачи для трёхмерных покрытий, заменивших двумерные на трёхмерном основании [7], показало, что и в этом случае возникает сингулярная составляющая в контактных напряжениях в зоне взаимодействия сближившихся, но не слипшихся блочных элементов. Объяснение этому феномену, приводящему к однотипным проявлениям свойств контактных напряжений, независимо от характера нагружения полностью сближившихся, но не слипшихся блочных элементов может быть дано, если предположить существование в зоне сближившихся блочных эле-

¹ Южный научный центр Российской Академии наук, Ростов-на-Дону

² Кубанский государственный университет, Краснодар

*E-mail: babeshko41@mail.ru

ментов нового типа трещины. Ранее это не удавалось сделать в связи с отсутствием теории блочных структур и метода блочного элемента, с помощью которых удалось их обнаружить и проводить дальнейшие исследования.

Построение трещин Гриффитса—Ирвина с гладкой границей детально описано в [4] (рис. 1а, который взят из работ Гриффитса). Это достигается путём виртуального деформирования полости в форме эллипса или окружности до сближения противоположных границ полушарий фигур. В случае трещины нового типа рассматривается прямоугольная полость, боковые стороны которой сближаются (рис. 1б). Этот тип трещин, имеющих в плоской задаче вид полости в упругой среде в результате извлечения прямолинейного отрезка, ранее уже изучался [4]. Отмеченные трещины детально исследовались методом интеграла Сохоцкого в энергетических пространствах в работе [4]. Было показано, что концентрация напряжений при приближении к вершинам трещин нарастает в зависимости от расстояния δ до границы трещины в виде $\delta^{-1/2}$.

Введение названия “трещины нового типа” продиктовано необходимостью дистанцироваться от изучавшегося типа трещин той же геометрии в связи с тем, что последние исследуются в неэнергетических пространствах медленно растущих обобщённых функций, диктуемых спецификой корректно поставленных механических задач. Заметим, что построение неэнергетических собственных функций в области, имеющей полость с угловой точкой, детально исследовано Н.Ф. Морозовым в фундаментальной монографии [4]. Определённым требованием выбора иного функционального пространства новые трещины получаются как предел

последовательности полостей с негладкой границей, например прямоугольных, при сближении боковых сторон (рис. 1б), для которых исследование осуществляется в энергетических пространствах, но предельное решение его покидает. Это означает формирование из полостей с негладкой границей уже полостей-трещин в виде прямолинейного отрезка, способных разрушить среду или изменить её реологию в некоторой упругой зоне, содержащей неэнергетическую составляющую концентрации контактных напряжений.

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ТРЕЩИН НОВОГО ТИПА

Контактные напряжения под блочными элементами имеют степенную особенность. В случае отсутствия расстояния между берегами трещин контактные напряжения приобретают сингулярную особенность [5–7]. Наличие сингулярности является свидетельством разрушения блоков в зоне контакта берегов трещины или основания либо перехода среды в пластическое состояние. Эта составляющая исчезает, если параметры граничной задачи, включая и параметры внешних воздействий, такие, что коэффициент при сингулярной особенности в контактных напряжениях равен в (1) нулю. Известно, что механическая система с большей возможностью разрушения менее устойчива, нежели с меньшей, и стремится к последней. Поэтому при наличии сингулярной особенности в контактных напряжениях трещина нового типа неустойчива, что приводит к разрушению зоны её вершины, и, таким образом, либо разрушается вся среда, либо при разрушении происходит её трансформация в трещину без нулевого угла, т.е. в трещину Гриффитса—Ирвина.

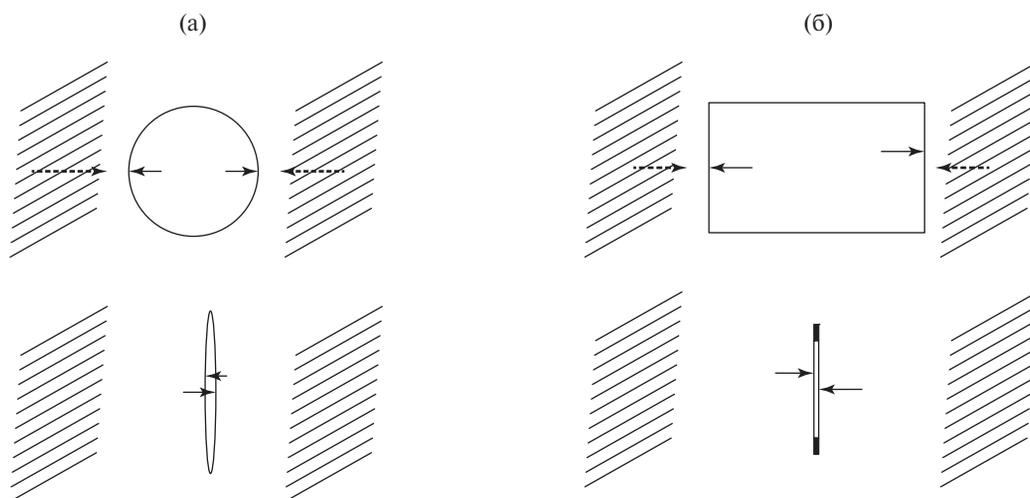


Рис. 1. Формирование трещины Гриффитса—Ирвина (а) и трещины нового типа (б). Сплошные стрелки показывают зону нагрузки полости, штриховые — направления движения границ.

В том же случае, если у трещины нового типа сингулярная составляющая отсутствует, трещина нового типа становится устойчивой до тех пор, пока параметры среды или внешнего воздействия не приведут к возникновению сингулярной составляющей в среде в вершине трещины нового типа.

Трещины нового типа хорошо известны в строительстве. Существует термин “играющий” фундамент, когда он треснул, так как появляется трещина нового типа. В сейсмологии трещины нового типа побуждают возникновение стартовых землетрясений. Такие же процессы разрушения имеют место в материалах с треснувшими покрытиями, когда свойства материалов и внешние воздействия формируют в контактных напряжениях сингулярные особенности. В качестве примера приведём простейший вариант формирования трещины нового типа, основываясь на результатах работы [7], где рассматривалась антиплоская граничная задача для блочной структуры. Возьмём три блочных элемента, состоящих из полупространства с симметрично расположенными на нём прямоугольными неограниченными клиньями [7]. Для простоты рассмотрим в каждом из них граничную задачу для уравнения Гельмгольца [7]:

$$\begin{aligned} &(\partial_{x_2x_2} + \partial_{x_3x_3} + p_\lambda^2)u_\lambda(x_2, x_3) = 0, \\ &\Omega_\lambda(|x_1| \leq \infty, -\infty \leq x_2 \leq b_1, 0 \leq x_3 \leq \infty), \\ &(\partial_{x_2x_2} + \partial_{x_3x_3} + p_r^2)u_r(x_2, x_3) = 0, \\ &\Omega_r(|x_1| \leq \infty, b_2 \leq x_2 \leq \infty), \\ &(\partial_{x_2x_2} + \partial_{x_3x_3} + p_h^2)u_h(x_2, x_3) = 0, \\ &\Omega_h(|x_1| \leq \infty, |x_2| \leq \infty, -\infty \leq x_3 \leq 0), \\ &p_\lambda^2 = \rho_\lambda \omega^2 \mu_\lambda^{-1}, p_r^2 = \rho_r \omega^2 \mu_r^{-1}, p_h^2 = \rho_h \omega^2 \mu_h^{-1}. \end{aligned}$$

Считаем, что на границах задаются напряжения вида

$$\begin{aligned} \sigma_{\lambda x_1 x_3} &= \mu_\lambda f_{\lambda 2}(x_2), \quad \sigma_{rx_1 x_3} = \mu_r f_{r 2}(x_2), \\ \sigma_{\lambda x_1 x_2} &= \mu_\lambda f_{\lambda 1}(x_3), \quad \sigma_{rx_1 x_2} = \mu_r f_{r 1}(x_3), \\ \sigma_{hx_1 x_3} &= \mu_h f_{h 1}(x_2). \end{aligned}$$

Применяя метод блочного элемента, получим

$$\begin{aligned} u_\lambda(x_2, x_3) &= \mathbf{F}_2^{-1}(x_2, x_3) \frac{\omega_\lambda(\alpha_2, \alpha_3)}{(\alpha_2^2 + \alpha_3^2 - p_\lambda^2)}, \\ \omega_\lambda &= \left(1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_{2\lambda-}}\right) e^{i(\alpha_2 b_1)} \times \\ &\times \left\langle F_{1\lambda}(\alpha_3) - F_{1\lambda}(\alpha_{3\lambda+}) \frac{\alpha_3}{\alpha_{3\lambda+}} \right\rangle + \left(\frac{\alpha_3}{\alpha_{3\lambda+}} - 1 \right) \times \\ &\times \left\langle F_{2\lambda}(\alpha_2) - F_{2\lambda}(\alpha_{2\lambda-}) e^{-i(\alpha_{2\lambda-} b_1)} e^{i(\alpha_2 b_1)} \frac{\alpha_2}{\alpha_{2\lambda-}} \right\rangle, \\ u_r(x_2, x_3) &= \mathbf{F}_2^{-1}(x_2, x_3) \frac{\omega_r(\alpha_2, \alpha_3)}{(\alpha_2^2 + \alpha_3^2 - p_r^2)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega_r &= \left[\frac{\alpha_2}{\alpha_{2r+}} - 1 \right] e^{i(\alpha_2 b_2)} \left\langle F_{1r}(\alpha_3) - F_{1r}(\alpha_{3r+}) \frac{\alpha_3}{\alpha_{3r+}} \right\rangle + \\ &+ \left[\frac{\alpha_3}{\alpha_{3r+}} - 1 \right] \left\langle F_{2r}(\alpha_2) - F_{2r}(\alpha_{2r+}) e^{-i(\alpha_2 b_2)} e^{i(\alpha_{2r+} b_2)} \frac{\alpha_2}{\alpha_{2r+}} \right\rangle, \\ u_h(x_2, x_3) &= \frac{1}{4\pi^2} \times \\ &\times \iint_{R^2} \frac{F_{2h}(\alpha_2)}{(\alpha_2^2 + \alpha_3^2 - p_h^2) \alpha_{3h-}} (\alpha_{3h-} - \alpha_3) e^{-i(\alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3)} d\alpha_2 d\alpha_3. \end{aligned}$$

Положим во всех этих формулах

$$p_h = p_\lambda = p_r.$$

Это означает, что все три блока представлены однотипным материалом, содержащим трещину нового типа, а между верхними блоками и нижним основанием имеется полное сцепление. Тогда в результате сближения клиньев до встречи будет сформирована трещина нового типа, представленная на рис. 1б и продолженная вверх до бесконечности. Контактные напряжения в случае несблизившихся клиновидных блоков описываются вблизи краёв обеспечивающими конечность энергии формулами вида

$$\begin{aligned} \sigma_{13\lambda}(x_2, x_3) &= \sigma_{1\lambda}(x_2, x_3) (-x_2 - \theta)^{-1/2}, \quad x_2 < -\theta, \\ \sigma_{13r}(x_2, x_3) &= \sigma_{1r}(x_2, x_3) (x_2 - \theta)^{-1/2}, \quad x_2 > \theta. \end{aligned}$$

Здесь $\sigma_{1b}(x_2, x_3)$, $b = \lambda, r$, — непрерывные по обеим координатам функции при достаточно гладких f_{bm} , $b = \lambda, r$ [7].

При сблизившихся клиновидных блоках концентрация контактных напряжений в зоне сближения приобретает в общем случае сингулярную особенность вида

$$\begin{aligned} \sigma_{13\lambda}(x_2, x_3) &= \sigma_{2\lambda}(x_2, x_3) x_2^{-1}, \\ \sigma_{13r}(x_2, x_3) &= \sigma_{2r}(x_2, x_3) x_2^{-1}. \end{aligned}$$

Решение оказывается неэнергетическим. В частном случае специальной нагрузки на вертикальные границы клиновидных блоков эта особенность может отсутствовать и решение окажется энергетическим. Этой особенностью трещины нового типа существенно отличаются от трещин Гриффитса—Ирвина. Более глубокий анализ рассматриваемой граничной задачи показал, что в трещинах нового типа характер концентрации напряжений имеет диапазоны изменений в зависимости от некоторых интегральных характеристик нагрузок на берега трещины, этим также они отличаются от трещин Гриффитса—Ирвина. А именно существует линейный непрерывный функционал $v(f_{b2}, \xi)$, строящийся достаточно сложно, зависящий от параметра ξ , определяющий как соотношение с трещинами Гриффитса—Ирвина,

так и поведение концентрации напряжений в сечениях вершины трещины. С его помощью формируются требования на нагрузки берегов трещин для обеспечения определённого состояния блочной структуры. Например, выделяются следующие зоны состояния функционала: для $v(f_{b2}, \xi) = O(\xi^{-\varepsilon})$, $\varepsilon > 1$, трещина нового типа подобна по параметрам трещине Гриффитса—Ирвина, является устойчивой; для $v(f_{b2}, \xi) = O(\xi^{-\varepsilon})$, $0,5 < \varepsilon \leq 1$, возникает высокая концентрация напряжений, но решение остаётся энергетическим; при $v(f_{b2}, \xi) = O(\xi^{-\varepsilon})$, $\varepsilon \leq 0,5$, возникает сингулярная особенность, решение покидает энергетическое пространство, переходит в пространство медленно растущих обобщённых функций (физически это означает возникновение землетрясения).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, показано как геометрически, так и аналитически с использованием упакованных блочных элементов существование нового типа трещин, дополняющих трещины Гриффитса—Ирвина.

Расширение класса функций, в котором исследуется трещина-полость, до медленно растущих обобщённых функций позволило выявить особенности напряжённо-деформированного состояния трещин нового типа и с их помощью построить механическую модель подготовки широкого спектра стартовых землетрясений. Существование трещин нового типа позволяет расширить представление о процессах разрушения сред и материалов. В сейсмологии позволяет дать новое объяснение форшокам и афтершокам как результат блужданий приведённого функционала между второй и третьей зонами, возникающих при подвижках литосферных плит.

Источники финансирования. Отдельные фрагменты работы выполнены в рамках реализации Государственного задания Минобрнауки на 2018 г., проект 9.8753.2017/8.9 ЮНЦ РАН на 2018 г., проекта 00—18—04, номер госрегистрации 01201354241, программ Президиума РАН П-16, проект 00—18—21, и П-52, проект 00—18—29, и при поддержке грантов РФФИ 19—41—230003, 19—41—230004, 19—48—230014, 17—08—00323, 18—08—00465, 18—01—00384, 18—05—80008.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Griffith A. The Phenomena of Rupture in Solids // Trans. Roy. Soc. London, 221A. 1920. P. 163–197.
2. Irwin G. Fracture Dynamics. Fracture of Metals. Cleveland: ASM, 1948. P. 147–166.
3. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 640 с.
4. Морозов Н.Ф. Математические вопросы теории трещин. М.: Наука, 1984. 256 с.
5. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. On the Possibility of Predicting Some Types of Earthquake by a Mechanical Approach // Acta Mech. 2018. V. 229. № 5. P. 2163–2175. <https://doi.org/10.1007/s00707-017-2092-0>
6. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. On a Mechanical Approach to the Prediction of Earthquakes During Horizontal Motion of Lithospheric Plates // Acta Mech. 2018. V. 10. <https://doi.org/10.1007/s00707-018-2255-7>
7. Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М. О влиянии пространственной модели литосферных плит на стартовое землетрясение // ДАН. 2018. Т. 480. № 2. С. 158–163.
8. Партон В.З., Борисковский В.Г. Динамика хрупкого разрушения. М.: Машиностроение, 1988. 240 с.
9. Александров В.М., Сметанин Б.И., Соболев Б.В. Тонкие концентраторы напряжений в упругих телах. М.: Наука, 1993. 224 с.
10. Kirugulige M.S., Tippur H.V. Mixed-Mode Dynamic Crack Growth in Functionally Graded Glass-Filled Epoxy // Exp. Mech. 2006. V. 46. № 2. P. 269–281.
11. Rangarajan R., Chiaramonte M.M., Hunsweck M.J., Shen Y., Lew A.J. Simulating Curvilinear Crack Propagation in Two Dimensions with Universal Meshes // Int. J. Numer. Meth. Eng. 2015. V. 102. № 3/4. P. 632–670.
12. Huang Y., Gao H. Intersonic Crack Propagation. Pt II. Suddenly Stopping Crack // J. Appl. Mech. 2002. V. 69. P. 76–80.
13. Antipov Y.A., Smirnov A.V. Subsonic Propagation of a Crack Parallel to the Boundary of a Half-Plane // Math. Mech. Solids. 2013. V. 18. P. 153–167.
14. Krueger R. Virtual Crack Closure Technique: History, Approach, and Applications // Appl. Mech. Rev. 2004. V. 57. P. 109–143.
15. Oneida E.K., van der Meulen M.C.H., Ingraffea A.R. Methods for Calculating G, GI and GII to Simulate Crack Growth in 2D // Multiple-Material Struct. Eng. Fract. Mech. 2015. V. 140. P. 106–126.

A NEW TYPE OF CRACKS ADDING TO GRIFFITH—IRWIN CRACKS

Academician of the RAS V. A. Babeshko, O. M. Babeshko, O. V. Evdokimova

Received November 21, 2018

The distinctions in the description of the conditions of cracking of materials are revealed. For Griffith—Irwin cracks, fracture is determined by the magnitude of the stress-intensity factor at the crack tip; in the case of the new type of cracks, fracture occurs due to an increase in the stress concentrations up to singular concentrations.

Keywords: block element method, boundary value problem, cracks of new type, cracks of Griffith—Irwin.