

УДК 535.313.6

КАУСТИКИ ВИХРЕВЫХ ОПТИЧЕСКИХ ПУЧКОВ

Академик РАН В. А. Сойфер^{1,2}, С. И. Харитонов^{1,2},
С. Н. Хонина^{1,2,*}, С. Г. Вологовский^{1,2}

Поступило 19.03.2019 г.

Работа посвящена исследованию каустик вихревых оптических пучков. Разработан асимптотический метод вычисления каустических поверхностей вихревых пучков. Рассматривается постановка обратной задачи формирования осевых каустик требуемого вида. Показано, что наличие вихревой составляющей приводит к формированию осесимметричной каустической поверхности, характерный диаметр которой растёт с увеличением топологического заряда.

Ключевые слова: вихревой пучок, топологический заряд, каустическая поверхность, асимптотический метод вычисления.

DOI: <https://doi.org/10.31857/S0869-56524872135-139>

ВВЕДЕНИЕ

Явление вихрей различной физической природы до настоящего времени изучено ещё не в полной мере, несмотря на значительное количество работ, посвящённых этой тематике. Оптические вихри и динамика распространения вихревых пучков в последнее десятилетие привлекают большое внимание исследователей в связи с фундаментальностью изучаемого явления, а также перспектив применения таких пучков в оптической передаче и обработке информации.

Отличительной особенностью оптических вихревых пучков является наличие фазового множителя $\exp(im\theta)$, где m — целое число, называемое топологическим зарядом, θ — азимутальная координата [1]. Волновой фронт вихревых пучков имеет винтовую структуру и представляет собой семейство непересекающихся поверхностей, расстояние между которыми равно длине волны излучения λ .

Характерной особенностью вихревого волнового фронта является наличие в нём фазовых сингулярных точек, в которых фаза пучка не определена, а амплитуда равна нулю. Это объясняет появление терминов “сингулярные пучки”, употребляемого наряду с термином “вихревые пучки”, и “сингулярная оптика” [2, 3].

Сингулярные особенности в световых полях могут появляться при их прохождении через случайно-неоднородные и нелинейные среды. Также возможно возбуждение вихревых пучков в лазерных резонаторах и многомодовых волоконных световодах. Наиболее эффективным способом формирования вихревых пучков является использование дифракционных оптических элементов, реализуемых в виде тонких фазовых транспарантов или зеркал с дифракционным микрорельефом [4, 5]. Примерами таких оптических элементов являются спиральная фазовая пластинка и спиральный аксикон. Далее для определённости будем полагать, что вихревой пучок формируется оптическим элементом.

В ранее опубликованных работах вихревые пучки, как правило, рассматриваются в терминах волновой теории, а каустические поверхности как предмет рассмотрения геометрической оптики изучены недостаточно.

Каустика — это огибающая семейства лучей, не сходящихся в одной точке. Каустика в оптике — это особая поверхность, вблизи которой резко возрастает интенсивность светового поля [6, 7]. В рамках геометрической оптики каустики имеют бесконечно малую толщину. С учётом волновых свойств света каустики должны иметь некоторую толщину не меньше длины волны.

В данной работе каустики вихревых оптических пучков исследованы на основе асимптотического метода вычисления поля, формируемого оптическим элементом. Физической основой этого метода является разбиение апертуры оптического элемента на малые области с характерным геометрическим размером, определяющим точность расчёта.

¹ Институт систем обработки изображений
Российской Академии наук — филиал Федерального
научно-исследовательского центра
“Кристаллография и фотоника”

Российской Академии наук, Самара

² Самарский национальный исследовательский
университет им. С.П. Королёва

*E-mail: khonina@smr.ru

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ МЕТОД ВЫЧИСЛЕНИЯ КАУСТИК

Геометрическую оптику [6, 7] можно рассматривать как коротковолновый предел классической оптики, которая, в свою очередь, основана на асимптотической аппроксимации системы уравнений Максвелла [7]. В основе коротковолновых асимптотик лежит факт, что поле описывается интегральными представлениями от быстроосциллирующих функций. В рамках геометрической оптики обычно предполагается, что на интенсивность в данной точке оказывает влияние только небольшая область оптического элемента. Математическим выражением этого факта является метод стационарной фазы [7]. Однако не всегда дифракционный интеграл можно вычислить с помощью метода стационарной фазы. В некоторых случаях использование этого метода приводит к появлению “особенностей”, которые в конечном счёте определяют каустическую поверхность. В этом случае интенсивность электромагнитного поля в точке стремится к бесконечности. Именно этот факт имеет место в окрестности геооптических каустик. Изучению каустик посвящено много работ. Классификация всех возможных каустик в общем случае была проведена В.И. Арнольдом [8], который использовал математический аппарат теории катастроф [9–11].

Особенность вихревых пучков состоит в том, что лучевая структура поля зависит от длины волны. В свою очередь, это означает, что форма огибающих лучей (каустик) также зависит от длины волны.

В данной работе каустики вихревых пучков исследуются в непараксиальном приближении, поскольку некоторые каустики при рассмотрении в рамках параксиального приближения исчезают.

Рассмотрим интеграл Кирхгофа в цилиндрической системе координат

$$U(r, \varphi, z) = \frac{iz}{\lambda} \int_{\Omega} A(\rho, \theta) \frac{\exp(ik\Psi(\rho, \theta, r, \varphi, z))}{S^2(\rho, \theta, r, \varphi, z)} \rho d\rho d\theta, \quad (1)$$

где

$$\Psi(\rho, \theta, r, \varphi, z) = \Phi(\rho, \theta) + S(\rho, \theta, r, \varphi, z), \quad (2)$$

$$S(\rho, \theta, r, \varphi, z) = \sqrt{\rho^2 + r^2 + z^2 - 2\rho r \cos(\theta - \varphi)}.$$

Здесь $\Phi(\rho, \theta)$ — эйконал оптического элемента, $S(\rho, \theta, r, \varphi, z)$ — расстояние между точкой на оптическом элементе и текущей точкой, Ω — область интегрирования.

Найдём асимптотику интеграла (1) на основе метода стационарной фазы [7], разложив эйконал (2)

в ряд Тейлора с точностью до членов второго порядка в точке (ρ_0, θ_0) в плоскости оптического элемента:

$$\Psi(\rho, \theta, r, \varphi, z) = \Psi(\rho_0, \theta_0, r, \varphi, z) + \Psi_{\rho_0}(\rho_0, \theta_0, r, \varphi, z)\rho_1 + \Psi_{\theta_0}(\rho_0, \theta_0, r, \varphi, z)\theta_1 + \frac{1}{2}(\Psi_{\rho_0\rho_0}(\rho_0, \theta_0, r, \varphi, z)\rho_1^2 + 2\Psi_{\rho_0\theta_0}(\rho_0, \theta_0, r, \varphi, z)\rho_1\theta_1 + \Psi_{\theta_0\theta_0}(\rho_0, \theta_0, r, \varphi, z)\theta_1^2), \quad (3)$$

где $\rho_1 = (\rho - \rho_0)$, $\theta_1 = (\theta - \theta_0)$.

Рассмотрим точки (r, φ, z) в трёхмерном пространстве, которые удовлетворяют условию

$$\Psi_{\rho_0}(\rho_0, \theta_0, r, \varphi, z) = 0, \quad \Psi_{\theta_0}(\rho_0, \theta_0, r, \varphi, z) = 0, \quad J(\rho_0, \theta_0, r, \varphi, z) = 0, \quad (4)$$

где $J(\rho_0, \theta_0, r, \varphi, z) = \begin{vmatrix} \Psi_{\rho\rho} & \Psi_{\rho\theta} \\ \Psi_{\rho\theta} & \Psi_{\theta\theta} \end{vmatrix}$, Ψ_{ij} — соответствующие частные производные.

Множество точек, удовлетворяющих (4), определяют трёхмерную каустическую поверхность. В этих точках главный член асимптотики интеграла (1) [12]

$$U(r, \varphi, z) \approx \frac{iz}{\lambda} \rho_0 A(\rho_0, \theta_0) \times \frac{\exp(ik\Psi(\rho_0, \theta_0, r, \varphi, z))}{S^2(\rho_0, \theta_0, r, \varphi, z)} J^{-1/2}(\rho_0, \theta_0, r, \varphi, z) \quad (5)$$

имеет бесконечное значение, так как $J(\rho_0, \theta_0, r, \varphi, z) = 0$.

Решение системы (4) приводит к параметрическому уравнению каустики

$$r(\rho, \theta) = \sqrt{(\rho + \Phi_{\rho}(\rho)S(\rho, \theta))^2 + \left(\frac{S(\rho, \theta)\Phi_{\theta}(\rho, \theta)}{\rho}\right)^2}, \quad \varphi(\rho, \theta) = \theta + \text{Atan}\left(\frac{S(\rho, \theta)\Phi_{\theta}(\rho, \theta)}{\rho}, \rho + \Phi_{\rho}(\rho, \theta)S(\rho, \theta)\right), \quad (6)$$

$$z_c(\rho, \theta) = \sqrt{S^2(\rho, \theta) + 2\rho r(\rho, \theta)\cos(\theta - \varphi(\rho, \theta)) - \rho^2 - r^2(\rho, \theta)},$$

где $S(\rho, \theta)$ удовлетворяет квадратному уравнению

$$(S(\rho, \theta) \cdot \Phi_{\rho\rho}(\rho) + (1 - \Phi_{\rho}^2(\rho, \theta))) \times (S(\rho, \theta) \cdot \Phi_{\theta\theta}(\rho) + (\rho + S(\rho, \theta) \cdot \Phi_{\rho}(\rho, \theta)) - \Phi_{\theta}^2(\rho, \theta)) - (S(\rho, \theta) \cdot \Phi_{\rho\theta}(\rho) +$$

$$+ \left(S(\rho, \theta) \cdot \frac{\Phi_\theta(\rho, \theta)}{\rho} + \Phi_\rho(\rho, \theta) \Phi_\theta(\rho, \theta) \right)^2 = 0. \quad (7)$$

В декартовой системе координат уравнение каустики имеет вид

$$\begin{aligned} x &= r(\rho, \theta) \cos[\varphi(\rho, \theta)], \\ y &= r(\rho, \theta) \sin[\varphi(\rho, \theta)], \\ z &= z_c(\rho, \theta). \end{aligned} \quad (8)$$

КАУСТИКИ ВИХРЕВЫХ ПУЧКОВ

Функция эйконала, порождающая вихревые сингулярные пучки, имеет вид

$$\Phi(\rho, \theta) = P(\rho) + \frac{m}{k_0} \theta, \quad (9)$$

где $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}$ — волновое число, $P(\rho)$ — радиальная часть эйконала оптического элемента.

Тогда выражения (6) и (7) примут следующий вид:

$$\begin{aligned} r(\rho) &= \sqrt{(\rho + P_\rho(\rho)S(\rho))^2 + \left(\left(\frac{m}{k_0} \right) \frac{S(\rho)}{\rho} \right)^2}, \\ \varphi(\rho, \theta) &= \theta + \arctg \left(\left(\frac{m}{k_0} \right) \frac{S(\rho)}{\rho}, \rho + P_\rho(\rho)S(\rho) \right), \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} z(\rho) &= \sqrt{S^2(\rho) + 2\rho r(\rho) \cos(\theta - \varphi(\rho, \theta)) - \rho^2 - r^2(\rho)}, \\ & (S(\rho) \cdot P_{\rho\rho}(\rho) + (1 - P_\rho^2(\rho))) \times \\ & \times \left(\rho(\rho + S(\rho) \cdot P_\rho(\rho)) - \left(\frac{m}{k_0} \right)^2 \right) - \left(\frac{m}{k_0} \right)^2 \times \\ & \times (S(\rho) \cdot \rho^{-1} + P_\rho(\rho))^2 = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Выражения (10), (11) показывают, что каустическая поверхность обладает радиальной симметрией. При этом формирующие её лучи имеют азимутальную составляющую (рис. 1), которая выражается функцией $\varphi(\rho, \theta)$ в (10). При $m = 0$ она отсутствует. Вектор переноса энергии также имеет азимутальную составляющую, и поле приобретает орбитальный угловой момент.

Заметим, что на основе выражений (10), (11) можно сформулировать обратную задачу поиска функции $P(\rho)$, обеспечивающей формирование каустики заданной формы.

Квадратное уравнение (11) имеет два решения: одно соответствует осевой каустике, другое — внеосевой. Рассмотрим осевую каустик. В этом случае можно записать в явном виде

$$S(\rho) = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} a &= \rho^3 P_{\rho\rho}(\rho) P_\rho(\rho) - \left(\frac{m}{k_0} \right)^2, \\ b &= \rho^3 \{ \rho P_{\rho\rho}(\rho) + [1 - P_\rho^2(\rho)] P_\rho(\rho) \} - \\ & - \left(\frac{m}{k_0} \right)^2 [2\rho P_\rho(\rho) - \rho^2 P_{\rho\rho}(\rho)], \\ c &= \rho^4 [1 - P_\rho^2(\rho)] - \rho^2 \left(\frac{m}{k_0} \right)^2. \end{aligned} \quad (13)$$

Выражение для радиальной части эйкональной функции для формирования осевой каустики имеет следующий вид [13]:

$$P(\rho) = -\int_0^\rho \frac{\xi d\xi}{\sqrt{L^2(\xi) + \xi^2}}, \quad (14)$$

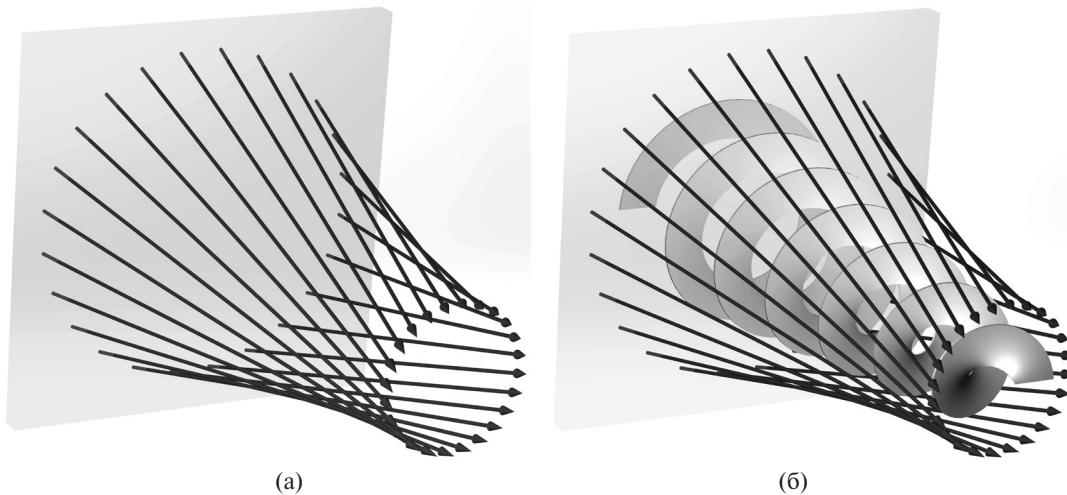


Рис. 1. Траектории лучей, образующих каустическую поверхность (а), то же с волновым фронтом вихревого пучка (б).

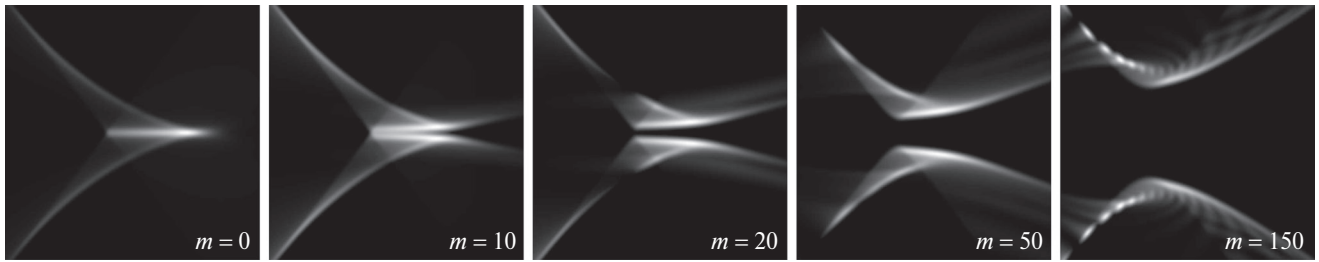


Рис. 2. Каустики вихревой линзы при различных значениях m .

где $L(\xi)$ определяет распределение энергии вдоль оптической оси.

Выражение (14) является решением обратной задачи для осевой каустики.

В частности, вихревая параболическая линза получается, когда $\sqrt{L^2(\xi) + \xi^2} = f = \text{const}$, вихревой аксикон получается, когда $\sqrt{L^2(\xi) + \xi^2} = \frac{\xi}{\alpha}$ (α — угол наклона лучей к оптической оси).

Для вычисления интенсивности воспользуемся асимптотикой интеграла Кирхгофа [12]:

$$I(x, y, z) = \int_{\Omega} I_0(\rho, \theta) \delta(x - x_0(\rho, \theta, z), y - y_0(\rho, \theta, z)) \rho d\rho d\theta, \quad (15)$$

где $I_0(\rho, \theta)$ — интенсивность освещающего пучка, $x_0(\rho, \theta, z)$, $y_0(\rho, \theta, z)$ — декартовы координаты лучей, вышедших из точки с координатами (ρ, θ) на апертуре.

Для того чтобы поле вблизи каустики не обращалось в бесконечность, заменим сингулярную функцию, входящую в интегральное выражение (16), её регулярной аппроксимацией

$$\delta(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}\right), \quad (16)$$

где σ — параметр, определяющий толщину луча. При $\sigma \rightarrow 0$ рассматриваемый асимптотический метод приводит к приближению геометрической оптики [7].

На рис. 2 показаны результаты расчёта поля с использованием разработанного асимптотического метода для вихревой линзы с различным значением топологического заряда m при $I_0(\rho, \theta) = \text{const}$. Как видно, при $m = 0$ каустика имеет классический вид: каустический “клюв”, при небольших значениях $m = 10, 20$ изменения касаются только осевой каустики, а при больших значениях $m = 50, 150$ меняется также вид внеосевой каустики и происходит смещение условной плоскости фокусировки (максимального значения) ближе к оптическому элементу.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Наличие вихревой составляющей приводит к существенному изменению каустики оптического пучка. Из каустической световой линии (при $m = 0$) формируется полая поверхность, радиус которой увеличивается с ростом номера вихревой фазовой сингулярности m .

На примере вихревой линзы показано, что при небольших значениях топологического заряда m изменения касаются только осевой каустики, при больших значениях $m > 20$ меняется также вид внеосевой каустики.

На основе полученного параметрического уравнения каустической поверхности вихревых пучков может быть решена задача формирования осевых каустик требуемого вида.

Удобство формирования и наблюдения оптических вихрей позволяет рассматривать их как основу моделирования вихрей различной физической природы.

Источники финансирования. Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках выполнения работ по Государственному заданию ФНИЦ “Кристаллография и фотоника” РАН (соглашение № 007-ГЗ/Ч3363/26).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Nye J.F., Berry M.V. Dislocations in Wave Trains // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1974. V. 336. P. 165–190. DOI: 10.1098/rspa.1974.0012.
2. Soskin M.S., Vasnetsov M.V. Singular Optics // Progress in Optics. 2001. V. 42. P. 219–276. DOI: 10.1016/S0079-6638(01)80018-4.
3. Dennis M.R., O’Holleran K., Padgett M.J. Singular Optics: Optical Vortices and Polarization Singularities // Progress in Optics. 2009. V. 53. P. 293–363. DOI: 10.1016/S0079-6638(08)00205-9.
4. Берёзный А.Е., Прохоров А.М., Сусакин И.Н., Соифер В.А. Бессель-оптика // ДАН. 1984. Т. 234. № 4. С. 802–805.
5. Khonina S.N., Kotlyar V.V., Shinkaryev M.V., Soifer V.A., Uspleniev G.V. The Phase Rotor Filter //

- J. *Modern Optics*. 1992. V. 39. № 5. P. 1147–1154. DOI: 10.1080/09500349214551151.
6. *Кравцов А.Ю., Орлов Ю.И.* Каустики, катастрофы и волновые поля // УМН. 1983. Т. 141. № 4. С. 591–627. DOI: 10.3367/UFNr.0141.198312b.0591.
 7. *Born M., Wolf E.* Principles of Optics: Electromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light. L.: Pergamon Press, 1975. 808 p. ISBN: 978-0-08-018018-2.
 8. *Арнольд В.И.* Особенности гладких отображений // УМН. 1968. Т. 23. № 1 (139). С. 3–44.
 9. *Постон Т., Стюарт И.* Теория катастроф и ее приложения. М.: Мир, 1980. 607 с.
 10. *Гилмор Р.* Прикладная теория катастроф. М.: Мир, 1984.
 11. *Berry M.V., Upstill C.* Catastrophe Optics: Morphologies of Caustics and Their Diffraction Patterns // *Progress in Optics*. 1980. V. 18. P. 257–346. DOI: 10.1016/S0079-6638(08)70215-4.
 12. *Kharitonov S.I., Volotovskiy S.G., Khonina S.N.* Hybrid Asymptotic Method for Analyzing Caustics of Optical Elements in the Axially Symmetric Case // *Computer Optics*. 2017. V. 41. № 2. P. 175–182. DOI: 10.18287/2412-6179-2017-41-2-175-1.
 13. *Методы компьютерной оптики / Под ред. В.А. Сойффера.* М.: Физматлит, 2003. 688 с. ISBN: 5-9221-0434-9.

CAUSTICS OF VORTEX OPTICAL BEAMS

Academician of the RAS **V. A. Soifer^{1,2}**, **S. I. Kharitonov^{1,2}**,
S. N. Khonina^{1,2}, **S. G. Volotovskiy^{1,2}**

¹ *IPSI RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS,
 Samara, Russian Federation*

² *Samara National Research University, Samara, Russian Federation*

Received March 19, 2019

The work is devoted to the study of caustics of vortex optical beams. An asymptotic method for calculating the caustic surfaces of vortex beams was developed. The formulation of the inverse problem of the formation of axial caustics of the required type is considered. It is shown that the presence of the vortex component leads to the formation of an axisymmetric caustic surface, the characteristic diameter of which increases with increasing topological charge.

Keywords: vortex beam, topological charge, caustic surface, asymptotic calculation method.