

УДК 532.546

ВЛИЯНИЕ ГРАДИЕНТА ДАВЛЕНИЯ И КАПИЛЛЯРНЫХ СИЛ НА ОБРАЗОВАНИЕ ЛЬДА В ГРУНТАХ

Г. Г. Цыпкин

Представлено академиком РАН А.Г. Куликовским 28.11.2018 г.

Поступило 18.12.2018 г.

Исследуется образование льда в ненасыщенном грунте при наличии градиента давления и капиллярных сил. Показано, что в линейном приближении задача определения количества образующегося льда сводится к решению неоднородного диффузионного уравнения для водонасыщенности. Получено автомодельное решение задачи в одномерном приближении. Найдено, что падение давления на охлаждающей стенке вызывает подток воды к фронту кристаллизации и приводит к увеличению объёма образующегося льда.

Ключевые слова: ненасыщенные грунты, капиллярное давление, градиент давления, фильтрация, замораживание, лёд.

DOI: <https://doi.org/10.31857/S0869-56524872147-150>

1. Натурные и лабораторные исследования показывают, что в промерзающих грунтах вода может двигаться к фронту кристаллизации. Для объяснения этого эффекта были предложены различные теории миграции влаги (плёночной миграции, сил кристаллизации, сил всасывания и т.д.) [1, 2]. Было найдено, что существенную роль в процессах переноса влаги в грунтах играют поверхностные силы. Общепринятых математических моделей, учитывающих поверхностные силы, в настоящее время не существует. Широкое распространение получил подход, основанный на формально введённых эффективных уравнениях переноса [1, 2]. В [3] обсуждались граничные условия на фронте фазового перехода вода—лёд для эффективного уравнения диффузии влаги.

Для учёта поверхностных сил в теории многофазной фильтрации, основанной на законах сохранения, М. Леверетт сделал обобщение понятия капиллярного давления на пористые среды [4]. Этот подход был использован для исследования влияния капиллярных сил на течения с фазовыми переходами в геотермальных резервуарах [5, 6]. В [7] была сформулирована задача о плавлении льда в ненасыщенном мёрзлом грунте при наличии капиллярного давления в области вода—воздух.

В настоящей работе рассматривается задача замораживания ненасыщенного грунта с учётом капиллярных сил при наличии градиента давления. Представлена полная система условий на поверх-

ности фазового перехода. Для одномерного случая найдено автомодельное решение. Показано, что падение давления на замораживающей стенке приводит к подтоку воды к фронту кристаллизации и увеличению количества образующегося льда.

2. Рассмотрим задачу о замораживании ненасыщенного недеформируемого грунта. Пусть в начальном состоянии грунт содержит гетерогенную смесь воды и воздуха с температурой T_0 и давлением воздуха P_{g0} . Если температура T^0 на некоторой неподвижной границе опускается ниже температуры фазового перехода вода—лёд, то возникает фронт кристаллизации. В общем случае образующийся лёд не заполняет поровое пространство целиком. Фронт фазового перехода разделяет две области, насыщенные водой и воздухом перед фронтом и льдом и воздухом за фронтом. Система уравнений двухфазной фильтрации в области I вода—воздух при условии несжимаемости воды имеет вид

$$\begin{aligned} \phi \frac{\partial S_w}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{v}_w &= 0, \\ \phi \frac{\partial}{\partial t} \rho_g (1 - S_w) + \operatorname{div}(\rho_g \mathbf{v}_g) &= 0, \\ \mathbf{v}_j &= -\frac{k f_j(S_j)}{\mu_j} \operatorname{grad} P_j; \quad j = g, w; \quad P_g = \rho_g R T. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь R — газовая постоянная, \mathbf{v} — (вектор) скорость фильтрации, ρ — плотность, S — насыщенность, k — проницаемость, ϕ — пористость, μ — вязкость, f — относительная фазовая проницаемость. Индексы: g — газ (воздух), w — вода.

В области 2 за фронтом, насыщенной гетерогенной смесью льда и воздуха, система уравнений следует из системы (1) при замене индекса w на индекс i , соответствующий льду, считая лёд неподвижным: $v_i = 0$.

Капиллярное давление P_c в области смеси воздух—вода связано с давлениями воды и воздуха соотношением

$$P_w = P_g + P_c. \quad (2)$$

В пористой среде, насыщенной смесью воды и газа, капиллярное давление зависит от водонасыщенности и определяется соотношением Леверетта [4]

$$P_c(S_w) = \chi \sqrt{\frac{\phi}{k}} J(S_w), \quad \chi = -4\sigma \cos\theta. \quad (3)$$

Здесь $J(S_w)$ — функция Леверетта, σ — коэффициент поверхностного натяжения, θ — контактный угол. Для смачиваемой среды $\chi < 0$.

В естественных условиях перепады давления малы по сравнению с абсолютными величинами. Пусть изменения водонасыщенности также невелики и не влияют на распределение давления. Поскольку влияние работы капиллярных сил на теплоперенос мало, то для обеих областей в линейном приближении справедливо уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a_{1,2} \Delta T, \quad a_{1,2} = \frac{\lambda_{1,2}}{(\rho C)_{1,2}}. \quad (4)$$

Исключая плотность газа, скорости фильтрации воды и газа, давление в жидкости и пренебрегая малыми слагаемыми для областей 1 и 2, получаем систему уравнений для определения неизвестных S_w и P_g :

$$\frac{\partial S_w}{\partial t} = \kappa_S \Delta S_w + \frac{\kappa}{P_{g0}} \Delta P_g, \quad \kappa_S = \chi \sqrt{\frac{k}{\phi}} \frac{f_w}{\mu_w} \frac{dJ}{dS_w},$$

$$\kappa = \frac{k f_w P_{g0}}{\phi \mu_w}, \quad (5)$$

$$\frac{\partial P_g}{\partial t} = \kappa_{g1,2} \Delta P_g, \quad \kappa_{g1} = \frac{k P_{g0}}{\phi \mu_g}, \quad \kappa_{g2} = \frac{k P_g^0}{\phi \mu_g}.$$

Здесь P_g^0 — давление воздуха на охлаждающей поверхности.

Условия на поверхности кристаллизации следуют из законов сохранения масс H_2O и газа, а также условие баланса энергии при известной температуре кристаллизации $T^* = 273,15$ К в предположении, что капиллярные силы не изменяют температуру фазового перехода:

$$\phi \left(S_i \frac{\rho_i}{\rho_w} - S_{w+} \right) V_n = \frac{k f_w (S_{w+})}{\mu_w} \text{grad}(P_{g+} + P_c(S_{w+})), \quad (6)$$

$$\phi (S_{w+} - S_i) V_n = \frac{k f_g (S_{w+})}{\mu_g} \text{grad} P_{g+} -$$

$$- \frac{k f_g (S_{w-})}{\mu_g} \text{grad} P_{g-}, \quad (7)$$

$$\phi S_i \rho_i q V_n = \lambda_f (\text{grad} T)_{n+} - \lambda_m (\text{grad} T)_{n-}. \quad (8)$$

Здесь q — теплота фазового перехода лёд—вода, $V(t)$ — скорость фронта кристаллизации. Индексы “плюс” и “минус” — значения величин соответственно перед и за фронтом, n — нормаль.

Сформулированная задача содержит четыре неизвестных параметра: V , P_{g^*} , S_i и S_{w+} . Для их определения имеется три закона сохранения на границе кристаллизации (6)–(8). Для замыкания системы соотношений необходимо дополнительное условие, связывающее искомые параметры.

Центральным положением теории двухфазной фильтрации, подтверждённым экспериментально, является положение о том, что вода и газ движутся по разным поровым каналам. В смачиваемой среде каналы меньшего диаметра заняты жидкостью (водой), а большего диаметра — газом. При переходе воды в кристаллическое состояние объём увеличивается, что приводит к росту давления воды перед фронтом и её оттоку от фронта. Течение, во-первых, осуществляется по каналам, уже занятым водой, а, во-вторых, из-за повышения давления в воде происходит её проникновение в каналы большего диаметра. Соответственно водонасыщенность перед фронтом кристаллизации возрастает. Лёд может образовываться только в тех порах и каналах, которые содержат воду. Следовательно, весь растущий кристалл льда в пористой среде должен омываться водой. Из этих соображений следует дополнительное условие равенства насыщенностей воды и льда $S_i = S_{w+}$, которое замыкает систему соотношений на поверхности кристаллизации.

3. Рассмотрим полубесконечную задачу в одномерном приближении. Пусть в начальном состоянии талый грунт с водонасыщенностью S_{w0} занимает полупространство $x > 0$. Если температура на неподвижной стенке $x = 0$ опускается ниже температуры фазового перехода вода—лёд, то вправо распространяется фронт кристаллизации,двигающийся по закону $x = X(t)$. Если начальные и граничные температура, давление и водонасыщенность являются постоянными величинами, то задача имеет автомодельное решение $X(t) = 2\sqrt{a_1 t} \gamma$. В области за фронтом имеем

$$T = T^0 + (T_* - T^0) \frac{\operatorname{erf}(\zeta \sqrt{a_1/a_2})}{\operatorname{erf}(\gamma \sqrt{a_1/a_2})},$$

$$P_g = P_g^0 + (P_{g^*} - P_g^0) \frac{\operatorname{erf}(\zeta \sqrt{a_1/a_2})}{\operatorname{erf}(\gamma \sqrt{a_1/a_2})}.$$

В области перед фронтом

$$T = T_0 + (T_* - T_0) \frac{\operatorname{erfc}(\zeta)}{\operatorname{erfc}(\gamma)},$$

$$P_g = P_{g0} + (P_{g^*} - P_{g0}) \frac{\operatorname{erfc}(\zeta \sqrt{a_1/\kappa_{g1}})}{\operatorname{erfc}(\gamma \sqrt{a_1/\kappa_{g1}})},$$

$$S_w = S_{w0} + (S_{w^*} - S_{w0}) \frac{\operatorname{erfc}(\zeta \sqrt{a_1/\kappa_S})}{\operatorname{erfc}(\gamma \sqrt{a_1/\kappa_S})} +$$

$$+ \frac{\kappa}{\kappa_{g1} - \kappa_S} \left(\frac{P_{g^*}}{P_0} - 1 \right) \times$$

$$\times \left[\frac{\operatorname{erfc}(\zeta \sqrt{a_1/\kappa_{g1}})}{\operatorname{erfc}(\gamma \sqrt{a_1/\kappa_{g1}})} - \frac{\operatorname{erfc}(\zeta \sqrt{a_1/\kappa_S})}{\operatorname{erfc}(\gamma \sqrt{a_1/\kappa_S})} \right].$$

Здесь $\zeta = x/2\sqrt{a_1 t}$, P_g^0 — давление газа на стенке.

Подстановка полученных решений в соотношения (6)–(8) сводит задачу к численному исследованию системы трансцендентных уравнений для определения автомодельной скорости γ , давления газа на фронте P_{g^*} и насыщенности льда S_i .

Численные эксперименты были проведены при характерных значениях параметров. Поскольку при кристаллизации объём H_2O возрастает, то значение водонасыщенности на фронте при отсутствии градиента давления должно быть больше начального значения (рис. 1). Согласно диффузионному уравнению (5), вода в области *I* оттекает от фронта, а объём льда (область 2) не превосходит невозмущённое значение $S_{i0} = S_{w0}\rho_w/\rho_i$, которое определяется из условия неподвижности воды.

Если давление воздуха на неподвижной стенке больше начального, то возникает течение от фронта кристаллизации и, соответственно, количество образующегося льда уменьшается (кривая *I*, рис. 2). При высоких проницаемостях и относительно большом градиенте давления объёмная доля образующегося льда может принимать значение, которое меньше начальной водонасыщенности (кривая 2). В этом случае наибольшее значение водонасыщенности достигается на некотором удалении от фронта кристаллизации. Такая ситуация возникает при искусственном замораживании охлаждённым воздухом, и наиболее эффективный режим будет реализовываться при наименьшем градиенте давления.

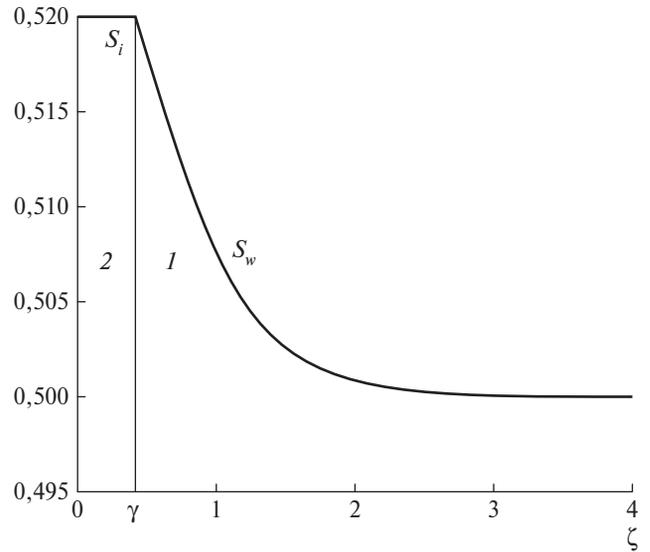


Рис. 1. Характерное распределение насыщенностей воды и льда. $\phi = 0,25$; $k = 5 \cdot 10^{-14} \text{ м}^2$; $T_0 = 280 \text{ К}$; $T^0 = 260 \text{ К}$; $S_{w0} = 0,5$; $P_{g0} = P_g^0 = 10^5 \text{ Па}$.

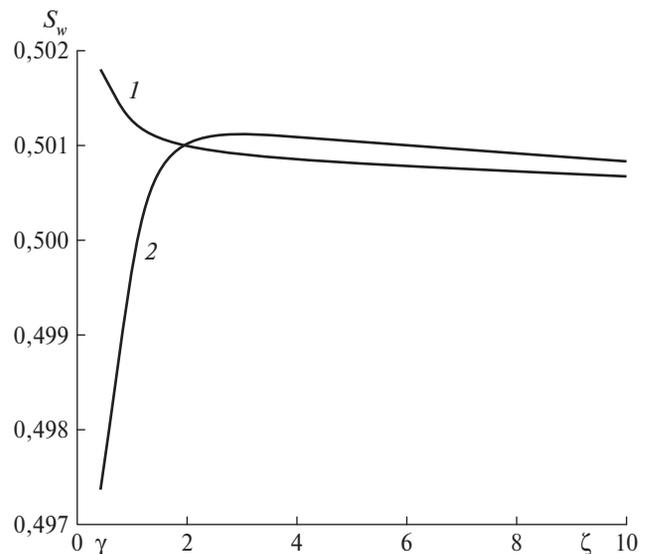


Рис. 2. Распределение водонасыщенности при увеличении давления P_g^0 на замораживающей стенке. $k = 0,5 \cdot 10^{-14} \text{ м}^2$. Остальные параметры, как на рис. 1. $P_g^0 = 1,2 \cdot 10^5 \text{ (1)}$; $P_g^0 = 1,25 \cdot 10^5 \text{ Па (2)}$.

При падении внешнего давления P_g^0 реализуется обратный процесс — возникает течение воды к фронту кристаллизации. Тогда в область фазового перехода поступают дополнительные объёмы воды, что приводит к увеличению насыщенности льда (рис. 3). При этом образуется минимум водонасыщенности на некотором удалении от фронта. Отметим, что в рассматриваемом приближении распределение насыщенности не влияет на распределение давления, поэтому представленная математическая модель не описывает блокирование течения образующейся твёрдой фазой [8].

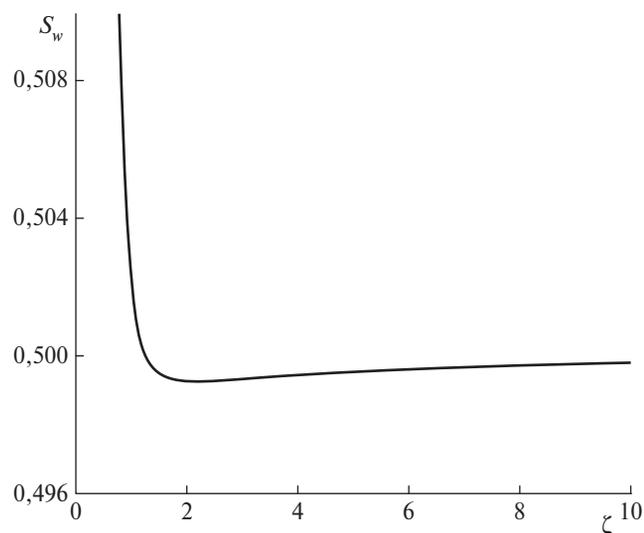


Рис. 3. Распределение водонасыщенности при падении давления на стенке. $P_g^0 = 0,8 \cdot 10^5$ Па. Остальные параметры, как на рис. 2.

Понижение температуры на границе приводит к росту количества образующегося льда (рис. 4), поскольку при интенсивном процессе кристаллизации отток воды от фронта уменьшается.

Источник финансирования. Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 16–01–00363.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Цытович Н.А. Механика мерзлых грунтов. М.: Вышш. шк., 1973. 446 с.
2. Hoekstra P. // Water Resources Res. 1966. V. 2. № 2. P. 241–250.

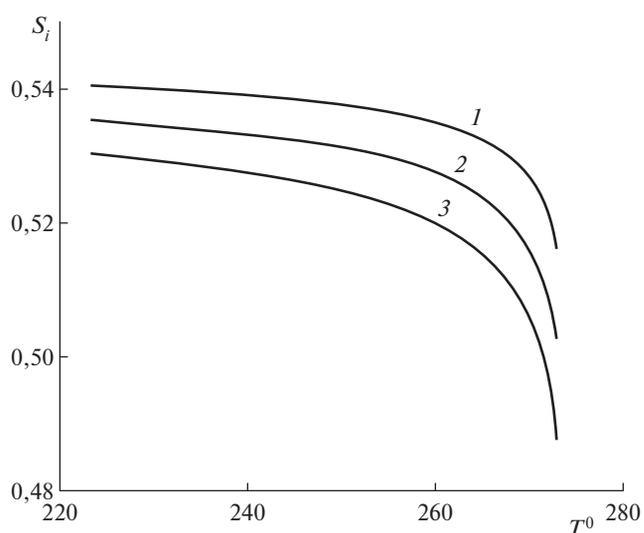


Рис. 4. Зависимость насыщенности льда от температуры T^0 на стенке. $P_g^0 = 0,8 \cdot 10^5$ (1), $P_g^0 = 10^5$ (2), $P_g^0 = 1,2 \cdot 10^5$ Па (3).

3. Жесткова Т.Н. Формирование криогенного строения грунтов. М.: Наука, 1982. 216 с.
4. Leverett M.C. // Trans. AIME. 1941. V. 142. № 1. 152–169.
5. Li K., Horne R.N. SPE Reservoir Evaluation and Engineering. 2001. V. 4. P. 477–482.
6. Tsytkin G.G., Calore C. // Geothermics. 2003. V. 32. № 3. 219–237.
7. Цыпкин Г.Г. // Изв. РАН. МЖГ. 2010. № 6. С. 130–140.
8. Tsytkin G.G., Woods A.W. // J. Fluid Mech. 2005. V. 537. P. 35–53.

INFLUENCE OF PRESSURE GRADIENT AND CAPILLARY FORCES ON ICE FORMATION IN SOIL

G. G. Tsytkin

*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences,
Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS A.G. Kulikovskiy November 28, 2018

Received December 18, 2018

Ice formation in unsaturated soil is investigated, in the presence of pressure gradient and capillary forces. It is shown that in linear approximation the problem of determining of the amount of ice formed reduces to solving a non-uniform diffusion equation for water saturation. Similarity solution of the problem in one-dimensional case is obtained. It is found that the pressure drop at the cooling wall causes flow of water towards the crystallization front and leads to an increase in the amount of ice that forms.

Keywords: unsaturated soils, capillary pressure, pressure gradient, filtration, freezing, ice.