ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2019, том 487, № 2, с. 119–125

МАТЕМАТИКА

УДК 517.946

СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ РЕОЛОГИЧЕСКИ СЛОЖНОЙ СРЕДЫ. ПЕРЕМЕННЫЕ КРОККО

Р. Р. Булатова[1,*], В. Н. Самохин[2,], Г. А. Чечкин[1,3,***]**

Представлено академиком РАН В.В. Козловым 10.02.2019 г.

Поступило 21.03.2019 г.

Изучается система уравнений пограничного слоя нелинейной обобщённо-ньютоновской вязкой жидкости, модификацию которой предложила О.А. Ладыженская. Для доказательства корректной разрешимости поставленной задачи в работе применяется метод преобразования Крокко, который переводит систему пограничного слоя в одно квазилинейное вырождающееся параболическое уравнение. Получены асимптотические оценки решения на границе области.

Ключевые слова: преобразование Крокко, пограничный слой, реология, неньютоновские среды.

DOI: https://doi.org/10.31857/S0869-56524872119-125

В работе изучается система уравнений пограничного слоя нелинейно вязкой жидкости с реологическим законом, предложенным О.А. Ладыженской. Эти уравнения уже рассматривались ранее, например в работах [1–4]. При этом было применено хорошо известное преобразование Мизеса [5], сводящее систему уравнений пограничного слоя к одному квазилинейному уравнению. Здесь мы применяем преобразование Крокко, которое переводит систему уравнений пограничного слоя в квазилинейное вырождающееся параболическое уравнение, но в отличие от переменных Мизеса замена переменных Крокко позволяет изучать как стационарные, так и нестационарные уравнения и, кроме того, даёт возможность изучить асимптотику решения на границе области.

1. ЗАМЕНА КРОККО

В случае двумерного стационарного течения модифицированная система уравнений пограничного слоя имеет вид

$$\begin{gathered}\nu(1+3d(u_y)^2)u_{yy}-uu_x-vu_y=-UU_x,\\ u_x+v_y=0.\end{gathered}\tag{1}$$

Здесь ν, d — постоянные, зависящие от свойств жидкости, плотность жидкости ρ предполагается равной единице, $U(x)$ — заданная функция, связанная с давлением $p(x)$ соотношением Бернулли

$$U^2(x)+2p(x)=C=\text{const}.$$

Система уравнений (1) рассматривается в области $D=\{0<x<X,\ 0<y<\infty\}$ с граничными условиями

$$\begin{gathered}u(0,\,y)=0,\quad u(x,0)=0,\quad v(x,\,0)=v_0(x),\\ u(x,\,y)\to U(x)\ \text{при}\ y\to\infty,\end{gathered}\tag{2}$$

где $U(0)=0$, $U_x(0)>0$, $U(x)>0$ при $x>0$, а функция $v_0(x)$ предполагается заданной. Условия $U(0)=0$ и $u(0,\,y)=0$ определяют точку $x=0$ как точку, в которой происходит остановка внешнего потока жидкости и пограничный слой симметричен относительно этой точки. Дополнительно предположим, что

$$U(x)=xV(x),$$

$V(x)>0$ и V, V_x, v_0 ограничены при $0<x\le X$.

Определение 1. Классическим решением задачи (1), (2) называются функции $u(x,\,y)$ и $v(x,\,y)$, обладающие следующими свойствами: u непрерывна в замкнутой области $\bar{D}$, v непрерывна в D, а по y в $\bar{D}$; u и v имеют в D непрерывные производные, входящие в уравнение (1); удовлетворяют поточечно уравнениям (1) и граничным условиям (2).

Задачу (1), (2) сведём к некоторой вспомогательной краевой задаче для одного квазилинейного уравнения.

[1] Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

[2] Московский политехнический университет

[3] Институт математики с вычислительным центром Уфимского федерального исследовательского центра Российской Академии наук, Уфа

*E-mail: regina.bulatova@mech.math.msu.su

**E-mail: vnsamokhin@mtu-net.ru

***E-mail: chechkin@mech.math.msu.su

Введём новые независимые переменные ξ, η и новую неизвестную функцию $w(\xi, \eta)$ следующим образом:

$$\xi = x, \quad \eta = \frac{u(x, y)}{U(x)}, \qquad w(\xi, \eta) = \frac{u_y(x, y)}{U(x)}. \tag{3}$$

Приведём систему (1) к одному квазилинейному уравнению. Исключим v из системы уравнений (1), продифференцировав эти уравнения по y. Имеем

$$\nu(1 + 3d(u_y)^2)u_{yyy} + \nu \cdot 6du_{yy}^2 u_y - u_y u_x - - uu_{xy} - v_y u_y - vu_{yy} = 0.$$

Из системы уравнений (1) находим

$$v = \frac{1}{u_y}(-uu_x + \nu(1 + 3d(u_y)^2)u_{yy} + UU_x), \quad v_y = -u_x.$$

Как следствие этих трёх равенств, выводим

$$\nu(1 + 3d(u_y)^2)u_{yyy} - \nu(1 + 3d(u_y)^2)\frac{u_{yy}^2}{u_y} + $$
$$+ \nu u_{yy}^2 \cdot 6du_y - \left(uu_{xy} - \frac{u_{yy}}{u_y}uu_x\right) - \frac{u_{yy}}{u_y}UU_x = $$
$$= \nu(1 + 3d(u_y)^2)\frac{u_{yyy}u_y - u_{yy}^2}{u_y} - u\frac{u_{xy}u_y - u_{yy}u_x}{u_y} + $$
$$+ 6\nu du_y u_{yy}^2 - \frac{u_{yy}}{u_y}UU_x = 0.$$

Вернёмся к соотношениям (3), из которых получим

$$u = \eta U, \quad u_y = wU, \quad x = \xi,$$

$$u_{yy} = w_\eta \eta_y U = w_\eta u_y, \quad \frac{u_{yy}}{u_y} = w_\eta,$$

$$u_{yyy} = w_{\eta\eta}\eta_y u_y + w_\eta u_{yy} = w_{\eta\eta}\frac{u_y^2}{U} + w_\eta u_{yy},$$

$$u_{yx} = wU_\xi + Uw_\xi + w_\eta u_\xi - w_\eta u\frac{U_\xi}{U},$$
$$u_y u_{yy}^2 = w_\eta^2 w^3 U^3,$$

$$\frac{u_{xy}u_y - u_x u_{yy}}{u_y} = w_\xi U + wU_\xi - w_\eta u_\xi + w_\eta u_\xi - w_\eta \eta U_\xi,$$

$$\frac{u_{yyy}u_y - u_{yy}^2}{u_y} = w_{\eta\eta}\frac{u_y^2}{U} + w_\eta u_{yy} - \frac{u_{yy}}{u_y}u_{yy} = $$
$$= w_{\eta\eta}\frac{u_y^2}{U} + w_\eta u_{yy} - w_\eta u_{yy} = w_{\eta\eta}\frac{u_y^2}{U^2}U = w_{\eta\eta}w^2 U,$$

$$-\frac{1}{U}\left(u\frac{u_{xy}u_y - u_x u_{yy}}{u_y} + \frac{u_{yy}}{u_y}UU_x\right) = $$
$$= -\frac{u}{U}(w_\xi U + wU_\xi - w_\eta \eta U_\xi) - w_\eta U_\xi = $$
$$= -\eta w_\xi U - \eta wU_\xi + \eta^2 w_\eta U_\xi - w_\eta U_\xi = $$
$$= (\eta^2 - 1)w_\eta U_\xi - \eta w_\xi U - \eta wU_\xi.$$

Преобразуем граничные условия. Имеем

$$vu_y = -uu_x + \nu(1 + 3d(u_y)^2)u_{yy} + UU_x,$$

$$v\frac{u_y}{U} = -u\frac{u_x}{U} + \nu(1 + 3d(u_y)^2)\frac{u_{yy}}{U} + U_x,$$

$$v\frac{u_y}{U} = -u\frac{u_x}{U} + \nu\left(\frac{u_y}{U} + 3d\frac{u_y^3}{U^3}U^2\right)\frac{u_{yy}}{u_y} + U_x,$$

$$vw = -u\frac{u_\xi}{U} + \nu(w + 3dU^2w^3)w_\eta + U_\xi.$$

Легко видеть, что $u(x, 0) = 0$ и, следовательно, из $y = 0$ вытекает $\eta = 0$. Таким образом, из того, что $y = 0$, следует

$$\nu(1 + 3dU^2w^2)ww_\eta - v(x, 0)w + U_\xi = 0.$$

В итоге, учитывая (2), выводим одно квазилинейное уравнение

$$\nu(1 + 3dU^2w^2)w^2 w_{\eta\eta} - \eta Uw_\xi + (\eta^2 - 1)U_\xi w_\eta - - \eta U_\xi w + 6\nu dU^2 w_\eta^2 w^3 = 0 \tag{4}$$

в области $\Omega = \{0 < \xi < X,\ 0 < \eta < 1\}$ с граничными условиями

$$w(\xi, 1) = 0, \qquad (\nu ww_\eta(1 + 3dU^2w^2) - v_0(\xi)w + U_\xi)\big|_{\eta=0} = 0. \tag{5}$$

Определение 2. Функция $w(\xi, \eta)$ называется решением задачи (4), (5), если w непрерывна в $\bar{\Omega}$ и имеет непрерывные производные w_ξ, w_η, $w_{\eta\eta}$ в Ω; w_η непрерывна по η при $\eta = 0$; w удовлетворяет уравнению (4) в Ω и граничным условиям (5).

2. ОСНОВНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Имеют место следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть U и v_0 удовлетворяют предположениям, приведённым выше. Тогда задача* (4), (5) *в области Ω, где X зависит от U, v_0, ν, имеет решение, положительное при $\eta < 1$, обладающее следующими свойствами: $w(\xi, \eta)$ непрерывна в $\bar{\Omega}$; её обобщённые производные w_ξ, w_η, $w_{\eta\eta}$ существуют и удовлетворяют неравенствам*

$$Ye^{-C_1\xi} \le w \le Ye^{C_2\xi}, \quad Y_\eta e^{C_4\xi} \le w_\eta \le Y_\eta e^{-C_5\xi}, \tag{6}$$

$$|w_\xi(\xi, \eta)| \le C_3 Y, \quad -C_6 \le w^2 w_{\eta\eta} \le -C_7. \tag{7}$$

В любой замкнутой области, лежащей внутри Ω, *функция* w *и её производные, входящие в уравнение* (4), *удовлетворяют условию Гёльдера.*

Теорема 2. *Задача* (4), (5) *в области* Ω *может иметь лишь одно неотрицательное решение* w, *обладающее следующими свойствами*: w *непрерывна в* Ω; w_η, $w_{\eta\eta}$, w_ξ *непрерывны во внутренних точках* Ω; $w > 0$ *при* $\eta = 0$; w_η *непрерывна по* η *при* $\eta = 0$.

Обращая преобразование переменных (3), что возможно в силу свойств решения задачи (4), (5), получаем основной результат о существовании и единственности классического решения задачи (1), (2) в смысле данного нами определения. Для этого рассмотрим вспомогательную граничную задачу, т.е. дифференциальное уравнение

$$L(Y) \equiv \nu Y^2 Y_{\eta\eta} + (\eta^2 - 1) a Y_\eta - \eta a Y = 0, \quad 0 < \eta < 1, \tag{8}$$

с граничными условиями

$$l(Y) \equiv (\nu Y Y_\eta - bY + a)\big|_{\eta=0} = 0, \quad Y(1) = 0, \tag{9}$$

где $a > 0$, b — некоторые константы.

Теорема 3. *Предположим, что*

$$U(x) = x(a + x a_1(x)), \quad v_0(x) = b + x b_1(x),$$

где $a = \mathrm{const} > 0$, $b = \mathrm{const}$; $U(x) > 0$ *при* $x > 0$; $a_1(x)$, $a_{1x}(x)$, $a_{1xx}(x)$, $b_1(x)$, $b_{1x}(x)$ *ограничены.*

Тогда задача (1), (2) *в области* D *при* X, *зависящем от* U *и* v_0, *имеет решение* u, v, *которое обладает следующими свойствами*: $u_y > 0$ *при* $y \ge 0$, $x > 0$; $\frac{u}{U}, \frac{u_y}{U}$ *ограничены и непрерывны в* $\bar{D}$; $u > 0$ *при* $y > 0$, $x > 0$; $u(x, y) \to U(x)$ *при* $y \to \infty$, $u(x, 0) = u(0, y) = 0$; $\frac{u_y}{U} > 0$ *при* $y \ge 0$; $\frac{u_y}{U} \to 0$ *при* $y \to \infty$; u_x, u_y, u_{yy} *ограничены и непрерывны в* $\bar{D}$; v *непрерывна в* $\bar{D}$ *по* y *при* $x > 0$; v *непрерывна по* x *и* y *внутри* D; u_{yy} *ограничена в* $\bar{D}$; u_{xy} *ограничена в* D *при ограниченных* y; u_{xy} *и* u_{yyy} *непрерывны в* $\bar{D}$; $\frac{u_{yy}}{u_y}$ *непрерывна в* $\bar{D}$ *по* y; *имеют место оценки*

$$U(x) Y\left(\frac{u}{U}\right) e^{-C_1 x} \le u_y \le U(x) Y\left(\frac{u}{U}\right) e^{C_2 x},$$

$$Y_\eta\left(\frac{u}{U}\right) e^{C_4 x} \le \frac{u_{yy}}{u_y} \le Y_\eta\left(\frac{u}{U}\right) e^{-C_5 x},$$

$$\exp\left[-\frac{M_1^2}{4} y^2 e^{2C_2 x}\right] \le 1 - \frac{u}{U} \le \exp\left[-\frac{M_1^2}{4} y^2 e^{-2C_1 x}\right],$$

где $Y(\eta)$ — *решение задачи* (8), (9).

Теорема 4. *Пусть* u, v — *решение задачи* (1), (2) *такое, что производные* u_x, u_y, v_y, u_{yy}, u_{yyy}, u_{xy} *непрерывны в* D; $\frac{u}{U}$ *и* $\frac{u_y}{U}$ *непрерывны в* $\bar{D}$; $u_y > 0$ *при* $y \ge 0$, $x > 0$; $\frac{u_y}{U} > 0$ *при* $y = 0$; $\frac{u_y}{U} \to 0$ *при* $y \to \infty$; $\frac{u_{yy}}{u_y}$, u_x *непрерывны по* y *при* $y = 0$; $\frac{u_{yyy} u_y - u_y^2}{u_y^2} \le 0$.

Тогда u, v — *единственное решение задачи* (1), (2) *с указанными свойствами.*

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ

Доказательство существования решения задачи (4), (5) проведём на основе метода прямых, т.е. дискретизацией по ξ и заменой уравнения (4) системой обыкновенных дифференциальных уравнений.

Для любой функции $f(\xi, \eta)$ введём обозначение

$$f^k = f^k(\eta) \equiv f(kh, \eta),$$
$$h = \mathrm{const} > 0, \quad k = 0, 1, \ldots, [X/h].$$

Уравнения (4) с условиями (5) заменим системой уравнений

$$\begin{gathered} L_k(w) := \nu(1 + 3d(kh)^2 (V^k)^2 (w^k)^2)(w^k)^2 w^k_{\eta\eta} - \\ - \eta kh V^k \frac{w^k - w^{k-1}}{h} + (\eta^2 - 1)(V^k + kh V^k_\xi) w^k_\eta - \\ - \eta (V^k + kh V^k_\xi) w^k + 6\nu d (kh)^2 (V^k)^2 (w^k_\eta)^2 (w^k)^3 = 0, \\ 0 < \eta < 1, \quad k = 0, 1, \ldots, [X/h]. \end{gathered} \tag{10}$$

с граничными условиями

$$\begin{gathered} w^k(1) = 0, \\ l_k(w) := (\nu w^k w^k_\eta (1 + 3d(kh)^2 (V^k)^2 (w^k)^2) - \\ - v^k_0 w^k + (V^k + kh V^k_\xi))\big|_{\eta=0} = 0. \end{gathered} \tag{11}$$

Доказательство существования решения задачи (10), (11) основано на следующей лемме. В дальнейшем через M_i и K_i будем обозначать положительные постоянные, не зависящие от h.

Лемма 1. *Задача* (10), (11) *имеет решение* $w^k(\eta)$, $k = 0, 1, \ldots, [X/h]$, *которое непрерывно при* $0 \le \eta \le 1$ *и бесконечно дифференцируемо при* $0 \le \eta < 1$, *если* $V_x > 0$ *при* $0 \le x \le X$ *и* V, V_x, v_0 *ограничены при* $0 \le x \le X$. *Для этого решения справедлива оценка*

$$K_1(1 - \eta) \le w^k(\eta) \le K_2(1 - \eta)\sqrt{-\ln \mu (1 - \eta)} \tag{12}$$

при $kh \le X$, *где* $h \le h_0$, $h_0 = \mathrm{const} > 0$, $\mu = \mathrm{const}$, $0 < \mu < 1$.

Решение задачи (8), (9) будет использовано для последующих оценок решений задачи (10), (11). Согласно предположениям основных теорем $V(0) = a, v_0(0) = b$ имеют место утверждения.

Лемма 2. *Задача* (8), (9) *имеет решение со следующими свойствами*:

$$M_2(1-\eta)\sigma \le Y(\eta) \le M_1(1-\eta)\sigma \quad \text{при } 0 \le \eta \le 1, \tag{13}$$

$$M_1(1-\eta)(\sigma - K_4) \le Y(\eta) \quad \text{при } 0 < \eta_0 \le \eta < 1, \tag{14}$$

$$\begin{gathered} -M_4\sigma \le Y_\eta(\eta) \le -M_3\sigma, \quad |YY_{\eta\eta}| \le M_5, \\ YY_{\eta\eta} \le -M_6, \end{gathered} \tag{15}$$

$$\sigma = \sqrt{-\ln\mu(1-\eta)}, \quad \mu = \text{const}, \quad 0 < \mu < 1,$$

$$\nu M_1^2 = 2a, \quad \sigma(0) \ge \frac{|b|}{a} + 2, \quad \frac{K_4}{\sigma} < 1$$
$$\text{при } \eta > \eta_0 = \text{const} \ge 0.$$

Лемма 3. *Предположим, что* $V(x) = a + xa_1(x)$, $v_0(x) = b + xb_1(x)$, *и функции* $a_1(x)$, $a_{1_x}(x)$, $b_1(x)$ *ограничены при* $0 \le x \le X$. *И пусть* $Y(\eta)$ — *решение задачи* (8), (9). *Тогда при* $0 \le kh \le X$, *где* X *зависит от* $V(x)$, $v_0(x)$ *для решения* $w^k(\eta)$ *задачи* (10), (11) *имеют место неравенства*

$$Y(\eta)e^{-C_1kh} \le w^k(\eta) \le Y(\eta)e^{C_2kh}. \tag{16}$$

Для обоснования предельного перехода в задаче (10), (11) при $h \to 0$ оценим величины $r^k = \dfrac{w^k - w^{k-1}}{h}$, $z^k = w_\eta^k$ и $(w^k)^2 w_{\eta\eta}^k$ равномерно по h. Верно утверждение.

Лемма 4. *Пусть выполнены предположения леммы* 3; *кроме того*, $a_{1xx}(x)$ *и* $b_{1x}(x)$ *ограничены и* $Y(\eta)$ — *решение задачи* (8), (9). *Тогда при достаточно малом* X *и* $0 \le kh \le X$ *решения* $w^k(\eta)$ *задачи* (10), (11) *удовлетворяют неравенствам* $\left|\dfrac{w^k - w^{k-1}}{h}\right| \le C_3Y$, $k = 1, 2, \ldots, X/h$; $Y_\eta e^{C_4kh} \le w_\eta^k \le Y_\eta e^{-C_5kh}$, $|(w^k)^2 w_{\eta\eta}^k| < C_6$, $(w^k)^2 w_{\eta\eta}^k < -C_7$, $k = 0, 1, \ldots, X/h$.

Доказательство теоремы 1. Продолжим решения $w^k(\eta)$ задачи (10), (11) линейно по ξ при $(k-1)h \le \xi \le kh$, $k = 1, 2, \ldots, X/h$. В силу лемм 3, 4 полученное семейство функций $w_h(\xi, \eta)$, равномерно ограничено и равностепенно непрерывно в Ω. По теореме Арцела получаем, что существует последовательность функций $w_{h_m}(\xi, \eta)$, равномерно сходящаяся в Ω к некоторой $w(\xi, \eta)$, при $h_m \to 0$. Точно так же, как в параграфе [5, § 3.1], доказывается, что w имеет обобщённые производные, входящие в уравнение (4), и удовлетворяет этому уравнению почти всюду и неравенствам (6), (7).

Чтобы доказать, что производные функции w, входящие в уравнение, удовлетворяют условию Гёльдера в любой внутренней подобласти Ω, рассмотрим в прямоугольнике $\Delta = \{\xi_1 \le \xi \le \xi_2,\ \eta_1 \le \eta \le \eta_2\}$ уравнение

$$\begin{aligned} &\nu(1 + 3d(\xi V)^2w^2)w^2S_{\eta\eta} - \eta\xi VS_\xi + \\ &+ (\eta^2 - 1)(V + \xi V_\xi)S_\eta - \eta(V + \xi V_\xi)S + \\ &+ 6\nu d(\xi V)^2w^3S_\eta^2 = 0 \end{aligned} \tag{17}$$

с условиями

$$S|_{\xi=\xi_1} = w|_{\xi=\xi_1}, \quad S|_{\eta=\eta_1} = w|_{\eta=\eta_1}, \quad S|_{\eta=\eta_2} = w|_{\eta=\eta_2}, \tag{18}$$

где $0 < \xi_1 < \xi_2 < X$, $0 < \eta_1 < \eta_2 < 1$. Поскольку w удовлетворяет условию Липшица, то задача (17), (18) в области Δ имеет решение S такое, что S_η ограничено в Δ, S_η, S_ξ, $S_{\eta\eta}$ удовлетворяют условию Гёльдера в любой внутренней подобласти Δ. Покажем, что $S = w$. Функция $W = S - w$ удовлетворяет

$$\begin{aligned} &\nu(1 + 3d(\xi V)^2w^2)w^2W_{\eta\eta} - \eta\xi VW_\xi + \\ &+ (\eta^2 - 1)(V + \xi V_\xi)W_\eta - \eta(V + \xi V_\xi)W + \\ &+ 6\nu d(\xi V)^2w^3W_\eta^2 = 0 \end{aligned} \tag{19}$$

и

$$W|_{\xi=\xi_1} = W|_{\eta=\eta_1} = W|_{\eta=\eta_2} = 0. \tag{20}$$

Умножим уравнение (19) на $We^{-\alpha\xi}$, $\alpha = \text{const} > 0$, и проинтегрируем по Δ. Преобразуя некоторые члены интегрированием по частям, получим равенство

$$\begin{aligned} &\int_\Delta [-\nu w^2W_\eta^2 + \nu(w_\eta^2 + ww_{\eta\eta})W^2 - 3\nu d\xi^2V^2w^4W_\eta^2 + \\ &+ 6\nu d\xi^2V^2(3w^2w_\eta^2 + w^3w_{\eta\eta})W^2 + \eta(\xi V)_\xi \cdot \frac{1}{2}W^2 - \\ &- \eta\xi V \cdot \frac{1}{2}W^2\alpha - \eta(V + \xi V_\xi)W^2 - \eta(V + \xi V_\xi)W^2 - \\ &- 3\nu d\xi^2V^2w^3W_{\eta\eta}W^2 - 9\nu d\xi^2V^2w^2w_\eta W_\eta W^2] \times \\ &\times e^{-\alpha\xi}d\xi d\eta - \int_{\xi=\xi_2} \eta\xi V\frac{1}{2}W^2e^{-\alpha\xi}d\eta = 0, \end{aligned}$$

а из него неравенство

$$\begin{aligned} &\int_\Delta \bigg[\nu(w_\eta^2 + ww_{\eta\eta}) + 6\nu d\xi^2V^2(3w^2w_\eta^2 + w^3w_{\eta\eta}) + \\ &+ \frac{1}{2}\eta(\xi V)_\xi - \frac{1}{2}\eta\xi V\alpha - 2\eta(V + \xi V_\xi)\bigg] \times \\ &\times W^2e^{-\alpha\xi}d\xi d\eta \ge 0. \end{aligned} \tag{21}$$

При достаточно большом α выражение в квадратных скобках может быть сделано отрицательным, и тогда из (21) следует, что $W \equiv 0$ и $S = w$.

Доказательство теоремы 2. Предположим, что задача имеет два таких решения w_1 и w_2. Их разность $\bar{w} = w_1 - w_2$ удовлетворяет уравнению

$$\nu w_1^2 \bar{w}_{\eta\eta} + \nu(w_1 + w_2)w_{2\eta\eta}\bar{w} + 3\nu d\xi^2 V^2 w_1^4 \bar{w}_{\eta\eta} + \\ + 3\nu d\xi^2 V^2 (w_1^3 + w_1 w_2^2 + w_1^2 w_2 + w_2^3) w_{2\eta\eta}\bar{w} - \\ - \eta\xi V \bar{w}_\xi + (\eta^2 - 1)(V + \xi V_\xi)\bar{w}_\eta - \eta(V + \xi V_\xi)\bar{w} + \\ + 6\nu d\xi^2 V^2 (w_1^2 + w_1 w_2 + w_2^2) w_{1\eta}^2 \bar{w} + \\ + 6\nu d\xi^2 V^2 (w_{1\eta} + w_{2\eta}) w_2^3 \bar{w}_\eta = 0$$

с граничными условиями

$$\bar{w}|_{\eta=1} = 0, \left(\nu\bar{w}_\eta + 3\nu d\xi^2 V^2 w_1^2 \bar{w}_\eta + \right. \\ \left. + 3\nu d\xi^2 V^2 (w_1 + w_2) w_{2\eta}\bar{w} - \frac{(V + \xi V_\xi)\bar{w}}{w_1 w_2}\right)_{\eta=0} = 0.$$

Для $W = \bar{w}e^{-\alpha\xi}$, $\alpha = \text{const} > 0$, имеем следующее уравнение в области Ω:

$$\nu w_1^2 W_{\eta\eta} + \nu(w_1 + w_2)w_{2\eta\eta}W + 3\nu d\xi^2 V^2 w_1^4 W_{\eta\eta} + \\ + 3\nu d\xi^2 V^2 (w_1^3 + w_1 w_2^2 + w_1^2 w_2 + w_2^3) w_{2\eta\eta}W - \\ - \eta\xi V W_\xi - \alpha\eta\xi V W_\xi + (\eta^2 - 1)(V + \xi V_\xi)W_\eta - \\ - \eta(V + \xi V_\xi)W + 6\nu d\xi^2 V^2 (w_1^2 + w_1 w_2 + w_2^2) \times \\ \times w_{1\eta}^2 W + 6\nu d\xi^2 V^2 (w_{1\eta} + w_{2\eta}) w_2^3 W_\eta = 0, \quad (22)$$

а также граничные условия

$$W|_{\eta=1} = 0, \left(\nu W_\eta + 3\nu d\xi^2 V^2 w_1^2 W_\eta + \right. \\ \left. + 3\nu d\xi^2 V^2 (w_1 + w_2) w_{2\eta} W - \frac{(V + \xi V_\xi)W}{w_1 w_2}\right)\Bigg|_{\eta=0} = 0. \quad (23)$$

При достаточно большом α коэффициент при W в (22) отрицателен, $V + \xi V_\xi > 0$ по условию. По принципу максимума из (22), (23) следует, что W не может иметь ни положительного максимума, ни отрицательного минимума при $0 \le \eta < 1$. Следовательно, $W \equiv 0$ и $\bar{w} \equiv 0$.

Доказательство теоремы 3. Доказательство проводится на основе теоремы 1. Для начала покажем, что если $w(\xi, \eta)$ обладает свойствами, указанными в теореме 1, то можно с помощью замены (3) перейти от решения задачи (4), (5) к решению задачи (1), (2), существование которого утверждается в теореме 3. Согласно (3) имеем

$$w(\xi, \eta) = w\left(x, \frac{u}{U}\right) = \frac{u_y}{U}, \; x = \xi, \; y = \int_0^{\frac{u(x,y)}{U(x)}} \frac{ds}{w(x, s)}. \quad (24)$$

Отсюда в силу непрерывности функции $w(\xi, \eta)$ в $\bar{\Omega}$ и неравенства $w > 0$ при $0 \le \eta < 1$ получаем, что $\frac{u(x, y)}{U(x)}$ непрерывна и ограничена в $\bar{D}$,

$$u(0, y) = 0, \quad u(x, 0) = 0, \quad u(x, y) \to U(x) \\ \text{при } y \to \infty,$$

u_y непрерывна и ограничена в $\bar{D}$, $u_y > 0$ при $y \ge 0$, $x \ge 0$. Из (24) находим

$$u_y = wU, \quad \frac{u_{yy}}{u_y} = w_\eta, \\ u_{yy} = Uw_\eta \eta_y = w_\eta u_y, \\ u_{yyy} = w_{\eta\eta}\frac{u_y^2}{U} + w_\eta u_{yy}, \\ u_{xy} = wU_\xi + Uw_\xi + u_\xi w_\eta - uw_\eta \frac{U_\xi}{U}, \\ u_x = u\frac{U_x}{U} + wU \int_0^{\frac{u(x,y)}{U(x)}} \frac{w_\xi(x, s)}{w^2(x, s)} ds. \quad (25)$$

Из свойств функции w и её производных ввиду равенств (25) следует, что обобщённые производные u_x, u_{yy}, u_{yyy} ограничены в D, u_{xy} ограничена при конечных y. Неравенства для u, утверждаемые теоремой 3, следуют из оценок функций w, w_ξ, w_η и $ww_{\eta\eta}$. Непрерывность u_x и u_{yy} по y следует из (25). Функцию $v(x, y)$ определим равенством

$$v = \frac{1}{u_y}(-uu_x + \nu u_{yy}(1 + 3du_y^2) + UU_x). \quad (26)$$

Покажем, что u и v, определённые формулами (24), (26), удовлетворяют системе (1) и условиям (2). Функция v имеет производную по y в D. Дифференцируя (26) по y, получим

$$v_y u_y + v u_{yy} + u_y u_x + uu_{xy} - \nu u_{yyy} - \\ - 6\nu d u_y u_{yy}^2 - 3\nu d u_y^2 u_{yyy} = 0$$

или

$$v_y u_y + \frac{u_{yy}}{u_y}(-uu_x + \nu u_{yy}(1 + 3du_y^2) + \\ UU_x) + u_y u_x + uu_{xy} - \nu u_{yyy} - \\ - 6\nu d u_y u_{yy}^2 - 3\nu d u_y^2 u_{yyy} = 0. \quad (27)$$

Функция $w(\xi, \eta) = \frac{u_y}{U}$ удовлетворяет уравнению (4). Заменяя в уравнении (4) производные w через производные от u, находим, что

$$\frac{1}{U}\left\{\nu(1+3du_y^2)\frac{u_{yyy}u_y-u_{yy}^2}{u_y}-\frac{(u_{xy}u_y-u_xu_{yy})u}{u_y}-\right.$$
$$-\frac{uU_x(uu_{yy}-u_y^2)}{Uu_y}+\frac{(u^2-U^2)U_x}{U}\frac{u_{yy}}{u_y}+uu_y-$$
$$\left.-\frac{uu_yU_x}{U}+6\nu du_{yy}^2u_y\right\}=0. \quad (28)$$

Умножив (28) на U и складывая равенства (27) и (28), получим

$$u_x+v_y=0. \quad (29)$$

Уравнения (26), (29) представляют систему (1). Покажем, что $v(x, y)$ удовлетворяет условию

$$v(x,\ 0)=v_0(x).$$

Из (5) следует, что $v_0=\left[\dfrac{\nu ww_\eta(1+3dU^2w^2)+U_x}{w}\right]\Bigg|_{\eta=0}$.

Используя (26), получаем

$$v(x,\ 0)=\left[\frac{\nu u_{yy}(1+3du_y^2)+UU_x}{u_y}\right]\Bigg|_{y=0}=$$
$$=\left[\frac{\nu ww_\eta(1+3dU^2w^2)+U_x}{w}\right]\Bigg|_{\eta=0}=v_0(x).$$

Здесь мы использовали непрерывность функций u, u_x, u_y, u_{yy} по y при $y=0$, а также непрерывность w и ww_η по η. Как следует из (28), функция v, определённая равенством (26), непрерывна в $\bar{D}$ по y и ограничена при ограниченных y; v_y ограничена в D, так как $v_y=-u_x$, а $\dfrac{u}{U}$ и u ограничены.

Выведем асимптотическую формулу для отношения $\dfrac{u(x,\ y)}{U(x)}$ при $y\to\infty$. Используя оценки функций $w(\xi, \eta)$ из теоремы 1 и оценки $Y(\eta)$ из леммы 2, получаем при $\eta_0\le\eta\le1$ неравенства

$$M_1(1-\eta)(\sigma-K_4)e^{-C_1x}\le w(\xi,\ \eta)\le M_1(1-\eta)\sigma e^{C_2x}.$$

Это приводит к неравенствам

$$M_1\left(1-\frac{u}{U}\right)\left(\sigma\left(\frac{u}{U}\right)-K_4\right)e^{-C_1x}\le\frac{u_y}{U}\le$$
$$\le M_1\left(1-\frac{u}{U}\right)\sigma\left(\frac{u}{U}\right)e^{C_2x}.$$

Из того что $\sigma_y=\dfrac{\dfrac{u_y}{U}}{2\left(1-\dfrac{u}{U}\right)\sigma}$, получаем

$$\frac{2\sigma_y}{M_1e^{C_2x}}\le1\le\frac{2\sigma\sigma_y}{M_1(\sigma-K_4)e^{-C_1x}}.$$

Интегрируя последние неравенства по y от y_0, соответствующего η_0, до произвольного $y\in(y_0,\ \infty)$, получаем

$$\frac{2(\sigma-\sigma_0)}{M_1e^{C_2x}}\le y-y_0\le$$
$$\le\frac{2(\sigma-\sigma_0)}{M_1e^{-C_1x}}+\frac{2K_4}{M_1e^{-C_1x}}[\ln(\sigma-K_4)-\ln(\sigma_0-K_4)],$$

где $\sigma=\sqrt{-\ln\mu\left(1-\dfrac{u}{U}\right)}$, $\sigma_0=\sigma|_{y=y_0}$.

Из этих неравенств находим

$$\frac{(y-y_0)M_1e^{-C_1x}}{2}+K_4\ln\left(1+\frac{(y-y_0)M_1e^{C_2x}}{2(\sigma-K_4)}\right)+\sigma_0\le$$
$$\le\sigma\le\frac{(y-y_0)M_1e^{C_2x}}{2}+\sigma_0$$

и, следовательно,

$$e^{\left[-\frac{U(0)}{2\nu}y^2e^{2C_2x}+O(y)\right]}\le1-\frac{u}{U}\le e^{\left[-\frac{U(0)}{2\nu}y^2e^{-2C_1x}+O(y\ln y)\right]}$$
при $y\to\infty$,

где $M_1^2=\dfrac{2a}{\nu}$, $a=U_x(0)$. Данные неравенства доказывают справедливость формулы

$$e^{\left[-\frac{M_1^2}{4}y^2e^{2C_2x}\right]}\le1-\frac{u}{U}\le e^{\left[-\frac{M_1^2}{4}y^2e^{-2C_1x}\right]}.$$

Доказательство теоремы 4. Если u, v — решение задачи (1), (2) с этими свойствами, то с помощью замены независимых переменных (3) и введения новой неизвестной функции $w=\dfrac{u_y}{U}$ приходим к решению w задачи (4), (5), обладающему свойствами из теоремы 1, аналогично доказательству теоремы 3. Как показано выше, такое решение w единственно.

Источник финансирования. Работа Г.А. Чечкина выполнена при поддержке РФФИ (проект 18–01–00046).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Самохин В.Н.*, *Фадеева Г.М.*, *Чечкин Г.А.* Уравнения пограничного слоя для модифицированной системы Навье—Стокса // Тр. семинара им. И.Г. Петровского. 2011. Т. 28. С. 329–361.
2. *Самохин В.Н.*, *Чечкин Г.А.* Уравнения пограничного слоя обобщенно ньютоновской среды в окрест-

ности критической точки // Тр. семинара им. И.Г. Петровского. 2016. Т. 31. С. 158–176.

3. *Булатова Р.Р.*, *Самохин В.Н.*, *Чечкин Г.А.* Уравнения магнитогидродинамического пограничного слоя для модифицированной несжимаемой вязкой среды. Отрыв пограничного слоя // Пробл. мат. анализа. 2018. Т. 92. С. 83–100.
4. *Bulatova R.R.*, *Chechkin G.A.*, *Chechkina T.P.*, *Samokhin V.N.* On the Influence of a Magnetic Field on the Separation of the Boundary Layer of a Non-Newtonian MHD Medium // CR Mécanique. 2018. V. 346. № 9. P. 807–814.
5. *Олейник О.А.*, *Самохин В.Н.* Математические методы в теории пограничного слоя. М.: Наука/Физматлит, 1997. 508 с.

SYSTEM OF EQUATIONS FOR BOUNDARY LAYER OF RHEOLOGICALLY COMPLEX MEDIA. THE CROCCO VARIABLES

R. R. Bulatova[1], V. N. Samokhin[2], G. A. Chechkin[1,3]

[1] *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*
[2] *Moscow Polytechnic University, Moscow, Russian Federation*
[3] *Institute of Mathematics with Computer Center of the Ufa Science Center of the Russian Academy of Sciences, Ufa, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov February 10, 2019

Received March 21, 2019

In the paper one studies the system of equations of the boundary layer of nonlinearly viscous fluid with the O.A. Ladyzhenskaya law. Previously, these equations were considered, the Mises transform allows to reduce the system of equations to a single quasilinear equation. In this work, we use the Crocco variables, which transform the system of equations of the boundary layer into a quasilinear degenerate parabolic equation. In contrast to the Mises variables, the Crocco transformation allows one to study both stationary and non-stationary equations, moreover, it makes it possible to obtain asymptotic estimates for the solution on the boundary of the domain.

Keywords: Crocco transformation, boundary layer, rheologi, non-Newtonian media.