

УДК 519.63

О ТОЧНОСТИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ПРИ РАСЧЁТЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ УДАРНЫХ ВОЛН

В. В. Остапенко^{1,2,}, Н. А. Хандеева^{1,2,*}**

Представлено академиком РАН В.П. Дымниковым 07.12.2018 г.

Поступило 09.01.2019 г.

Изучается точность, с которой разностные схемы сквозного счёта рассчитывают течения, в которых происходит взаимодействие ударных волн. Показано, что в областях между расходящимися ударными волнами после их соударения точность вычисления инвариантов в комбинированных схемах на несколько порядков выше, чем в WENO-схеме пятого порядка по пространству и третьего порядка по времени.

Ключевые слова: комбинированная схема, схема Русанова, компактная схема, схема CABARET, WENO-схема, взаимодействие ударных волн.

DOI: <https://doi.org/10.31857/S0869-56524856691-696>

1. Поскольку в классической работе [1] показано, что среди линейных разностных схем нет монотонных схем повышенного порядка аппроксимации, то развитие теории разностных схем сквозного счёта для гиперболических систем законов сохранения в значительной степени было направлено на преодоление этого “запрета Годунова”. В результате были разработаны различные классы разностных схем, в которых повышенный порядок аппроксимации на гладких решениях и монотонность достигались за счёт нелинейной коррекции потоков. Перечислим основные классы таких схем, которые будем сокращённо называть NFC (Nonlinear Flux Correction)-схемами: MUSCL-схемы [2], TVD-схемы [3], NED-схемы [4], WENO-схемы [5], CABARET-схемы [6].

В дальнейшем было показано, что NFC-схемы имеют не более чем первый порядок как локальной сходимости в областях влияния ударных волн [7–9], так и интегральной сходимости на интервалах, одна из границ которых находится в области влияния ударной волны [10, 11]. Причина этого заключается в том, что коррекция потоков, характерная для NFC-схем, приводит к снижению их гладкости, что, в свою очередь, приводит к снижению порядка аппроксимации ϵ -условий Югонио на фронтах ударных волн [12]. В то же время некоторые немонотонные схемы повышенной точности (в частности,

схема Русанова [13] и компактная схема из [9]), имеющие аналитические функции численных потоков и, как следствие, с повышенной точностью аппроксимирующие ϵ -условия Югонио, сохраняют повышенный порядок сходимости в негативной норме при интегрировании по областям, содержащим сильные разрывы [10]. В результате эти немонотонные схемы, в отличие от NFC-схем, сохраняют повышенный порядок сходимости в областях влияния ударных волн, несмотря на заметные схемные осцилляции на их фронтах.

Был предложен метод построения комбинированных разностных схем сквозного счёта [13, 14], которые сочетают достоинства как NFC-схем, так и классических немонотонных схем, а именно монотонно локализируют фронты ударных волн и одновременно сохраняют повышенный порядок точности в областях их влияния. В комбинированной разностной схеме применяется базисная немонотонная схема, которая имеет повышенный порядок сходимости в областях влияния ударных волн. По базисной схеме разностное решение строится во всей расчётной области. В окрестностях больших градиентов, где это решение имеет нефизические осцилляции, оно корректируется путём численного решения внутренних начально-краевых задач по одной из NFC-схем. В [14] в качестве базисной использовалась неявная компактная схема [9] третьего порядка слабой аппроксимации, а в [15] — явная схема Русанова [13] третьего порядка классической аппроксимации. В качестве внутренней NFC-схемы применялся монотонизированный вариант схемы CABARET [6] второго порядка точности на гладких решениях.

¹ Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева
Сибирского отделения Российской Академии наук,
Новосибирск

² Новосибирский государственный университет

*E-mail: nzyuzina1922@gmail.com

**E-mail: ostapenko_vv@ngs.ru

В настоящей работе изучается точность, с которой комбинированные разностные схемы рассчитывают течения, в которых происходит взаимодействие ударных волн. Показано, что в областях между расходящимися ударными волнами после их соударения точность вычисления инвариантов в комбинированных схемах [14, 15] на несколько порядков выше, чем в WENO-схеме [5] пятого порядка по пространству и третьего порядка по времени.

2. Рассмотрим квазилинейную гиперболическую систему законов сохранения

$$\mathbf{u}_t + \mathbf{f}(\mathbf{u})_x = 0, \quad (1)$$

где $\mathbf{u}(x, t)$ — искомая, а $\mathbf{f}(\mathbf{u})$ — заданная гладкие вектор-функции, содержащие k компонент. Поставим для системы (1) задачу Коши с гладкими периодическими начальными данными

$$\mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{v}(x) \equiv \mathbf{v}(x + X). \quad (2)$$

Предположим, что задача (1), (2) имеет единственное обобщённое решение $\mathbf{u}(x, t)$, в котором в некоторый момент времени $T_0 > 0$ в результате градиентной катастрофы образуются ударные волны. Комбинированную разностную схему, аппроксимирующую эту задачу, будем строить на прямоугольной сетке

$$S = \{(x_j, t_n): x_j = j\Delta, 0 \leq j \leq N; \\ t_{n+1} = t_n + \tau_n, t_0 = 0\}, \quad (3)$$

где $\Delta = X/N$ — постоянный шаг сетки по пространству,

$$\tau_n = z\Delta / \max_{k,j} |a_k(\mathbf{u}_j^n)| \quad (4)$$

есть шаг сетки по времени, выбираемый из условия устойчивости Куранта, в котором $a_k(\mathbf{u})$ — собственные значения матрицы Якоби $\mathbf{f}_{\mathbf{u}}$ системы (1), $z = 0,5$ — коэффициент запаса.

Тестовые расчёты показали [14, 15], что осцилляции, возникающие на ударных волнах в компактной схеме [9] и в схеме Русанова [13], несут в себе информацию о структуре фурье-разложения сильного разрыва на фронте волны, что позволяет этим схемам с повышенной точностью аппроксимировать соответствующие ε -условия Югонио [12]. В NFC-схемах (подавляющих осцилляции на ударных волнах) эта информация теряется, что приводит к снижению их точности в областях влияния ударных волн. Поэтому при построении комбинированной схемы периодическое разностное решение

$$\mathbf{u}_j^n = \mathbf{u}(x_j, t_n) \equiv \mathbf{u}(x_{j+N}, t_n) \quad (5)$$

задачи Коши (1), (2), получаемое по базисной схеме (в качестве которой используется схема Русанова [13] или компактная схема [9]), не зависит от разностного решения $\mathbf{v}_j^n = \mathbf{v}(x_j, t_n)$, получаемого по внутренней схеме CABARET и предназначенного для сглаживания осцилляций в сеточных окрестностях ударных волн.

В работах [14, 15], где численно моделировалось распространение изолированных ударных волн, такие сеточные окрестности выбирались по формуле

$$S_c = \{(x_j, t_n): j_n - m \leq j \leq j_n + m + 1, \\ |\tilde{\mathbf{u}}_{j_n+1/2}^n| = \max_j |\tilde{\mathbf{u}}_{j+1/2}^n| \geq p\}, \quad (6)$$

где $\tilde{\mathbf{u}}_{j+1/2}^n = (\mathbf{u}_{j+1}^n - \mathbf{u}_j^n)/\Delta$ — пространственная разностная производная. В настоящей работе при моделировании взаимодействия ударных волн внутренняя схема CABARET применяется в области

$$S_p^m = \{(x_j, t_n): |j - k| \leq m, (x_k, t_n) \in S_p\}, \quad (7)$$

представляющей собой сеточную m -окрестность области

$$S_p = \{(x_j, t_n): |\tilde{\mathbf{u}}_{j+1/2}^n| \geq p, (x_j, t_n) \in S\} \quad (8)$$

больших градиентов разностного решения (5). Натуральное число m и действительное число p в формулах (6)–(8) являются входными параметрами программы, которые подбираются в результате проведения серии тестовых расчётов.

3. Монотонное разностное решение \mathbf{v}_j^n получается в результате численного расчёта в области (7) по схеме CABARET начально-краевой задачи для системы (1). Начальные и граничные условия для этой внутренней задачи берутся из разностного решения \mathbf{u}_j^n , полученного по базисной схеме. В результате имеем следующее решение, построенное по комбинированной разностной схеме:

$$\mathbf{w}_j^n = \begin{cases} \mathbf{u}_j^n, & (x_j, t_n) \in S \setminus S_c, \\ \mathbf{v}_j^n, & (x_j, t_n) \in S_c. \end{cases} \quad (9)$$

Основное достоинство данного решения заключается в том, что оно сохраняет повышенную точность в областях гладкости рассчитываемого обобщённого решения (за счёт использования во всей расчётной области соответствующей базисной схемы) и одновременно монотонно локализует ударную волну (за счёт применения в окрестности её фронта монотонной модификации схемы CABARET).

Описанная методика позволяет находить сглаженное решение \mathbf{v}_j^n в области (7) после того, как

базисное решение \mathbf{u}_j^n получено во всей расчётной области (3). Однако на практике эти решения удобнее находить одновременно на каждом временном слое. Если решения \mathbf{u}_j^n и \mathbf{v}_j^n , а значит и решение \mathbf{w}_j^n , известны на n -м временном слое, то сначала на $(n+1)$ -м временном слое области (3) по базисной схеме находится решение \mathbf{u}_j^{n+1} . Это решение задаёт граничные условия для области (7), при помощи которых на $(n+1)$ -м временном слое по внутренней схеме CABARET находится решение \mathbf{v}_j^{n+1} . В результате по формуле (9) формируется решение \mathbf{w}_j^{n+1} комбинированной разностной схемы на $(n+1)$ -м временном слое расчётной области (3).

Если задача Коши (1), (2) описывает процесс взаимодействия ударных волн, то пространственная сеточная область

$$S_p^m[n] = \{x_j: (x_j, t_n) \in S_p^m\}, \quad (10)$$

формирующаяся на n -м временном слое пространственно-временной сеточной области (7), в общем случае является многосвязной на отрезке длины периода X . При сближении двух ударных волн односвязные сеточные окрестности их фронтов, входящие в область (10), будут сближаться и в некоторый момент времени образуют единую односвязную окрестность. Если в результате соударения этих ударных волн формируются две новые расходящи-

еся ударные волны, то с течением времени окрестности их фронтов вновь образуют две непересекающиеся односвязные подобласти области (10).

4. В качестве конкретной гиперболической системы выберем систему уравнений первого приближения теории мелкой воды, дивергентная форма записи которой в случае прямоугольного горизонтального русла без учёта донного трения имеет вид (1), где

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} h \\ q \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} q \\ q^2/h + gh^2/2 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Здесь $h(x, t)$ и $q(x, t)$ — глубина и расход жидкости, g — ускорение свободного падения (в расчётах $g = 10$). Рассмотрим для системы (1), (11) задачу Коши (2) с периодическими начальными данными

$$h(x, 0) = 2 \sin \frac{\pi(2x+5)}{X} + 3, \quad q(x, 0) = 0, \quad (12)$$

где $X = 10$ — длина периода. На рис. 1 начальное значение глубины жидкости $h(x, 0)$ показано штриховой линией.

Точное решение задачи (1), (11), (12) моделируется численным расчётом по комбинированной схеме из работы [15] на мелкой сетке с пространственным шагом $\Delta = 0,005$. Профили глубины, получаемые в этом расчёте в моменты времени $t = 0, 0,5; 1; 2; 3$, изображены на рис. 1 сплошными линиями

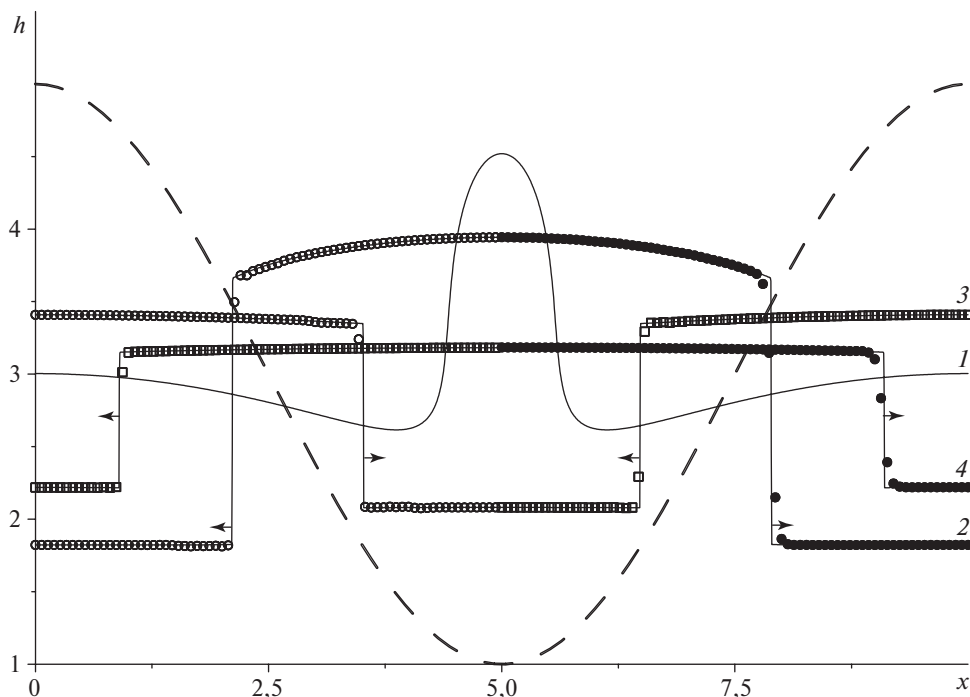


Рис. 1. Глубина жидкости в моменты времени $T = 0$ (штриховая линия), $T = 0,5$ (1), $T = 1$ (2), $T = 2$ (3) и $T = 3$ (4). □ — результаты численного расчёта по комбинированной схеме из [14], ○ — по комбинированной схеме из [15] и ● — по WENO-схеме [5].

на отрезке $[0, X]$ длины периода. В результате решения этой задачи впадина, расположенная в начальный момент времени в центре расчётной области (штриховая линия), постепенно заполняется жидкостью, что приводит к подъёму её уровня в окрестности точки $x = X/2$ (линия 1). Этот подъём уровня вызывает формирование двух расходящихся ударных волн (линия 2), которые, отражаясь от границ расчётной области, преобразуются в две сходящиеся ударные волны (линия 3). Эти ударные волны, соударяясь в центре расчётной области, формируют

две новые расходящиеся ударные волны (линия 4). Далее этот процесс повторяется, приводя к возникновению новых пар сходящихся и расходящихся ударных волн, амплитуда которых постепенно уменьшается, что связано с потерей полной энергии потока на фронтах этих волн.

5. Результаты численного расчёта задачи (1), (11), (12) в моменты времени $t = 1; 2; 3$ на сетке с пространственным шагом $\Delta = 1/15$, получаемые по комбинированной схеме из [14], показаны квадратами, по комбинированной схеме из [15] — кружками,

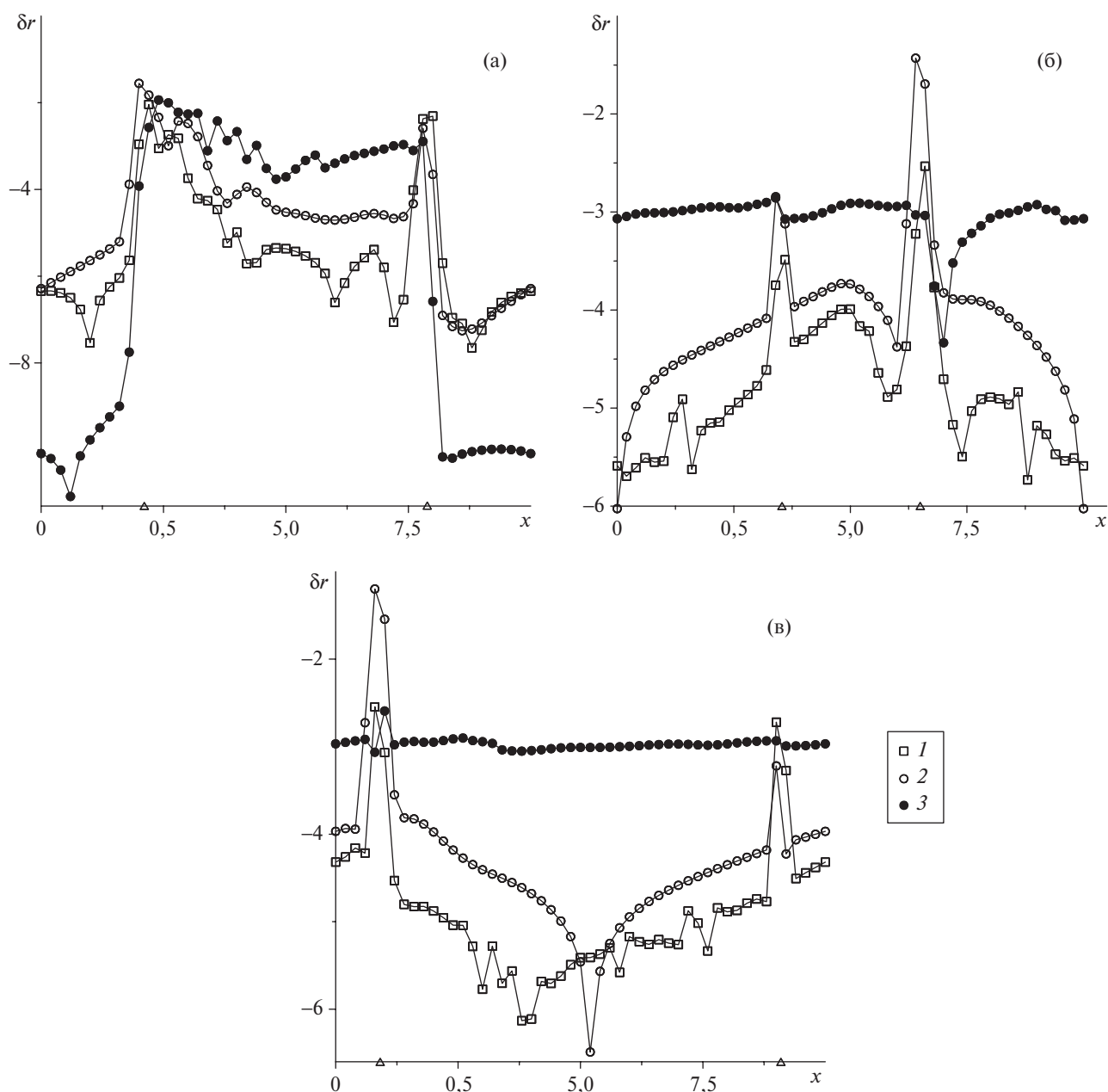


Рис. 2. Ошибки вычисления r -инвариантов, получаемые при расчёте по комбинированной схеме из [14] (1), по комбинированной схеме из [15] (2) и по WENO-схеме из [5] (3), приведённые в моменты времени $T = 1$ (а), 2 (б) и 3 (в). Треугольниками на оси x показаны координаты ударных волн.

ками и по WENO-схеме из [5] — точками. Поскольку эти разностные решения (так же, как и точное решение) симметричны относительно точки $x = X/2$, то на рис. 1 каждое из них в фиксированный момент времени приводится на одном из отрезков $[0, X/2]$ или $[X/2, X]$ длины полупериода. Из рис. 1 следует, что комбинированные схемы размазывают фронт ударной волны существенно меньше, чем WENO-схема. Это объясняется тем, что в этих схемах в качестве внутренней используется схема CABARET, которая с высокой точностью локализует фронты ударных волн.

На рис. 2 в моменты времени $t = 1; 2; 3$ приведены ошибки

$$\delta r_j(t) = \lg|r(x_j, t) - r_e(x_j, t)| \quad (13)$$

вычисления r -инварианта $r = v - 2c$, где $v = q/h$ и $c = \sqrt{gh}$, получаемые при расчёте по трём рассматриваемым схемам на сетке с пространственным шагом $\Delta = 0,02$. Точное значение инварианта r_e моделируется расчётом по комбинированной схеме из [15] на сетке с пространственным шагом $\Delta = 0,0002$. В силу симметрии начальных данных (12) графики ошибок $\delta s_j(t)$ вычисления s -инварианта $s = v + 2c$, получаются из графиков, приведённых на рис. 2, путём их отражения относительно прямой $x = X/2$.

Из рис. 2а следует, что на интервалах $(kX - 2, kX + 2)$, где k — целое число, которые при $t = 2$ не входят в области влияния сформировавшихся ударных волн, точность вычисления r -инварианта в WENO-схеме приблизительно на три порядка выше, чем в комбинированных схемах, что объясняется более высокой точностью WENO-схемы на гладких решениях. Однако на интервалах $(kX + 3, kX + 7)$ между расходящимися ударными волнами на рис. 2а точность WENO-схемы резко падает и становится ниже, чем в комбинированных схемах. С течением времени, когда вся расчётная область становится областью влияния взаимодействующих ударных волн (рис. 2б, в), точность вычисления r -инварианта в комбинированных схемах становится на один или два порядка выше, чем в WENO-схеме, везде, за исключением малых окрестностей ударных волн, где сходимость разностного решения к точному отсутствует. Отметим также, что комбинированная схема из [14], в которой базисной является компактная схема [9], демонстрирует более высокую точность, чем комбинированная схема из [14], в которой базисной является схема Русанова [13]. Это объясняется тем, что компактная схема, предложенная в [9], имеет третий по-

рядок как классической аппроксимации на гладких решениях, так и слабой аппроксимации на разрывных решениях, в то время как схема Русанова третьего порядка классической аппроксимации имеет лишь первый порядок слабой аппроксимации.

Источник финансирования. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 16–11–10033).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Годунов С.К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Мат. сб. 1959. Т. 47. № 3. С. 271–306.
2. Van Leer B. Toward the Ultimate Conservative Difference Scheme. V. A Second-Order Sequel to Godunov's Method // J. Comput. Phys. 1979. V. 32. № 1. P. 101–136.
3. Harten A. High Resolution Schemes for Hyperbolic Conservation Laws // J. Comput. Phys. 1983. V. 49. P. 357–393.
4. Nessyahu H., Tadmor E. Non-Oscillatory Central Differencing for Hyperbolic Conservation Laws // J. Comput. Phys. 1990. V. 87. № 2. P. 408–463.
5. Jiang G.S., Shu C.W. Efficient Implementation of Weighted ENO Schemes // J. Comput. Phys. 1996. V. 126. P. 202–228.
6. Karabasov S.A., Goloviznin V.M. Compact Accurately Boundary-Adjusting High-Resolution Technique for Fluid Dynamics // J. Comput. Phys. 2009. V. 228. P. 7426–7451.
7. Остапенко В.В. О сходимости разностных схем за фронтом нестационарной ударной волны // ЖВМиМФ. 1997. Т. 37. № 10. С. 1201–1212.
8. Casper J., Carpenter M.H. Computational Consideration for the Simulation of Shock-Induced Sound // SIAM J. Sci. Comput. 1998. V. 19. № 1. P. 813–828.
9. Остапенко В.В. О построении разностных схем повышенной точности для сквозного расчёта нестационарных ударных волн // ЖВМиМФ. 2000. Т. 40. № 12. С. 1857–1874.
10. Ковыркина О.А., Остапенко В.В. О сходимости разностных схем сквозного счёта // ДАН. 2010. Т. 433. № 5. С. 599–603.
11. Михайлов О. О порядке сходимости разностных схем WENO за фронтом ударной волны // Мат. моделир. 2015. Т. 27. № 2. С. 129–138.
12. Остапенко В.В. О конечно-разностной аппроксимации условий Гюгонио на фронте ударной волны, распространяющейся с переменной скоростью // ЖВМиМФ. 1998. Т. 38. № 8. С. 1355–1367.
13. Русанов В.В. Разностные схемы третьего порядка точности для сквозного счёта разрывных реше-

- ний // ДАН СССР. 1968. Т. 180. № 6. С. 1303–1305.
14. Ковыркина О.А., Остапенко В.В. О построении комбинированных разностных схем повышенной точности // ДАН. 2018. Т. 478. № 5. С. 517–522.
15. Зюзина Н.А., Ковыркина О.А., Остапенко В.В. Монотонная разностная схема, сохраняющая повышенную точность в областях влияния ударных волн // ДАН. 2018. Т. 482. № 6. С. 639–643.

THE ACCURACY OF FINITE-DIFFERENCE SCHEMES CALCULATING THE INTERACTION OF SHOCK WAVES

V. V. Ostapenko^{1,2}, N. A. Khandeeva^{1,2}

¹ *Lavrent'ev Institute of Hydrodynamics, Siberian Branch, Russian Academy of Science,
Novosibirsk, Russian Federation*

² *Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS V.P. Dymnikov December 7, 2018

Received January 9, 2019

The accuracy with which the shock-capturing finite-difference schemes calculate the flows with interaction of shock waves is studied. It is shown that, in the domains between the shock waves after their incidence, the calculation accuracy of invariants of the combined schemes is several orders of magnitude higher than the accuracy of the WENO-scheme, which is fifth-order in space and third-order in time.

Keywords: combined scheme, Rusanov scheme, compact scheme, CABARET scheme, WENO-scheme, interaction of the shock waves.