

УДК 531

ОБ ОЦЕНКАХ СРЕДНЕЙ УГЛОВОЙ СКОРОСТИ ПРЕЦЕССИИ ВОЛЧКА ЛАГРАНЖА

Г. М. Розенблат

Представлено академиком РАН В.Ф. Журавлёвым 21.09.2018 г.

Поступило 21.09.2018 г.

Получены гарантированные оценки снизу и сверху приращения угла прецессии за период по углу нутации при невырожденных движениях волчка Лагранжа для произвольных значений начальных условий и параметров тела.

Ключевые слова: волчок Лагранжа, прецессия, оценки.

DOI: <https://doi.org/10.31857/S0869-56524852176-181>

ВВЕДЕНИЕ

Как известно, волчком Лагранжа называется тяжёлое твёрдое тело с закреплённой точкой O , центром тяжести в точке G , имеющее динамическую ось симметрии, проходящую через линию OG . Иными словами, эллипсоид инерции тела, построенный для неподвижной точки O , является эллипсоидом вращения, а центр тяжести G тела лежит на оси вращения этого эллипсоида.

Движение тела определяется при помощи трёх углов Эйлера θ, ψ, φ : θ — угол нутации (угол, образуемый динамической осью симметрии тела с восходящей вертикалью в неподвижной точке); ψ — угол прецессии (угол, образуемый подвижной плоскостью, проходящей через ось динамической симметрии тела и восходящую вертикаль в неподвижной точке, и начальным положением этой плоскости); φ — угол собственного вращения твёрдого тела вокруг оси динамической симметрии.

Как известно, любое невырожденное движение такого волчка (вырожденные асимптотические движения были указаны Клейном и Зоммерфельдом в [1]) представляет собой T -периодическое изменение угла нутации $\theta(t)$ в некоторых пределах $\theta_2 \leq \theta(t) \leq \theta_3$. Величины T, θ_2, θ_3 определяются начальными условиями задачи и значениями параметров тела, а сама функция $\theta(t)$ выражается через эллиптические функции.

Изменение угла прецессии $\psi(t)$ происходит таким образом, что его производная по времени $\dot{\psi}(t)$ является также T -периодической функцией времени и выражается через эллиптические интегралы 3-го рода. Поэтому для произвольного момента времени t , считая $\psi(0) = 0$, можно записать следующие равенства:

$$\begin{aligned}\psi(t) &= \int_0^t \dot{\psi}(s) ds = \int_0^{nT} \dot{\psi}(s) ds + \int_{nT}^t \dot{\psi}(s) ds = \\ &= \int_0^{nT} \dot{\psi}(s) ds + \int_0^{\tau} \dot{\psi}(s) ds = nT \hat{\psi} + \psi(\tau), \\ t &= nT + \tau, \tau \in [0, T), \\ \hat{\psi} &= \frac{1}{T} \int_0^T \dot{\psi}(s) ds = \frac{\psi(T) - \psi(0)}{T} = \frac{\Delta\psi}{T}.\end{aligned}$$

Согласно приведённым соотношениям представляет интерес задача определения приращения $\Delta\psi = \psi(T) - \psi(0)$ угла $\psi(t)$ за указанный период времени T изменения угла нутации $\theta(t)$. Это эквивалентно определению средней (за период времени T) угловой скорости прецессии волчка.

В данной работе для произвольных значений начальных условий и параметров тела получены гарантированные оценки снизу и сверху приращения $\Delta\psi$, выраженные через вещественные корни кубического уравнения, коэффициенты которого определяются параметрами волчка и начальными условиями задачи.

Отметим, что ранее такого рода задача об оценках решалась при исследовании эффекта Магнуса для симметричного гироскопа в подвесе Кардана. В работе [2] были получены гарантированные оценки снизу и сверху для средней угловой скорости пре-

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского
Российской Академии наук, Москва
Московский автомобильно-дорожный
государственный технический университет (МАДИ)
E-mail: gr51@mail.ru

цессии внешней рамки подвеса такого гироскопа. Более подробное обсуждение этой задачи содержится в книге [3, с. 51].

1. ОБОЗНАЧЕНИЯ И ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЗАДАЧИ

Пусть $O\xi\eta\zeta$ — подвижная жёстко связанная с телом правая система координат, оси которой направлены вдоль главных осей инерции тела. Ось $O\xi$ направлена по оси динамической симметрии тела, проходит через центр тяжести G и ориентирована так, что $OG = \zeta_0 > 0$. Обозначим A, A, C — главные моменты инерции тела относительно соответственно осей $O\xi, O\eta, O\zeta$. Пусть $Oxyz$ — неподвижная правая система координат, ось Oz которой направлена по вертикали вверх, M — масса тела, g — ускорение силы тяжести, θ, ψ, φ — углы Эйлера (см. введение), ω — вектор угловой скорости тела.

Имеют место следующие первые интегралы движения:

1) интеграл энергии

$$A(\omega_\xi^2 + \omega_\eta^2) + C\omega_\zeta^2 + 2Mg\zeta_0 \cos\theta = h = \text{const};$$

2) интеграл момента количества движения относительно оси Oz

$$A \sin\theta(\omega_\xi \sin\varphi + \omega_\eta \cos\varphi) + C\omega_\zeta \cos\theta = K = \text{const};$$

3) интеграл момента количества движения относительно оси $O\xi$

$$C\omega_\zeta = \text{const} \leftrightarrow \omega_\zeta = \text{const}.$$

Константы h, K, ω_ζ первых интегралов определяются начальными условиями задачи.

Вводим следующие параметры:

$$\alpha = (h - C\omega_\zeta^2)/A, \quad \beta = K/A, \quad a = 2Mg\zeta_0/A, \\ b = C/A, \quad u_4 = K/(C\omega_\zeta).$$

Отметим, что параметры a, b , определяемые формой и массовыми характеристиками твёрдого тела, должны удовлетворять условиям физической реализуемости $0 \leq a \leq a_0, 0 \leq b \leq 2$, где a_0 находится из условия Яхьи [4]. В данном случае это условие таково:

$$a_0 = g\sqrt{2M(2-b)/A}.$$

Из приведённых интегралов и кинематических уравнений Эйлера получим следующие дифференциальные соотношения для трёх углов Эйлера θ, ψ, φ :

$$\dot{u}^2 = af(u), \quad \dot{\psi} = b\omega_\zeta \frac{u_4 - u}{1 - u^2}, \quad \dot{\varphi} = \omega_\zeta - u\dot{\psi}, \\ af(u) = (\alpha - au)(1 - u^2) - b^2\omega_\zeta^2(u_4 - u)^2, \quad (1)$$

$$u = \cos\theta \in (-1, 1).$$

Пусть $u_0 = \cos\theta_0, \theta_0 = \theta(0) \in (0, \pi)$ — начальное условие задачи. Тогда кубический полином $f(u)$ в правой части первого уравнения системы (1) обладает свойствами: $f(\pm 1) < 0, f(u_0) > 0, f(+\infty) > 0$ и уравнение $f(u) = 0$ имеет вещественные корни u_1, u_2, u_3 , которые удовлетворяют неравенствам

$$-1 < u_3 \leq u_0 \leq u_2 < 1 < u_1 < +\infty, \\ f(u) > 0 \text{ при } u \in (u_3, u_2), u \in (u_1, +\infty). \quad (2)$$

Из первого уравнения (1) и неравенств (2) следует, что функция $\theta(t) = \arccos u(t)$ изменяется периодическим образом в пределах от $\theta_3 = \arccos u_3$ до $\theta_2 = \arccos u_2$ и находится путём интегрирования дифференциального уравнения первого порядка вида

$$\frac{du}{\sqrt{a(u_1 - u)(u_2 - u)(u - u_3)}} = \pm dt, \quad u \in [u_3, u_2]. \quad (3)$$

В уравнении (3) знак “+” соответствует проходу функции $u(t)$ от меньшего значения u_3 до большего значения u_2 , а знак “−” соответствует обратному проходу функции $u(t)$ от значения u_2 до значения u_3 . Ясно, что по времени эти проходы равны между собой, а полный период функций $u(t)$ и $\theta(t)$ таков:

$$T = 2 \int_{u_3}^{u_2} \frac{du}{\sqrt{a(u_1 - u)(u_2 - u)(u - u_3)}}. \quad (4)$$

Решая уравнение (3) и подставляя результат во второе и третье уравнения системы (1), найдём законы изменения функций $\psi(t), \varphi(t)$.

2. ПОСТАНОВКА И ОБСУЖДЕНИЕ ЗАДАЧИ

В работе рассматривается задача об оценках снизу и сверху приращения $\Delta\psi$ угла прецессии $\psi(t)$ на интервале времени, равном периоду T из формулы (4), т.е. на интервале времени, соответствующем одному полному колебанию угла нутации $\theta(t)$ волчка. Согласно второму уравнению системы (1) эта величина определяется из следующего соотношения:

$$\Delta\psi = b\omega_\zeta \int_0^T \frac{u_4 - u(t)}{1 - u^2(t)} dt. \quad (5)$$

Соотношение (5) можно переписать в следующем виде:

$$\Delta\psi = \frac{b\omega_\zeta}{2} \left[(1 + u_4) \int_0^T \frac{dt}{1 + u(t)} - (1 - u_4) \int_0^T \frac{dt}{1 - u(t)} \right]. \quad (6)$$

Отметим, что ранее функция $\psi(t)$ находилась при помощи квадратур из второго уравнения системы (1) и выражалась через эллиптические интегралы 3-го рода [5, 6]. Соответственно, для получения конкретных оценок приращения этой функции за какой-либо промежуток времени требовались дополнительные исследования эллиптических интегралов. В частности, используя эти формулы, сложно аналитически определить знак рассматриваемой величины $\Delta\psi$ в зависимости от начальных условий.

Адамаром (см. [7]) было дано краткое доказательство того факта, что знак $\Delta\psi$ совпадает со знаком ω_ζ . Для этого были использованы методы контурного интегрирования из теории функций комплексного переменного (теорема Коши и теория вычетов). Более подробно результат Адамара был изложен в известной книге [8]. Качественное объяснение этого факта, использующее теорему об изменении кинетического момента, излагалось, например, в книгах [9, 10].

Полученные в данной работе оценки позволяют, в частности, несложно обосновать результат Адамара о совпадении знака $\Delta\psi$ со знаком ω_ζ в некоторых случаях. Кроме того, в настоящей работе показано, что существуют и такие случаи, когда имеет место противоположный факт, т.е. знак $\Delta\psi$ не совпадает со знаком ω_ζ .

3. ФОРМУЛИРОВКА И ОБОСНОВАНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Для интегралов из (6), используя соотношение (3), получим

$$I_1 = \int_0^T \frac{dt}{1+u(t)} = \int_0^{T/2} \frac{dt}{1+u(t)} + \int_{T/2}^T \frac{dt}{1+u(t)} =$$

$$= 2 \int_{u_3}^{u_2} \frac{du}{(1+u)\sqrt{af(u)}}, \quad (7)$$

$$I_2 = \int_0^T \frac{dt}{1-u(t)} = \int_0^{T/2} \frac{dt}{1-u(t)} + \int_{T/2}^T \frac{dt}{1-u(t)} =$$

$$= 2 \int_{u_3}^{u_2} \frac{du}{(1-u)\sqrt{af(u)}}. \quad (8)$$

В (7) и (8) функция $f(u)$ дается формулой

$$f(u) = (u_1 - u)(u_2 - u)(u - u_3), \quad u \in [u_3, u_2], \quad (9)$$

где u_1, u_2, u_3 — произвольные вещественные числа, удовлетворяющие неравенствам (2).

Делаем в интегралах из (7) и (8) замену переменной $u \rightarrow \gamma$:

$$u = 0,5(u_2 + u_3) + 0,5(u_2 - u_3)\sin \gamma, \\ \gamma \in [-0,5\pi, 0,5\pi]. \quad (10)$$

Тогда, используя (9), получим

$$I_1 = \frac{2}{\sqrt{a}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\gamma}{(1+u)\sqrt{u_1 - u}}, \\ I_2 = \frac{2}{\sqrt{a}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\gamma}{(1-u)\sqrt{u_1 - u}}. \quad (11)$$

В (11) функция $u = u(\gamma)$ дается выражением из (10). Таким образом, (6) принимает следующий вид:

$$\Delta\psi = \alpha_0 \left[(1+u_4) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\gamma}{(1+u)\sqrt{u_1 - u}} - \right. \\ \left. - (1-u_4) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\gamma}{(1-u)\sqrt{u_1 - u}} \right], \quad \alpha_0 = \frac{b\omega_\zeta}{\sqrt{a}}. \quad (12)$$

В (12) функция $u = u(\gamma)$ также дается выражением из (10). При $\gamma \in [-0,5\pi, 0,5\pi]$ из (10) имеем $u_3 \leq u(\gamma) \leq u_2$. В (12) необходимо заменить параметр $u_4 = K/(C\omega_\zeta)$ функцией от величин u_1, u_2, u_3 , которую находим из следующего соотношения (см. [8]):

$$\left(\frac{1-u_4}{1+u_4} \right)^2 = \mu, \quad \mu = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3, \\ \lambda_1 = \frac{u_1 - 1}{u_1 + 1} > 0, \quad \lambda_2 = \frac{1 - u_2}{1 + u_2} > 0, \\ \lambda_3 = \frac{1 - u_3}{1 + u_3} > 0. \quad (13)$$

Из уравнения (13) находим два возможных значения u_4

$$u_{41} = (1 - \sqrt{\mu})/(1 + \sqrt{\mu}), \quad u_{42} = 1/u_{41}. \quad (14)$$

Далее несложно показать, что при любых u_1, u_2, u_3 , удовлетворяющих неравенствам (2), выполнены включения:

$$\text{если } u_2 + u_3 > 0, \text{ то } \lambda_0 = \lambda_2 \lambda_3 \in (0, 1), \\ u_{41} \in (u_5, 1); \quad u_{42} \in (1, 1/u_5), \quad u_1 \in (1, +\infty); \\ \text{если } u_2 + u_3 < 0, \text{ то } \lambda_0 = \lambda_2 \lambda_3 \in (1, +\infty), \\ u_{41} \in (u_5, 1), \quad u_1 \in (1, +\infty); \quad u_{42} \in (1, +\infty), \\ u_1 \in (1, u_6); \quad u_{42} \in (1/u_5, -1), \quad u_1 \in (u_6, +\infty); \\ u_5 = (1 - \sqrt{\lambda_0})/(1 + \sqrt{\lambda_0}) \in (u_3, u_2); \\ u_6 = (\lambda_0 + 1)/(\lambda_0 - 1). \quad (15)$$

Соотношение (13) получается из условия тождественности кубических многочленов

$$(\alpha - au)(1 - u^2) - b^2\omega_\zeta^2(u_4 - u)^2 = \\ = a(u - u_1)(u - u_2)(u - u_3) = af(u),$$

где надо приравнять коэффициенты при одинаковых степенях u . Подробности изложены в книге [8] и здесь опускаются.

Соотношения (12)–(15) с учётом замены (10) являются основными для получения оценок сверху и снизу величины $\Delta\psi$. Ясно, что эти оценки существенно зависят от значений параметра u_4 . Поэтому сформулируем лемму, определяющую все возможные значения параметра u_4 через значения корней u_1, u_2, u_3 .

Л е м м а. Для произвольных значений корней u_1, u_2, u_3 , удовлетворяющих неравенствам (2), возможные значения параметра u_4 , определяемого из (13), могут находиться в следующих четырёх областях:

- 1) $u_4 = u_{41} \in (u_5, 1), u_1 \in (1, +\infty)$;
- 2) $u_4 = u_{42} \in (1, 1/u_5), u_2 + u_3 > 0, u_1 \in (1, +\infty)$;
- 3) $u_4 = u_{42} \in (1, +\infty), u_2 + u_3 < 0, u_1 \in (1, u_6)$;
- 4) $u_4 = u_{42} \in (-\infty, 1/u_5), u_2 + u_3 < 0, u_1 \in (u_6, +\infty)$.

Здесь u_{41}, u_{42}, u_5, u_6 определены в (13)–(15), причём $u_5 \in (u_3, u_2)$.

Доказательство леммы осуществляется непосредственной проверкой.

З а м е ч а н и е 1. В области 1) параметр u_4 удовлетворяет неравенствам $-1 < u_3 < u_5 < u_4 < 1$, в областях 2) и 3) — неравенству $u_4 > 1$, а в области 4) — неравенствам $-\infty < u_4 < 1/u_5 < -1$. Отсюда, в частности, следует, что $u_4 \neq u_3$.

З а м е ч а н и е 2. Из приведённой леммы следует, что параметр u_4 не может находиться в следующих интервалах:

- 1) $u_4 \notin (-\infty, 1/u_5), u_4 \notin (-1, u_5) (\lambda_0 > 1)$;
- 2) $u_4 \notin (-\infty, u_5), u_4 \notin (1/u_5, +\infty) (\lambda_0 < 1)$.

Теперь сформулируем и докажем теорему об оценках снизу и сверху для величины $\Delta\psi$ из (12). Сначала вычислим интегралы

$$S_1 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\gamma}{1+u(\gamma)}, \quad S_2 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\gamma}{1-u(\gamma)}, \quad (16)$$

где $u(\gamma)$ даётся формулой (10). Для этого воспользуемся неопределённым табличным интегралом

$$\int \frac{d\gamma}{m - n \sin \gamma} = \frac{2}{m\sqrt{1-\lambda^2}} \operatorname{arctg} \left[\frac{\operatorname{tg}(0,5\gamma) - \lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}} \right],$$

$$\lambda = \frac{n}{m}, \quad |\lambda| < 1. \quad (17)$$

Тогда для интегралов из (16), используя (17), получим выражения

$$S_1 = \frac{\pi}{\sqrt{(1+u_2)(1+u_3)}}, \quad S_2 = \frac{\pi}{\sqrt{(1-u_2)(1-u_3)}}. \quad (18)$$

Справедлива следующая теорема об оценках величины $\Delta\psi$.

Т е о р е м а.

1. В области 1) имеют место оценки

$$\alpha_0 \left(S_1 \frac{1+u_{41}}{\sqrt{u_1-u_3}} - S_2 \frac{1-u_{41}}{\sqrt{u_1-u_2}} \right) < \Delta\psi < \alpha_0 \left(S_1 \frac{1+u_{41}}{\sqrt{u_1-u_2}} - S_2 \frac{1-u_{41}}{\sqrt{u_1-u_3}} \right). \quad (19)$$

2. В областях 2) и 3) имеют место оценки

$$\alpha_0 \frac{1}{\sqrt{u_1-u_3}} [(1+u_{42})S_1 + (-1+u_{42})S_2] < \Delta\psi < \alpha_0 \frac{1}{\sqrt{u_1-u_2}} [(1+u_{42})S_1 + (-1+u_{42})S_2]. \quad (20)$$

3. В области 4) имеют место оценки

$$-\frac{\alpha_0}{\sqrt{u_1-u_2}} [(-1-u_{42})S_1 + (1-u_{42})S_2] < \Delta\psi < -\frac{\alpha_0}{\sqrt{u_1-u_3}} [(-1-u_{42})S_1 + (1-u_{42})S_2]. \quad (21)$$

В формулах (19)–(21) параметр α_0 определён вторым из равенств (12), величины S_1, S_2 — из (18), u_{41}, u_{42} — из (13), (14).

Доказательство теоремы следует непосредственно из формул (12)–(16), (18) и очевидных неравенств

$$\frac{1}{\sqrt{u_1-u_3}} \leq \frac{1}{\sqrt{u_1-u}} \leq \frac{1}{\sqrt{u_1-u_2}} \quad \text{при } u_3 \leq u \leq u_2 < 1 < u_1.$$

С л е д с т в и е 1. Для п. 1 теоремы выпишем более подробные формулы оценок, используя соотношения (13)–(15) для параметра u_4 и формулы (18) для интегралов S_1, S_2 . Приведём окончательные результаты, опуская промежуточные алгебраические выкладки:

$$\Delta\psi > 2\pi\alpha_0 \frac{\sqrt{(u_1+1)(u_1-u_2)} - \sqrt{(u_1-1)(u_1-u_3)}}{\sqrt{(u_1-u_2)(u_1-u_3)} \left[\sqrt{(u_1+1)(1+u_2)(1+u_3)} + \sqrt{(u_1-1)(1-u_2)(1-u_3)} \right]}, \quad (22)$$

$$\Delta\psi < 2\pi\alpha_0 \frac{\sqrt{(u_1+1)(u_1-u_3)} - \sqrt{(u_1-1)(u_1-u_2)}}{\sqrt{(u_1-u_2)(u_1-u_3)} \left[\sqrt{(u_1+1)(1+u_2)(1+u_3)} + \sqrt{(u_1-1)(1-u_2)(1-u_3)} \right]}. \quad (23)$$

В (22) и (23) параметр α_0 определён вторым из равенств (12), т.е. знак α_0 определяется знаком ω_ζ . Тогда, используя неравенства

$$0 < \sqrt{(u_1+1)(u_1-u_2)} - \sqrt{(u_1-1)(u_1-u_3)} < \sqrt{(u_1+1)(u_1-u_3)} - \sqrt{(u_1-1)(u_1-u_2)},$$

из (22) и (23) получаем результат Адамара [7]: знак приращения угла прецессии за период совпадает со знаком ω_ζ (см. также книгу [8, с. 223]).

Аналогичные выражения могут быть выписаны для п. 2, п. 3 теоремы.

Следствие 2. В п. 3 теоремы знак приращения угла прецессии за период не совпадает со знаком ω_ζ . Действительно, из (21) и неравенства $u_4 = u_{42} < -1$, справедливого для этого пункта, следует, что квадратные скобки в неравенствах (21) положительны, а это означает противоположность знаков $\Delta\psi$ и ω_ζ .

Неравенство $u_4 = K/(C\omega_\zeta) < -1$ для п. 3 теоремы может быть соблюдено при любом ω_ζ за счёт выбора соответствующего K (константа интеграла кинетического момента тела относительно вертикальной оси Oz). Таким образом, установлено, что в некоторых случаях приращение угла прецессии за период может иметь знак и противоположный знаку ω_ζ за счёт выбора соответствующих начальных условий для других компонент вектора ω , т.е. величин $\omega_\zeta(0)$, $\omega_\eta(0)$. Подробно это обосновано в Приложении.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе для произвольных невырожденных движений волчка Лагранжа получены следующие результаты.

Даны простые формулы для гарантированных оценок снизу и сверху средней угловой скорости прецессии, не использующие эллиптические функции и методы теории функций комплексного переменного. Эти оценки выражены через вещественные корни кубического уравнения, коэффициенты которого определяются параметрами волчка и начальными условиями задачи.

Из полученных оценок следует известный результат Адамара о совпадении (в некоторых случаях) знаков средней угловой скорости прецессии и проекции угловой скорости волчка на ось динамической симметрии.

Указаны случаи, когда совпадение знаков средней угловой скорости прецессии и проекции угловой

скорости волчка на ось динамической симметрии не имеет места.

Приложение. Найдём такие начальные условия волчка Лагранжа, при которых проекция его угловой скорости на ось динамической симметрии положительна $\omega_\zeta > 0$, а угловая скорость его прецессии отрицательна $\dot{\psi}(t) < 0$. Это, как показывает соотношение $\dot{\psi} = b\omega_\zeta(u_4 - u)/(1 - u^2)$, заведомо выполнено, если $u_4 = \beta/(b\omega_\zeta) = K/(C\omega_\zeta) < -1$.

Зададимся некоторыми числами u_1, u_2, u_3 , удовлетворяющими неравенствам

$$-1 < u_3 \leq u_0 \leq u_2 < 1 < u_1 < +\infty, \quad u_2 + u_3 < 0. \quad (24)$$

В (24) $u_0 = \cos\theta_0$ — начальное условие задачи. Для того чтобы эти три числа являлись вещественными корнями кубического уравнения $f(u) = 0$, где $f(u)$ определено четвёртым из равенств (1), необходимо и достаточно выполнения следующих трёх соотношений:

$$\begin{aligned} a(u_1 + u_2 + u_3) &= \alpha + k, \\ a(u_1u_2 + u_1u_3 + u_2u_3) &= 2u_4k - a, \\ au_1u_2u_3 &= -\alpha + ku_4^2, \quad k = b^2\omega_\zeta^2 > 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Далее полагаем $u_0 = u_2 = 0 \rightarrow \cos\theta_0 = 0 \rightarrow \theta_0 = \pi/2$. Напомним обозначения в данном случае:

$$\begin{aligned} a &= 2Mg\zeta_0/A \quad (\zeta_0 > 0), \quad b = C/A, \\ \beta &= K/A = \dot{\psi}\sin^2\theta + b\omega_\zeta\cos\theta = \dot{\psi}(0), \\ u_4 &= \beta/(b\omega_\zeta) = \dot{\psi}(0)/(b\omega_\zeta), \\ \omega_\zeta &= \dot{\psi}(0)\cos\theta_0 + \dot{\phi}(0) = \dot{\phi}(0) > 0, \\ \alpha &= (h - C\omega_\zeta^2)/A = \omega_\xi^2(0) + \omega_\eta^2(0) + a\cos\theta_0 = \\ &= \dot{\psi}^2(0) + \dot{\theta}^2(0). \end{aligned} \quad (26)$$

Тогда система (25) примет следующий вид:

$$\begin{aligned} a(u_1 + u_3) &= \dot{\psi}^2(0) + \dot{\theta}^2(0) + k, \\ au_1u_3 &= 2u_4k - a, \\ 0 &= -[\dot{\psi}^2(0) + \dot{\theta}^2(0)] + ku_4^2, \\ k &= b^2\omega_\zeta^2 = b^2\dot{\phi}^2(0) > 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Из третьего уравнения системы (27) получим

$$\dot{\psi}^2(0) + \dot{\theta}^2(0) = ku_4^2. \quad (28)$$

Подставляя (28) в первое уравнение системы (27), получим систему двух уравнений

$$a(u_1 + u_3) = ku_4^2 + k, \quad au_1u_3 = 2u_4k - a. \quad (29)$$

Нам надо решить систему (29) относительно двух неизвестных u_4 , k , причём должны удовлетворяться следующие условия:

$$-\infty < u_4 < -1, \quad k > 0, \quad -1 < u_3 < 0, \quad 1 < u_1 < +\infty. \quad (30)$$

Исключая в (29) k , получим квадратное уравнение

$$u_4^2 - 2u_4\sigma + 1 = 0, \quad \sigma = (u_1 + u_3)/(1 + u_1u_3). \quad (31)$$

Решения уравнения (31) таковы:

$$u_{42} = \frac{u_1 + u_3 + \sqrt{(u_1^2 - 1)(1 - u_3^2)}}{1 + u_1u_3}, \quad u_{41} = \frac{1}{u_{42}}. \quad (32)$$

Будем выбирать параметры u_1 , u_3 так, что $u_1 > -1/u_3 > 1$, $u_3 \in (-1, 0)$. Отсюда следует $1 + u_1u_3 < 0$. Тогда несложно установить, что корень u_{42} , даваемый первым из равенств (32), удовлетворяет неравенству $u_{42} < -1$. Далее из первого уравнения системы (29) находим k по формуле

$$k = a(u_1 + u_3)/(1 + u_{42}^2) > 0. \quad (33)$$

Из последнего уравнения системы (27) находим $\dot{\phi}(0)$ по формуле

$$\dot{\phi}(0) = \sqrt{k}/b > 0, \quad (34)$$

где k даётся формулой (33). Далее из 4-го соотношения системы обозначений (26), используя (34), находим

$$\dot{\psi}(0) = u_{42}b\omega_\zeta = u_{42}b\dot{\phi}(0) = u_{42}\sqrt{k} < 0. \quad (35)$$

Подставляя формулу (35) в соотношение (28), получим $\dot{\theta}(0) = 0$.

Таким образом, мы нашли начальные условия для волчка Лагранжа, при которых проекция угловой скорости на ось его динамической симметрии положительна $\omega_\zeta = \dot{\phi}(0) > 0$, а угловая скорость прецессии отрицательна в силу неравенства

$$\dot{\psi} = b\omega_\zeta(u_{42} - u)/(1 - u^2) < 0,$$

которое заведомо выполнено при $u_{42} < -1$, $u \in (-1, 1)$, $\omega_\zeta > 0$.

Аналогично производится выбор нужных начальных условий в случае, когда $u_2 \neq 0$ и (или) $u_0 \neq 0$, но только должны быть выполнены неравенства (24).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Klein F., Sommerfeld A. Über die Theorie des Kreisel. N.Y.: Johnson, 1965. 966 S.
2. Журавлев В.Ф. К вопросу об оценках эффекта Магнуса // ДАН. 1976. Т. 226. № 3. С. 541–543.
3. Журавлев В.Ф., Розенблат Г.М. Парадоксы, контр-примеры и ошибки в механике. Вступ. сл. Д.М. Климова. М.: Ленанд, 2017. 240 с.
4. Yehia H.M. On the Relation Between the First and Second Moments of Distributions // J. Phys. A. Math. and General. 2002. V. 35. № 30. P. 6505–8.
5. Giovanni Mingari Scarpello, Daniele Ritelli. Motions about a Fixed Point by Hypergeometric Functions: New Non-Complex Analytical Solutions and Integration of the Herpolhode // Celest. Mech. Dyn. Astr. 2018. V. 130. P. 42. <https://doi.org/10.1007/s10569-018-9837-5>
6. Архангельский Ю.А. Аналитическая динамика твердого тела. М.: Наука, 1977. 328 с.
7. Hadamard J. Sur la Precession dans le Movement D'un Corps Pesant de Revolution Fixe Par un Point de Son Axe // Bull. Sci. Math. 1895. V. 19. P. 228–230.
8. Мак-Миллан В.Д. Динамика твердого тела. М.; Л.: Изд-во иностр. лит., 1951. 468 с.
9. Голубев Ю.Ф. Основы теоретической механики: Учебник. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Изд-во МГУ, 2000. 719 с.
10. Валле Пуссен Ш.Ж. Лекции по теоретической механике. М.: Изд-во иностр. лит., 1949. Т. 2. 327 с.

ESTIMATES OF THE AVERAGE ANGULAR VELOCITY OF THE PRECESSION OF LAGRANGE'S TOP

G. M. Rozenblat

Presented by Academician of the RAS V.F. Zhuravlev September 21, 2018

Received September 21, 2018

Guaranteed upper and lower estimates of the increment in the precession angle per nutation angle period under nondegenerate motions of a Lagrange top have been obtained in the article.

Keywords: Lagrange top, precession, estimates.