

УДК 519:529:532

**КОНСЕРВАТИВНАЯ ВЕРСИЯ МЕТОДА ХАРАКТЕРИСТИК
С ПЛАВАЮЩЕЙ СЕТКОЙ В ЗАДАЧАХ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ****Ю. А. Гришин^{1,*}, В. Н. Бакулин^{2,3,**}**

Представлено академиком РАН М.Я. Маровым 13.09.2018 г.

Поступило 19.09.2018 г.

С применением разработанной и известных схем с плавающей сеткой были проведены тестовые расчёты движения и отражения отдельных волн в длинной трубе, где в соответствующем эксперименте волны получались с помощью специально изготовленного одноциклового генератора. Показано значительное преимущество по времени счёта представленной версии и перед методом распада разрыва, в котором для получения необходимого фазового и амплитудного соответствия реальной волновой картине требуется существенное увеличение густоты расчётной сетки.

Ключевые слова: метод характеристик с плавающей сеткой, консервативная версия, одноциклового генератор.

DOI: <https://doi.org/10.31857/S0869-56524852171-175>

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

При моделировании нестационарного течения газовой среды в протяжённых каналах численные методы с фиксированной сеткой часто не позволяют получить необходимой точности расчёта волн ни по фазам, ни по амплитудам. Это процессы в магистральных газопроводах, системах пневмоавтоматики, газоздушных трактах поршневого двигателя с участками специально настроенных впускных и выпускных труб. Здесь наибольшую эффективность показывает метод характеристик с плавающей сеткой, позволяющий точно моделировать формирование и движение фронтов волн разрежения и сжатия [1–6]. Однако вследствие неконсервативности метод не всегда обеспечивает необходимую точность определения массы и энергии в потоке. Например, при расчёте динамического наддува двигателя, когда перед закрытием впускного клапана происходит дозарядка цилиндра вполне определённой массой воздуха, или при расчёте энергии импульса перед турбиной [7–10].

Отметим, что в работе [11] описана версия метода характеристик с использованием подвижной сетки и интегральных соотношений, обеспечивающих

консервативность. Однако в ней расчётная сетка фактически “полуподвижна”, так как шаг по времени фиксируется. В итоге реальное движение фронтов волн не отслеживается. Кроме того, необходим пересчёт параметров на каждом расчётном шаге, что значительно увеличивает время счёта.

В данной работе предложена новая безитерационная версия численного метода характеристик с плавающей сеткой, где впервые его достоинства по качественному соответствию волновых процессов реальной физической картине дополняются выполнением интегральных законов сохранения газовой динамики. Этим обеспечивается точное определение массовых и энергетических характеристик нестационарного потока.

Для проверки метода были проведены исследования, где сравнивались результаты расчётов и экспериментов с волнами, выпускаемыми специально построенным одноцикловым генератором. Показано, что даже при ограниченном числе характеристик в расчётной сетке для волн, выпускаемых генератором в длинном трубопроводе, можно получить точное соответствие расчётной и экспериментальной форм волн. Существующие версии метода характеристик с плавающей сеткой также позволяют получить реальную форму волн, но вследствие неконсервативности показывают нарушение балансов массы и энергии. Кроме того, в них при построении узлов сетки, где пересекаются характеристики трёх семейств, требуется проведение итераций, на порядок и более увеличивающих время счёта по сравнению с предложенной версией.

¹ Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана

² Институт прикладной механики Российской Академии наук, Москва

³ Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)

*E-mail: grishin@power.bmstu.ru

**E-mail: vbak@yandex.ru

Показано, что при соответствующих расчётах известным методом распада разрыва (схема С.К. Годунова) для получения реальной волновой картины требуется значительная густота расчётной сетки, что также приводит к заметному увеличению времени счета по сравнению с предложенной версией метода характеристик.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Рассмотрим основные принципы расчёта методом характеристик с плавающей сеткой с выполнением свойства консервативности на примере ячейки d , которая будет располагаться выше ячеек a и b , параметры в которых уже известны, известны также координаты узлов M, C, N (рис. 1). Угловые коэффициенты характеристик CA и CB можно определять по параметрам в ячейках a и b — скорости v и скорости звука a : $w_{CA} = v_a - a_a$, $w_{CB} = v_b + a_b$ или с помощью газодинамических функций нестационарного течения [12]. Аналогичным образом определяются угловые коэффициенты отрезков MA и NB . Это позволяет получить координаты t_A, x_A и t_B, x_B . Левая и правая части струйки, ограниченной контактными поверхностями A_vA и B_vB , с соответствующими плотностью ρ и давлением p входят в ячейку d . Обозначим для совершенного газа удельные энергии

$$e_a = \frac{p_a}{(\gamma - 1)\rho_a} + \frac{v_a^2}{2}, \quad e_b = \frac{p_b}{(\gamma - 1)\rho_b} + \frac{v_b^2}{2};$$

здесь γ — показатель адиабаты, $\frac{p}{(\gamma - 1)\rho} = u$ — удельная внутренняя энергия; $m_{CA} = \rho_a a_a$, $m_{CB} = \rho_b a_b$ — расходы, идущие через фронты CA и CB .

Запишем суммарные значения массы M , количества движения K и полной энергии E , которые через фронты CA, CB из a и b попадут в ячейку d :

$$M = m_{CA}(t_A - t_C) + m_{CB}(t_B - t_C); \quad (1)$$

$$K = (m_{CA}v_a + p_a)(t_A - t_C) + (m_{CB}v_b - p_b)(t_B - t_C); \quad (2)$$

$$E = (m_{CA}e_a + p_a v_a)(t_A - t_C) + (m_{CB}e_b - p_b v_b)(t_B - t_C). \quad (3)$$

Система основных интегральных законов сохранения имеет вид

$$\oint \rho dx - \rho v dt = 0, \quad \oint \rho v dx - (p + \rho v^2) dt = 0; \\ \oint \rho \left(u + \frac{v^2}{2} \right) dx - \rho v \left(u + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} \right) dt = 0.$$

Для контура $A_v A D_A D_B B B_v C A_v$, ограниченного горизонталями и отрезками контактных поверхностей, через которые нет потока, запишем соответству-

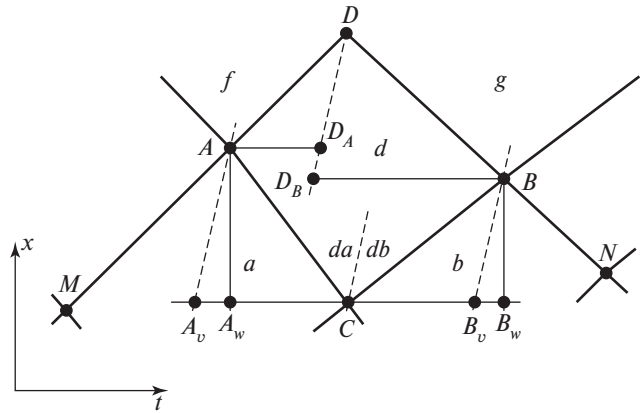


Рис. 1. Элементы расчётной сетки.

ющие конечно-разностные соотношения с учётом импульса и работы на поверхности $D_A D_B$. При этом сумма отрезков AD_A и $D_B B$ составит $\Delta x - v_d \Delta t$, где $\Delta x = x_B - x_A$, $\Delta t = t_B - t_A$. Здесь v_d — пока неизвестная средняя скорость в ячейке d . В результате имеем

$$\rho_d \Delta x = M + \rho_d v_d \Delta t; \quad (4)$$

$$M v_d = K + p_d \Delta t; \quad (5)$$

$$M \left[\frac{p_d}{(\gamma - 1)\rho_d} + \frac{v_d^2}{2} \right] = E + p_d v_d \Delta t, \quad (6)$$

что позволяет определить ρ_d, v_d и p_d в ячейке d . При построении сетки может получиться $\Delta t = 0$ (момент, соответствующий схеме с фиксированной сеткой по Δt). Тогда из (4) сразу определяется ρ_d , из (5) — v_d , затем из (6) — p_d . Для общего случая при $\Delta t \neq 0$ с использованием обозначений $\kappa = K/M$, $\epsilon = E/M$, $\delta = \Delta x/\Delta t$ из этих уравнений получается формула для определения v_d :

$$v_d = \frac{\delta + \gamma \kappa}{\gamma + 1} \pm \sqrt{\left(\frac{\delta + \gamma \kappa}{\gamma + 1} \right)^2 - 2 \frac{(\gamma - 1)\epsilon + \delta \kappa}{\gamma + 1}}. \quad (7)$$

Из двух v_d , вычисляемых по этой формуле, следует выбирать наиболее близкую к контрольной скорости v_{dk} , которая получается из (5) при условном задании $\Delta t = 0$. Зная скорость v_d , из (4) и (5) теперь легко найти средние значения ρ_d и p_d в объёме ячейки d .

Очевидно, что при дальнейшем расчёте масса M , количество движения K и энергия E разделятся на две части и через AD и BD перейдут в ячейки f и g (рис. 1). Для определения угловых коэффициентов характеристик AD, BD , координат x_D, t_D и последующего расчёта ячеек f, g вычисляется и скорость звука $a_d = \sqrt{\gamma p_d / \rho_d}$. Описанная схема обеспечивает абсолютное выполнение интегральных законов сохранения при отражении реальной картины волно-

вых процессов, что подтвердили и соответствующие расчёты на ЭВМ.

При решении практических задач необходимо учитывать трение и теплообмен в уравнениях (2) и (3). Для этого можно воспользоваться соотношениями Дарси–Вейсбаха $dp_{тр} = \frac{\lambda_{\tau} \rho v^2 dx}{2D}$ и Ньютона $dQ = \frac{4\alpha_{\tau}(T - T_c)dt}{\rho D}$. Здесь λ_{τ} , α_{τ} — коэффициенты трения и теплоотдачи в стенке, T_c — температура стенки, D — внутренний диаметр трубы.

РАСЧЁТНО-ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ПРОВЕРКА МЕТОДА

С применением предложенной схемы были выполнены тестовые расчёты движения и отражения волн в трубах с $D = 0,022-0,032$ м и длиной 1,5–3 м. Число ячеек по оси x составляет 25. В экспериментах волна испускалась с помощью специального одноциклового генератора импульсов (рис. 2). Датчики P_1 и P_2 записывали исходную и отражённую от открытого конца волны. Расчётные результаты

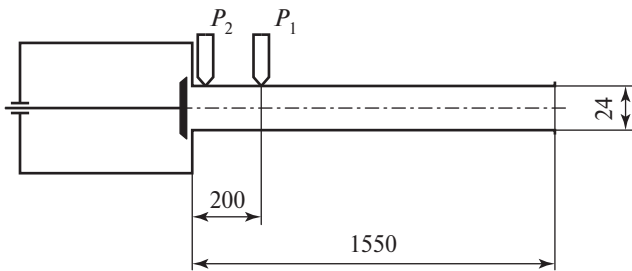


Рис. 2. Генератор импульсов.

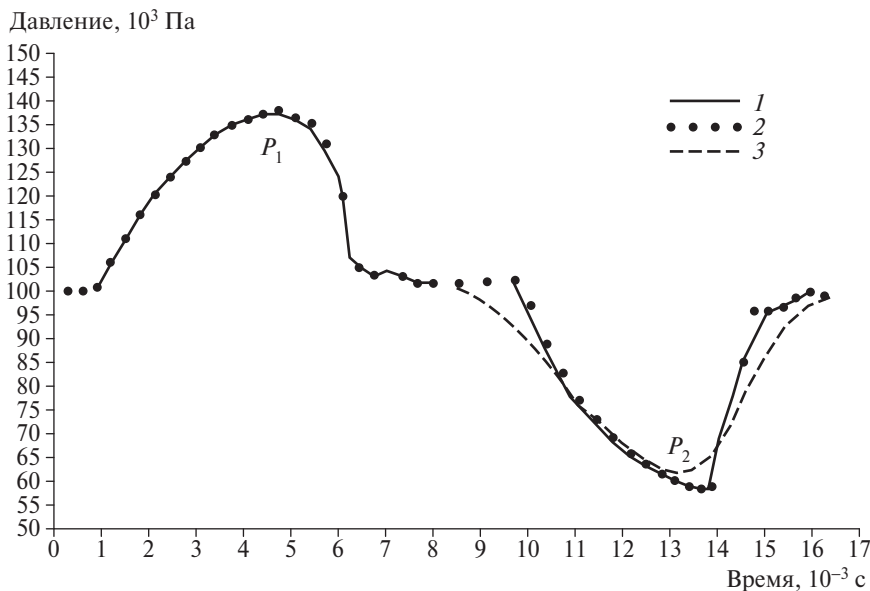


Рис. 3. Моделирование импульса: 1 — эксперимент, расчёты: 2 — методы характеристик с плавающей сеткой; 3 — метод распада разрыва.

даже при указанном небольшом числе ячеек хорошо согласуются с экспериментом и по форме, и амплитуде волн (рис. 3).

Были выполнены также сравнительные расчёты по известной схеме Массо [1, 2], которая базируется на системе дифференциальных уравнений, выражающих изменения инвариантов Римана $r^+ = \frac{2a}{\gamma - 1} + v$, $r^- = \frac{2a}{\gamma - 1} - v$ и удельной энтропии s вдоль характеристических линий C^+ , C^- и C^0 , задаваемых уравнениями

$$\frac{dx}{dt} = v + a, \quad \frac{dx}{dt} = v - a, \quad \frac{dx}{dt} = v.$$

Численная реализация схемы весьма трудоёмка, поскольку приходится проводить многократные сложные итерации по координатам и параметрам в каждом узле расчётной сетки, добиваясь одновременно пересечения в нём характеристик всех трёх семейств. В работе [6] представлена модификация метода, позволяющая выразить производные $\frac{\partial s}{\partial t}$ $\frac{\partial s}{\partial x}$ с помощью записи полной производной $d_l s = \frac{\partial s}{\partial t} d_l t + \frac{\partial s}{\partial x} d_l x$ по направлению l , соединяющему исходные узлы A и B расчётной ячейки. В результате после перехода к конечным разностям можно без итераций вести построение характеристик только C^+ - и C^- -семейств, но учитывать при этом

все особенности изменения газодинамических параметров, обусловленные трением и теплообменом.

Расчёты по схеме Массо [1, 2] и схеме из работы [6] также были выполнены с числом ячеек 25 по оси x . В обоих случаях формы отражённых от открытого конца трубы волн тоже полностью совпадали с экспериментальными.

Отметим, что благодаря отсутствию итераций во втором случае время вычислений сокращалось в 10–15 раз. Однако при хорошем согласовании с экспериментом по форме и фазе волн оба расчёта показали заметное нарушение законов сохранения. По массе и энергии ошибки достигали 4–6%, что для некоторых задач недопустимо.

Для сравнения на рис. 3 приведён также результат расчёта методом распада разрыва [4, 5, 12, 13] с тем же числом ячеек по оси x , который показал значительное искажение формы отражённого импульса, особенно его заднего фронта. По амплитуде ошибка составляла до 20%. С целью получения результата необходимой точности по форме импульса оказалось необходимым увеличивать число расчётных ячеек до 500 и более. При этом время вычислений увеличивается в 5–10 раз по сравнению с изложенной новой версией метода характеристик.

Таким образом, предложена новая полностью консервативная версия метода характеристик с плавающей сеткой, не требующая итераций на расчётном шаге и точно отражающая движение и конфигурацию волновых фронтов даже при построении грубой сетки. Результаты сравнительных расчётов, проведённых на базе известных и новой схем метода, показали преимущество последней, где обеспечивается выполнение законов сохранения при значительном сокращении времени счёта. Уменьшение продолжительности вычислений имеет важное значение при решении практических задач [10, 14, 15].

Указанное преимущество отмечается и по сравнению с методом распада разрыва, где для получения расчётной конфигурации волн, соответствующей реальной, требуется значительное увеличение густоты расчётной сетки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Жуков А.И. Применение метода характеристик к численному решению одномерных задач газовой динамики // Тр. Мат. ин-та им. Стеклова. 1960. В. 58. 149 с.
2. Березин А.С., Жидков И.П. Методы вычислений. М.: ГИФМЛ, 1962. Т. 2. 436 с.
3. Хоскин Н., Лембурн Б. Расчет общих одномерных нестационарных задач с помощью метода характеристик. В кн.: Численные методы в механике жидкостей. М.: Мир, 1973. С. 83–93.
4. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений. М.: Наука, 1978. 688 с.
5. Бабкин А.В., Колпаков В.И., Охитин В.Н., Селиванов В.В. Численные методы в задачах физики взрыва и удара. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000. 516 с.
6. Гришин Ю.А. Версия метода характеристик с плавающей сеткой // Мат. моделирование. 2003. Т. 15. № 8. С. 3–8.
7. Гришин Ю.А. Анализ динамического наддува и повышение экономичности дизелей // Изв. вузов. Машиностроение. 2011. № 10. С. 46–51.
8. Гришин Ю.А., Бакулин В.Н., Зенкин В.А. Численное моделирование продувки впускных окон двухтактного двигателя // Вестн. Моск. авиац. ин-та. 2013. Т. 20. № 1. С. 79–87.
9. Grishin Y. Unsteady Flow Pulses Interaction with a Turbine. 28th CIMAC Congress. Helsinki, June 6–10, 2016. Helsinki, 2016. № 308. P. 1–11.
10. Гришин Ю.А., Зенкин В.А., Хмелев Р.Н. Граничные условия для численного расчета газообмена в поршневых двигателях // Инж.-физ. журн. 2017. Т. 90. № 4. С. 1–6.
11. Алалыкян Г.Б., Годунов С.К., Киреева И.Л. Решение одномерных задач газовой динамики в подвижных сетках. М.: Наука, 1970. 112 с.
12. Гришин Ю.А., Бакулин В.Н., Зенкин В.А. Распад произвольного разрыва и газодинамические функции нестационарного течения. Материалы XX Юбилейной Междунар. конф. по вычислительной механике и современным прикладным программным системам. ВМСППС'2017. 24–31 мая 2017 г. Алушта. М.: Изд-во МАИ, 2017. С. 426–428.
13. Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я., Крайко А.Н., Прокопов Г.П. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976. 400 с.
14. Grishin Y.A., Zenkin V.A., Bakulin V.N. Implicit Schemes of Method of Large Particles in Problems of Calculating Gas Dynamics. 17th International Conf. on the methods of aerophysical research. June 30 – July 6 2014. Novosibirsk, 2014. P. 76–78.
15. Гришин Ю.А., Бакулин В.Н. Новые расчетные схемы на базе метода крупных частиц для моделирования газодинамических задач // ДАН. 2015. Т. 465. № 5. С. 545–548.

**THE CONSERVATIVE VERSION OF A METHOD
OF THE CHARACTERISTICS WITH A FLOATING GRID
IN PROBLEMS OF GAS DYNAMICS**

Yu. A. Grishin, V. N. Bakulin

Presented by Academician of the RAS M. Ya. Marov September 13, 2018

Received September 19, 2018

Test calculations of the motion and reflection of individual waves in a long tube have been performed applying newly developed and known schemes with a floating grid. Waves in the corresponding experiment were formed using a specially designed single-cycle generator. The version presented is shown to have a significant advantage in calculation time over the discontinuity decay method, in which the computational grid density must be increased significantly to obtain the desired correspondence with the real wave pattern.

Keywords: method of characteristics with a floating grid, conservative version, single-cycle generator.