ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2019, том 486, № 2, с. 143–146

МАТЕМАТИКА

УДК 518.61

О ВЫЧИСЛЕНИИ С ВЫСОКОЙ ТОЧНОСТЬЮ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА В ЭЛЛИПСЕ (С КРАЕВЫМ УСЛОВИЕМ НЕЙМАНА)

С. Д. Алгазин

Представлено академиком РАН В.П. Масловым 20.11.2018 г.

Поступило 10.12.2018 г.

Методом вычислительного эксперимента исследуется задача о колебаниях эллиптической мембраны с краевым условием Неймана. Показано, что на сетке 40×61 можно определить до 50 собственных значений с несколькими верными значащими цифрами для эксцентриситета $e = 0{,}99999$.

Ключевые слова: уравнение Лапласа, свободные колебания мембраны, вычислительный эксперимент.

DOI: https://doi.org/10.31857/S0869-56524862143-146

ВВЕДЕНИЕ

В [1] описана методика численного решения задачи на собственные значения для оператора Лапласа. Эти результаты основаны на идеях К.И. Бабенко [2]. Первую публикацию автора на эту тему см. в [3]. Программы опубликованы в [4]. По сравнению с этой методикой в круге выбирается другая сетка по r (узлы, по нулям многочлена Чебышева, выбираются не на диаметре, а на радиусе единичного круга, тем самым они сгущаются как к границе круга, так и к центру, где уравнение оператора Лапласа в круге имеет особую точку). Эта простая модификация методики позволила освободиться от ограничения на число узлов в старой методике [1]. Теперь число узлов лимитируется только ограничениями Фортрана на размер массивов (практически это массивы примерно $10^4 \times 10^4$). Кроме того, для задачи Неймана [5] применяется методика, основанная на вариационном принципе, что приводит к симметричной конечномерной проблеме собственных значений (в старой методике матрица конечномерной задачи только близка к симметризуемой). Это большое преимущество, которое позволяет решить уравнение теплопроводности в гладкой двумерной области [6]. Высокоточные вычисления собственных значений оператора Лапласа задачи Дирихле рассмотрены в [7]. Настоящая работа посвящена численным экспериментам по вычислению собственных значений оператора Лапласа в эллипсе с краевым условием Неймана.

Задача о вычислении собственных частот эллиптической мембраны рассматривалась многими авторами. Обзор исследований на эту тему приведён в [8]. Отметим также работу [9]. Из работ российских авторов отметим работы [10–12]. Сравнение удалось провести только с работой [10].

ДИСКРЕТИЗАЦИЯ ПО ПРОСТРАНСТВЕННЫМ ПЕРЕМЕННЫМ

Положим $a = 1$, $b = (1 - e^2)^{1/2}$, где $0 \le e \le 1$ — эксцентриситет; это достигается нормировкой x, y на a и переобозначением $\lambda a^2 \to \lambda$. Представим исследуемую задачу в виде вариационной изопериметрической задачи с краевыми условиями Неймана [11, 13]

$$J[U] = \iint\limits_E \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2\right] dxdy,\ \left.\frac{\partial U}{\partial n}\right|_{\partial E} = 0,$$

$$I[U] = \iint\limits_E U^2 dxdy = 1, \tag{1}$$

$$(x, y) \in E = \left\{x, y\colon x^2 + \frac{y^2}{1 - e^2} \le 1\right\}.$$

Института проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской Академии наук, Москва

**E-mail: algazinsd@mail.ru*

Введём криволинейную ортогональную эллиптическую систему координат ξ, φ [13] и представим элементы длин дуг $dl_{\xi,\varphi}$ координатных линий, элемент площади dS и якобиан перехода $\sigma^2\delta$ в этих координатах

$$
\begin{gathered}
x+iy=\sigma ch(\xi+i\varphi),\\
i=\sqrt{-1},\ 0\le\xi\le\infty,\quad 0\le\varphi<2\pi,\\
x=\sigma\mathrm{ch}\xi\cos\varphi,\quad x=\sigma\mathrm{sh}\xi\sin\varphi,\\
dl_\xi=\sigma\sqrt{\delta}d\xi,\ dl_\varphi=\sigma\sqrt{\delta}d\varphi,\\
dS=dl_\xi dl_\varphi=\sigma^2\delta d\xi d\varphi\ (dS=dx\,dy),\\
\delta=\mathrm{ch}^2\xi-\cos^2\varphi\ge 0.
\end{gathered}\tag{2}
$$

Здесь $\sigma>0$ — постоянная, определяемая эксцентриситетом эллипса. Пределы изменения переменных ξ, φ и параметр δ для фиксированного значения e равны ($a=1$)

$$0\le\xi\le\xi_0=\mathrm{arch}\,e^{-1},\ 0\le\varphi<2\pi,\ \sigma=e.\tag{3}$$

Соотношения (3) определяют область E в эллиптических координатах ξ, φ; её границе ∂E отвечает $\xi=\xi_0$. С помощью выражений (2), (3) осуществляется переход к эллиптическим координатам ξ, φ в квадратуре (1). Вводя множитель Лагранжа λ, получим модифицированный функционал: условие периодичности функции U по φ и краевое условие Неймана в виде

$$
\begin{gathered}
J^*[U]=\iint\limits_E\left[\left(\frac{\partial U}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial\varphi}\right)^2-\right.\\
\left.-\lambda\frac{e^2}{2}(\mathrm{ch}^2\xi-\cos^2\varphi)U^2\right]d\xi d\varphi\to\min_U,\\
U=U(\xi,\varphi)\equiv U(\xi,\varphi+2\pi),\ \left.\frac{\partial U}{\partial\xi}\right|_{\xi=\xi_0}=0.
\end{gathered}\tag{4}
$$

Соответствующее безусловному экстремуму функционала (4) уравнение Эйлера–Лагранжа представим в виде краевой задачи в эллиптических координатах

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial^2U}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2U}{\partial\varphi^2}+\mu(\mathrm{ch}^2\xi-\cos^2\varphi)U=0,\ \left.\frac{\partial U}{\partial\xi}\right|_{\xi=\xi_0}=0,\\
\mu=\frac{\lambda e^2}{2},\ U(\xi,\varphi+2\pi)=U(\xi,\varphi).
\end{gathered}\tag{5}
$$

Итак, при поиске минимума функционала (4) не нужно заранее удовлетворять краевому условию Неймана, т.е. это краевое условие естественное. Для дискретизации функционала (4) применим квадратурную формулу:

$$
\begin{gathered}
\int\limits_{|\varsigma|\le1}f(\varsigma)d\sigma=\sum_{\nu,l}c_{\nu l}f_{\nu l},\ f_{\nu l}=f(r_\nu e^{i\theta_l}),\\
r_\nu=0,5+0,5\cos\frac{(2\nu-1)\pi}{2m},\ \nu=1,\ 2,\ \dots,\ m;\ \ \theta_l=\frac{2\pi l}{N},\\
l=0,\ 1,\ \dots,\ 2n;\ \ N=2n+1.
\end{gathered}\tag{6}
$$

Эта квадратурная формула получается, если заменить подынтегральную функцию интерполяционной формулой для функции двух переменных в круге:

$$\left(P_Mf\right)(r,\ \theta)=\sum_{i=0}^{2n}\sum_{\nu=1}^{m}f_{\nu l}L_{\nu l}\left(r,\theta\right),\ f_{\nu l}=f\left(r_\nu,\theta_i\right),\tag{7}$$

$$
\begin{gathered}
L_{\nu l}(r,\theta)=\frac{T_m(2r-1)}{NT_m(2r_\nu-1)(r-r_\nu)}D_n(\theta-\theta_l),\\
D_n(\theta)=0,5+\sum_{k=1}^{n}\cos k\theta,\quad T_m(x)=\cos(m\arccos x).
\end{gathered}
$$

В самом деле, заменяя подынтегральную функцию выражением (7), получим квадратурную формулу (6), где $d\sigma$ — элемент площади, $c_{\nu l}$ — весовые коэффициенты, а $\delta(f)$ — погрешность. Для $c_{\nu l}$ имеем $c_{\nu l}=\int\limits_D L_{\nu l}(r,\theta)d\sigma$, и они не зависят от l. Введём в рассмотрение блочно-диагональную матрицу $C=\mathrm{diag}(c_1,c_2,\dots,c_m)$, где c_ν, $\nu=1,2,\dots,m$, — диагональные матрицы размера $N\times N$ с одинаковыми числами на диагонали. Заметим, что все $c_{\nu l}$ положительны при достаточно большом числе узлов интерполяции.

Для коэффициентов квадратурной формулы (6) имеем выражение

$$
\begin{gathered}
c_{\nu l}=\frac{2\pi}{N}\left\{\frac{(-1)^{m+1}-1}{(m^2-1)m(-1)^{\nu-1}}\sin\theta_\nu+\frac{r_\nu}{m}\left(1+2\sum_{l=2(2)}^{m-1}\frac{\cos l\theta_\nu}{1-l^2}\right)\right\},\\
r_\nu=\frac{1+\cos\theta_\nu}{2},\ \theta_\nu=\frac{(2\nu-1)\pi}{2m},\\
\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)_{\varsigma=\varsigma_{\nu l}}=\sum_{\mu=1}^{m}D_{\nu\mu}^{(r)}w_{\mu l};\ \left(\frac{\partial w}{\partial\theta}\right)_{\varsigma=\varsigma_{\nu l}}=\sum_{p=1}^{N}B_{lp}w_{\nu p}.
\end{gathered}
$$

Матрицы B и $D^{(r)}$ получаются дифференцированием изменённой интерполяционной формулы (7).

Таблица 1

40 × 61		60 × 81	
1	$-0{,}19730760166 \cdot 10^{-3}$	1	$-0{,}63950200494 \cdot 10^{-2}$
2	0,18136304093	2	0,18136268516
3	0,28301300692	3	0,26091275040
4	0,87634588533	4	0,87634574240
5	0,96774058819	5	0,94843101097
6	2,0357952676	6	2,0357942789
7	2,0943320065	7	2,0423475505
8	3,6481510185	8	3,6398173552
9	3,6812290133	9	3,6481506096
10	5,7127048925	10	5,6821868152
20	22,861607867	20	22,823462577
30	51,429126807	30	51,387599175
40	91,421464484	40	91,385808466
50	142,68805244	50	142,78668844

По r применяется интерполяционная формула, удовлетворяющая при $r = 1$ краевому условию Неймана[1]:

$$P_m(x;f)=\sum_{j=1}^{m}\left[\frac{T_m(x)}{m\dfrac{(-1)^{j-1}}{\sin\theta_j}(x-x_j)}-A_jT_m(x)\right]f_j,$$

$$x_j=\cos\theta_j;\quad \theta_j=\frac{(2j-1)\pi}{2m},\quad j=1,2,\ldots,m;$$

$$x=2r-1;$$

A_j выберем так, чтобы удовлетворялось краевое условие $f'(1)=0$.

Используя квадратурную формулу (3) функционал (4) преобразуем в квадратичную форму:

$$J^*[w]=\sum_{\nu,l}c_{\nu l}\left[\left(\frac{\partial w}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial\varphi}\right)^2-\right.$$
$$\left.-\lambda\frac{e^2}{2}(\operatorname{ch}^2\xi-\cos^2\varphi)w^2\right]_{\substack{\xi=\xi_\nu,\\ \varphi=\varphi_l}}. \tag{8}$$

Дифференцируя (8) по компонентам w, получим алгебраическую проблему собственных значений вида: $Aw = \lambda dw$, где A — симметричная матрица размера, равного числу узлов интерполяции в эллипсе, d — диагональная матрица того же размера, w — вектор перемещений в узлах сетки, λ — спектральный параметр.

Это и есть дискретный аналог задачи на собственные значения (5).

Оценка погрешности описанной дискретизации может быть получена по схеме, описанной в [1].

ВЫВОДЫ

В эллиптических координатах переменные в уравнении Лапласа для эллипса разделяются, и задача о вычислении собственных значений сводится к исследованию функций Матье (см., например [10]). Здесь реализован другой подход:

1) интеграл в вариационном принципе вычисляется по глобальной квадратурной формуле. После чего задача о минимуме квадратичного функционала сводится к задаче о минимуме квадратичной формы, что приводит к алгебраической проблеме собственных значений;

2) для решения алгебраической проблемы собственных значений имеются надёжные алгоритмы. Программная реализация на Фортране в пакете EISPACK.Тексты этих подпрограмм доступны в Интернет по адресу http://www.netlib.org/eispack/.

Результаты расчётов см. в табл. 1, e = 0,99999; 40×61 означает сетку из 40 окружностей по 61 точке через равные углы, 60×81 — аналогично.

[1] Интерполяционная формула, не удовлетворяющая краевым условиям, даёт плохую точность при вычислении собственных значений, хотя краевое условие Неймана естественное и удовлетворять ему не обязательно.

Источник финансирования. Работа выполнена по теме государственного задания № АААА-А17-117021310380-1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Алгазин С.Д.* Численные алгоритмы классической математической физики. М.: Диалог-МИФИ, 2010. 240 с.
2. *Бабенко К.И.* Основы численного анализа. М.: Наука, 1986. 744 с.; М.; Ижевск: РХД, 2002. 847 с.
3. *Алгазин С.Д.*, *Бабенко К.И.*, *Косоруков А.Л.* О численном решении задачи на собственные значения. Препр. ИПМ. М., 1975. № 108. 57 с.
4. *Алгазин С.Д.* Вычисление собственных чисел и собственных функций оператора Лапласа (Lap123). Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ № 2012617739. Зарегистрирована в Реестре программ для ЭВМ 27 августа 2012. 18 с.
5. *Алгазин С.Д.* Численное исследование однофазной фильтрации газа в пористой среде // ПМТФ. 2011. Т. 52. № 4. С. 136–146.
6. *Алгазин С.Д.* Численный алгоритм без насыщения для решения нестационарных задач // НАН Беларуси. Инж.-физ. журн. 2009. Т. 82. № 5. С. 950–960. ISSN 0021–0285.
7. *Алгазин С.Д.* О вычислении с высокой точностью собственных значений оператора Лапласа // ДАН. 2008. Т. 422. № 2. С. 151–154.
8. *Wilson H.B.*, *Scharstein R.W.* Computing Elliptic Membrane High Frequencies by Mathieu and Galerkin Methods // J. Eng. Math. 2007. V. 57. P. 41–55.
9. *Troesch B.A.*, *Troesch H.R.* Eigenfrequencies of an Elliptic Membrane // Math. Comput. 1973. V. 27. № 124. P. 755–765.
10. *Акуленко Л.Д.*, *Кумакшев С.А.*, *Нестеров С.В.* Собственные колебания тяжелой жидкости в эллиптическом бассейне // Изв. РАН. МЖГ. 2001. № 4. С. 129–142.
11. *Акуленко Л.Д.*, *Нестеров С.В.* Собственные колебания однородной эллиптической мембраны // Изв. РАН. МТТ. 2000. № 1. С. 179–190.
12. *Костин Г.В.*, *Саурин В.В.* Метод интегро-дифференциальных соотношений для анализа собственных колебаний мембран // ПММ. 2009. Т. 73. В. 3. С. 459–473.
13. *Морс Ф.М.*, *Фешбах Г.* Методы теоретической физики. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. Т. 2. 886 с.

ABOUT CALCULATION WITH THE HIGH ACCURACY OF EIGENVALUES OF THE OPERATOR LAPLACE IN THE ELLIPSE (WITH THE REGIONAL CONDITION OF NEUMANN)

S. D. Algazin

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federarion

Presented by Academician of the RAS V.P. Maslov November 20, 2018

Received December 10, 2018

The method of the computing experiment investigates the task about fluctuations of the elliptic membrane with the regional condition of Neumann. It is shown that on the grid 40×61 it is possible to define up to 50 eigenvalues with several right significant figures for eccentricity $e = 0.99999$.

Keywords: Laplace's equation, free fluctuations of the membrane, computing experiment.