ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2019, том 488, № 4, с. 362–366

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 517.956.237:539.3(5)

БЕСКОНЕЧНАЯ ПЛАСТИНА КИРХГОФА НА КОМПАКТНОМ УПРУГОМ ОСНОВАНИИ МОЖЕТ ИМЕТЬ СКОЛЬ УГОДНО МАЛОЕ СОБСТВЕННОЕ ЧИСЛО

С. А. Назаров

Представлено академиком РАН Н.Ф. Морозовым 04.03.2019 г.

Поступило 22.05.2019 г.

Изучена неоднородная пластина Кирхгофа, состоящая из полубесконечной полосы-волновода и компактного резонатора, который контактирует с винклеровским основанием малой переменной податливости. Показано, что для любого $\varepsilon > 0$ можно подобрать коэффициент податливости $O(\varepsilon^2)$, при котором у описанной пластины возникает собственное число ε^4, вкрапленное в непрерывный спектр. Результат неожиданный потому, что у акустического волновода (спектральная задача Неймана для оператора Лапласа) малых собственных чисел нет при любом незначительном возмущении. Пояснены причины такого разлада.

Ключевые слова: пластина Кирхгофа, винклеровское основание, собственное число в непрерывном спектре, асимптотический анализ.

DOI: https://doi.org/10.31857/S0869-56524884362-366

1. Постановка задачи. На ультранизкой частоте строится изгибная волна, захваченная неоднородной пластиной Кирхгофа [1], которая частично лежит на винклеровском основании [2, 3] с малой переменной податливостью. Поскольку сопутствующее собственное число попадает внутрь непрерывного спектра оператора задачи, оно обладает природной неустойчивостью, а построение решения задачи, затухающего на бесконечности с экспоненциальной скоростью, требует точной настройки нескольких параметров пластины и основания. Новизна результата состоит в том, что в подробно изученной задаче Неймана для оператора Лапласа, описывающей акустические волноводы, захваченных волн на достаточно малых частотах не существует (ср. [4]). В разделе 5 будут пояснены причины возникновения и отсутствия захваченных волн на частотах, приближенных к порогам непрерывного спектра, в разных задачах математической физики.

Пластина $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ состоит из единичной (произвели масштабирование) полуполосы-пластины $\Pi_+ = \left\{ x = (y, z):\ z > 0,\ |y| < \frac{1}{2} \right\}$ и резонатора Θ, ограниченной области в полуплоскости $\mathbb{R}^2_- = \{x: y < 0\}$ (рис. 1). Границу $\partial\Omega$ для простоты формулировок считаем гладкой, класса C^∞. Рассмотрим задачу о собственных колебаниях пластины Кирхгофа [1, §30] на винклеровском основании

$$\Delta^2 u_\varepsilon(x) + a_\varepsilon(x) u_\varepsilon(x) = \lambda_\varepsilon \rho_\varepsilon(x) u_\varepsilon(x),\ \ x \in \Omega, \quad (1)$$

$$N^q(x, \nabla) u_\varepsilon(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega,\ \ q = 2, 3. \quad (2)$$

Здесь u_ε — прогиб пластины, $\lambda_\varepsilon = D^{-1}\omega_\varepsilon^2$, $D > 0$ — цилиндрическая жёсткость пластины, $\omega_\varepsilon > 0$ — частота колебаний, а плотность пластины

$$\rho_\varepsilon(x) = 1 + \varepsilon^{-2}\rho_0(x) \quad (3)$$

сведена к единице в волноводе Π_+, т.е. $\rho_0 = 0$ на Π_+, но резонатор значительно более тяжёлый, так как ε^{-2} — большой параметр (см. далее формулу (5)) и $\rho \geqslant 0$ — гладкая функция на замыкании резонатора Θ. Кроме того, $\nabla = \mathrm{grad}$, $\Delta = \nabla \cdot \nabla$ — оператор Лапласа, а $N^q(x, \nabla)$ — операторы краевых условий свободного края пластины [5; 1, §30]

$$N^3(x, \nabla) u_\varepsilon(x) = \partial_n \Delta - (1 - \nu)(\partial_s k(s) \partial_s - \partial_s^2 \partial_n),$$

$$N^2(x, \nabla) u_\varepsilon(x) = \Delta - (1 - \nu)(\partial_s^2 - k(s)\partial_n),$$

$$\partial_s = \frac{\partial}{\partial s}, \quad \partial_n = \frac{\partial}{\partial n}.$$

При этом $\nu \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ — коэффициент Пуассона, k — кривизна дуги $\partial\Omega$, а (n, s) — локальная система криволинейных координат, n — ориентированное расстояние до $\partial\Omega$, $n > 0$ вовне Ω, и s — длина дуги на $\partial\Omega$. Наконец, Da_ε — коэффициент податливости винклеровского основания Θ, который (коэффициент) ищем в виде

$$a_\varepsilon(x) = \varepsilon^2 a_0(x) + \varepsilon^3 \tau_{0\varepsilon} b_0(x) + \varepsilon^3 \tau_{1\varepsilon} b_1(x) + \varepsilon^3 \tau_{2\varepsilon} b_2(x), \quad (4)$$

Санкт-Петербургский государственный университет

E-mail: srgnazarov@yahoo.co.uk

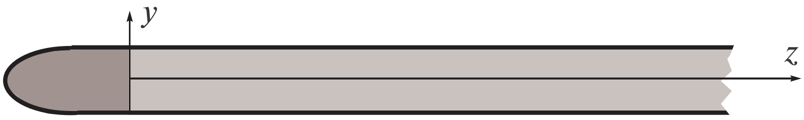

Рис. 1. Полубесконечная пластина с резонатором (тонирован).

где $\varepsilon > 0$ — малый безразмерный параметр, $a_0 \geqslant 0$, а $\tau_{0\varepsilon}$, $\tau_{1\varepsilon}$, $\tau_{2\varepsilon}$ — дополнительные параметры, вариация которых вместе с удачным подбором гладких функций a_0, ρ_0 и b_0, b_1, b_2 с носителями в $\overline{\Theta}$ обеспечивают появление собственного числа задачи (1), (2)

$$\lambda_\varepsilon = \varepsilon^4. \tag{5}$$

Иными словами, неоднородная и тяжёлая конечная часть Θ пластины Ω контактирует со средой, упругой ортотропной с непостоянными модулями, или неоднородной жидкой, — такой контакт принято моделировать совокупностью близко расположенных пружинок переменной жёсткости (ср. [2, 3]). Именно природная неустойчивость собственного числа, вкрапленного в непрерывный спектр пластины, требует введения в данные задачи многих параметров, подлежащих фиксации.

Вариационная формулировка задачи (1), (2)

$$2E(u_\varepsilon, v; \Omega) + (a_\varepsilon u_\varepsilon, v)_\Omega = \lambda_\varepsilon(\rho_\varepsilon u_\varepsilon, v)_\Omega \quad \forall v \in H^2(\Omega) \tag{6}$$

осуществляется на пространстве Соболева $H^2(\Omega)$ и содержит скалярное произведение $(\ ,\ )_\Omega$ в пространстве Лебега $L^2(\Omega)$, а также функционал энергии пластины Кирхгофа [1, §30]

$$E(u, u; \Omega) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\Delta u|^2 + 2(1-\nu)\left(\left|\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}\right|^2 - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \right) dx. \tag{7}$$

Поскольку билинейная форма в левой части интегрального тождества симметрична, положительна и замкнута в $H^2(\Omega)$, задаче (1), (2) или (6) отвечает [6, гл. 10] положительный самосопряжённый оператор A_ε в $L^2(\Omega)$ с непрерывным спектром $\sigma_c^\varepsilon = [0, +\infty)$, который может содержать точечный спектр σ_p^ε, — непустота последнего и будет достигнута далее.

2. Статическая задача. Рассмотрим задачу Неймана для бигармонического оператора

$$\Delta^2 u(x) = f(x), \quad x \in \Omega,$$
$$N^q(x, \nabla) u(x) = g^q(x), \quad x \in \partial\Omega, \quad q = 2, 3. \tag{8}$$

Введём весовое пространство Соболева $W_\beta^l(\Omega)$ с нормой

$$\| v;\ W_\beta^l(\Omega) \| = \left(\sum_{j=0}^{l} \| e^{\beta z} \nabla^j v;\ L^2(\Omega) \|^2 \right)^{1/2},$$

где $l \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ и $\beta \in \mathbb{R}$ — показатели гладкости и веса. Кроме того, $W_\beta^{l+1/2}(\Omega)$ — пространство следов на $\partial\Omega$ функций из $W_\beta^{l+1}(\Omega)$, снабжённое естественной следовой нормой. Нетрудно проверить, что всякое медленно растущее решение однородной задачи в цельной бесконечной полосе Π оказывается полиномом

$$\mathcal{P}(x) = c_{10} + c_{11} z + c_{12} \cdot \frac{1}{2}(z^2 - \nu y^2) +$$
$$+ c_{13}\left(\frac{1}{6} z^2 - \frac{\nu}{2} y^2 z \right) + c_{20} y + c_{21} yz, \tag{9}$$

с произвольным вектором коэффициентов $c = (c', c'') \in \mathbb{R}^6$. Символом $\wp$ далее обозначаем произвольную линейную функцию, у которой $c'' = (c_{12}, c_{13}, c_{21}) = 0 \in \mathbb{R}^3$ в формуле (9).

Сформулируем утверждение, обеспеченное общими результатами [7, гл. 5; 8, §3].

Предложение. 1. *Пусть при некотором* $\beta > 0$ *правые части* $f \in W_\beta^0(\Omega)$, $g^q \in W_\beta^{4-q-1/2}(\partial\Omega)$, $q = 2, 3$, *удовлетворяют условиям ортогональности*

$$(f, \wp)_\Omega - (g^3, \wp)_{\partial\Omega} + (g^2, \partial_n \wp)_{\partial\Omega} = 0 \quad \forall \wp. \tag{10}$$

Найдётся такая величина $\beta(\nu) > 0$, *что при* $\beta \in (0, \beta(\nu))$ *задача* (8) *имеет единственное исчезающее на бесконечности решение* $u \in W_\beta^4(\Omega)$ *и верна оценка*

$$\| u; W_\beta^4(\Omega) \| \leqslant c\Big(\| f; W_\beta^0(\Omega) \| +$$
$$+ \| g^2; W_\beta^{3/2}(\partial\Omega) \| + \| g^3; W_\beta^{1/2}(\partial\Omega) \| \Big). \tag{11}$$

2. *Если условие нарушено, то всё-таки существует решение* $u = \tilde{u} + \mathcal{P}$, *которое определено с точностью до линейного слагаемого* $\wp$ *и состоит из полинома* (9) *и экспоненциально затухающего остатка* $\tilde{u} \in W_\beta^4(\Omega)$.

3. Волны в бесконечной пластине-полосе. Найдём решения

$$w_\varepsilon^1(y, z) = e^{\varepsilon \mu_\varepsilon^1 z} W_\varepsilon^1(y), \quad w_\varepsilon^2(y, z) = e^{\varepsilon^2 \mu_\varepsilon^2 z} W_\varepsilon^2(y) \tag{12}$$

задачи в бесконечной полосе

$$\Delta^2 w_\varepsilon(x) = \varepsilon^4 w_\varepsilon(x), \quad x \in \Pi := \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \times \mathbb{R},$$
$$N^q(x, \nabla) w_\varepsilon(x)\left(\pm\frac{1}{2}, z \right) = 0, \quad z \in \mathbb{R},\ q = 2, 3. \tag{13}$$

В результате подстановки изгибной волны w_ε^1 в задачу (13) получаем краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения на отрезке $\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right) \ni y$, которую следует интерпретировать как полиномиальный пучок из-за присутствия степеней вспомогательного спектрального параметра μ_ε^1:

$$\partial_y^4 W_\varepsilon^1(y) + 2\varepsilon^2(\mu_\varepsilon^1)^2 \partial_y^2 W_\varepsilon^1(y) + \\ + \varepsilon^4(\mu_\varepsilon^1)^4 W_\varepsilon^1(y) = \varepsilon^4 W_\varepsilon^1(y), \\ y \in \left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right), \\ \pm\partial_y^3 W_\varepsilon^1\left(\pm\frac{1}{2}\right) = \mp(2-\nu)\varepsilon^2(\mu_\varepsilon^1)^2 \partial_y W_\varepsilon^1\left(\pm\frac{1}{2}\right), \\ \partial_y^2 W_\varepsilon^1\left(\pm\frac{1}{2}\right) = -\nu\varepsilon^2(\mu_\varepsilon^1)^2 \partial_y W_\varepsilon^1\left(\pm\frac{1}{2}\right). \quad (14)$$

Реализуем разработанный в [9, гл. 9] алгоритм построения асимптотики собственных чисел операторных пучков и найдём ингредиенты первой волны (12) в виде

$$\mu_\varepsilon^1 = \mu_1 + \ldots, \\ W_\varepsilon^1(y) = 1 - \varepsilon^2(\mu_\varepsilon^1)^2 \frac{\nu}{2} y^2 + \varepsilon^4 W_1(y) + \ldots. \quad (15)$$

Здесь μ_ε^1 и W_1 — число и функция, подлежащие определению, а многоточие заменяет младшие асимптотические члены. Подставим анзацы (15) в задачу (14), соберём коэффициенты при одинаковых степенях параметра ε и последовательно решим полученные задачи. Условием разрешимости задачи для W_1 служит алгебраическое уравнение $1-\mu_1^4(1-\nu^2)=0$, у которого есть четыре корня

$$\mu_{1\pm}^{\mathrm{re}} = \pm\mu_1,\ \mu_{1\pm}^{\mathrm{im}} = \pm i\mu_1 \quad \left(\mu_1 = (1-\nu^2)^{-1/4}\right). \quad (16)$$

В случае крутильной волны w_ε^2 в задаче (14) происходит замена $\varepsilon\mu_\varepsilon^1 \mapsto \varepsilon^2\mu_\varepsilon^2$, а анзацы для решения приобретают вид

$$\mu_\varepsilon^2 = \mu_2 + \ldots,\quad W_\varepsilon^1(y) = y + \varepsilon^2 W_2(y) + \ldots, \quad (17)$$

причём условием разрешимости возникающей задачи для W_2 служит квадратное уравнение $1+24(1-\nu)\mu_2^2 = 0$ с чисто мнимыми корнями

$$\mu_{2\pm}^{\mathrm{im}} = \pm i\mu_2 \quad \left(\mu_2 = (24(1-\nu))^{-1/2}\right).$$

Поскольку ввиду формальной самосопряжённости задачи (8) и вещественности коэффициентов дифференциальных операторов спектр пучка, порождённого задачей (13), симметричен относительно обеих, вещественной и мнимой, осей на комплексной плоскости, имеется в точности четыре волны $w_{\varepsilon\pm}^{j\,\mathrm{im}}$ с чисто мнимыми показателями $\pm\varepsilon^j i\mu_\varepsilon^j$, $j=1,2$, и две волны $w_{\varepsilon\pm}^{1\mathrm{re}}$ с вещественными показателями $\pm\varepsilon^1\mu_\varepsilon^1$. Для затухающей при $z\to+\infty$ волны $w_{\varepsilon-}^{1\mathrm{re}}$ справедливо разложение

$$w_{\varepsilon-}^{1\mathrm{re}}(x) = 1 - \varepsilon(\mu_1 + \varepsilon\mu_1' + \varepsilon^2\mu_1'')z + \\ + \varepsilon^2(\mu_1 + \varepsilon\mu_1')\frac{1}{2}(z^2 - \nu y^2) - \\ - \varepsilon^3\mu_1^3 \frac{z}{2}\left(\frac{z^2}{3} - \nu y^2\right) + O\left(\varepsilon^3(1+z)^4\right), \quad (18)$$

где μ_1 — число (16), а числа μ_1' и μ_1'' далее востребованы не будут.

4. Построение захваченной волны. Для упрощения формул предположим, что $\Omega\subset\Pi$ (ср. рис. 1), т.е. волны (12) определены всюду на пластине Ω. Захваченную волну ищем в виде

$$w_\varepsilon^{\mathrm{tr}}(x) = w_{\varepsilon-}^{1\mathrm{re}}(x) + \varepsilon^2 u_0(x) + \varepsilon^3 u_1(x) + \varepsilon^3 u_\varepsilon'(x), \quad (19)$$

где первое слагаемое справа — медленно, со скоростью $O(e^{-\varepsilon\mu_\varepsilon^1 z})$, затухающая волна (12) (см. соотношения (16) и (18)), а остальные три затухают со скоростью $o(e^{-\eta z})$, причём величина $\eta\in(0,\beta(\nu))$ не зависит от малого параметра ε.

Подставим анзац (19) в задачу (1), (2) и соберём коэффициенты при ε^2. При учёте формул (3)–(5) и (18) получим для u_0 задачу (8) с правыми частями

$$f_0(x) = \rho_0(x) - a_0(x), \\ g_0^q(x) = -\frac{1}{2}\mu_1^2 N^q(x,\nabla)(z^2-\nu y^2),\quad q=2,3.$$

Условия (10) существования экспоненциально затухающего решения приводят к равенствам

$$\int_\Theta z(a_0(x)-\rho_0(x))\,dx = |\mu_1|^2(1-\nu^2) = \sqrt{1-\nu^2}, \\ \int_\Theta (a_0(x)-\rho_0(x))\,dx = 0,\ \int_\Theta y(a_0(x)-\rho_0(x))\,dx = 0. \quad (20)$$

Правая часть первого равенства учитывает неоднородность краевых условий и вычисляется при помощи метода [10] (см. также [7, гл. 3, §2]): в формулу Грина подставляются полиномы $\frac{1}{2}(z^2-\nu y^2)$ и z, а при проверке остальных двух равенств вместо z используются другие линейные функции 1 и y.

Удовлетворить соотношения (20) нетрудно, подобрав неотрицательные гладкие функции ρ_0 и a_0, разумеется, не единственным образом. Пусть

$$\theta_\zeta = \{x\in\Theta:\ a_0 \geqslant \zeta\} \text{ при некотором } \zeta > 0.$$

Можно найти функции b_0, b_1, b_2, для которых, во-первых, выполнены условия ортогональности и нормировки

$$\int_\Theta b_k(x)dx = \delta_{0,k},\ \int_\Theta y b_k(x)dx = \delta_{1,k},\ \int_\Theta z b_k(x)dx = \delta_{2,k}, \quad (21)$$

где $\delta_{j,k}$ — символ Кронекера, и, во-вторых, носители $\operatorname{supp} b_k$ содержатся в θ_ζ, т.е. коэффициент податливости (4) остаётся неотрицательным при $\varepsilon \in (0,\ \varepsilon_\zeta)$ и $|\tau_{p\varepsilon}| \leqslant \tau_\zeta$; здесь $p = 0, 1, 2$, а ε_ζ и τ_ζ — некоторые положительные числа.

Продолжим асимптотическую процедуру и положим

$$\tau_{p\varepsilon} = \tau_{p0} + \tau'_{p\varepsilon}, \quad \tau'_\varepsilon = (\tau'_{0\varepsilon}, \tau'_{1\varepsilon}, \tau'_{2\varepsilon}). \quad (22)$$

Соберём коэффициенты при ε^3 и получим для слагаемого u_1 анзаца (19) задачу (8), правая часть f_1 которой в силу представлений (18), (4) и (22) включает сумму $\tau_{00}b_0 + \tau_{10}b_1 + \tau_{20}b_2$. Благодаря соотношениям (21) можно подобрать вектор коэффициентов $\tau_0 = (\tau_{00}, \tau_{10}, \tau_{20}) \in \mathbb{R}^3$ так, чтобы были выполнены условия разрешимости (10), гарантирующие существование экспоненциально затухающего решения u_1.

Намеченную процедуру построения асимптотики можно было бы продолжить, однако подобные действия бесполезны, так как доказать сходимость полученного формального ряда для коэффициентов (22) затруднительно. Поэтому применим процедуру "точной настройки" [4, 11] параметров волновода для построения собственных чисел, вкрапленных в непрерывный спектр и потому неустойчивых. Именно, переделаем задачу (1), (2) для $w_\varepsilon^{\mathrm{tr}}$ в задачу (8) для u'_ε с правыми частями

$$f'_\varepsilon(x; u'_\varepsilon, \tau'_\varepsilon) = \varepsilon f^\bullet_\varepsilon(x; u'_\varepsilon, \tau'_\varepsilon) + \tau'_{0\varepsilon}b_0(x) + \\ + \tau'_{1\varepsilon}b_1(x) + \tau'_{2\varepsilon}b_2(x) \text{ и } g_\varepsilon^{2'}(x),\ g_\varepsilon^{3'}(x),$$

определёнными по найденным функциям $w_{\varepsilon-}^{1\mathrm{re}}$, u_0, u_1 и вектору τ_0, однако слагаемое $f^\bullet_\varepsilon$ также квадратично зависит от неизвестных u'_ε и τ'_ε. В силу соотношений (22) условия разрешимости (10) этой задачи принимают вид

$$\tau'_{p\varepsilon} = R_p^\varepsilon(u'_\varepsilon, \tau'_\varepsilon), \quad p = 0,\ 1,\ 2,$$

с непрерывными функционалами R_p^ε и вместе с равенством $u'_\varepsilon = R_\beta(f'_\varepsilon, g_\varepsilon^{2'}, g_\varepsilon^{3'})$, включающим обратный оператор

$$R_\beta\colon\ W_\beta^0(\Omega) \times W_\beta^{3/2}(\partial\Omega) \times W_\beta^{1/2}(\partial\Omega) \to W_\beta^4(\Omega)$$

задачи (8) в классе функций с экспоненциальным затуханием на бесконечности, образуют абстрактное уравнение

$$(u'_\varepsilon, \tau'_\varepsilon) = \mathcal{R}^\varepsilon(u'_\varepsilon, \tau'_\varepsilon) \text{ в } \mathcal{H} = W_\beta^4(\Omega) \times \mathbb{R}^3 \quad (23)$$

со сжимающим оператором $\mathcal{R}^\varepsilon$ на шаре $\mathcal{B}_r$ в $\mathcal{H}$ с некоторым радиусом $r > 0$. Благодаря использованным асимптотическим конструкциям и аналитической зависимости атрибутов μ_ε^j и W_ε^j волн (12) от параметра ε^j (см. [9, гл. 9]) норма оператора $\mathcal{R}^\varepsilon$ есть $O(\varepsilon)$. В итоге принцип Банаха сжимающих отображений обеспечивает существование решения уравнения (23) в шаре $\mathcal{B}_r$ и оценку $\|(u'_\varepsilon, \tau'_\varepsilon); \mathcal{H}\| \leqslant c\varepsilon$, а значит, построено исчезающее на бесконечности решение (19) задачи (1), (2), в которой коэффициент податливости винклеровского основания определён формулами (4) и (22).

5. Единственность захваченной волны на малых частотах. Сформулируем основной результат.

Теорема. *Существуют такие величины* $\varepsilon_\Omega > 0$ *и* $d_\Omega > 1$, *зависящие от формы волновода* Ω, *что при* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_\Omega)$ *задача* (1), (2) *со спектральным параметром* (5) *и коэффициентами* (3) *и* (4), (22), *найденными согласно приведённой процедуре, включающей решение трансцендентного уравнения* (23), *имеет затухающее на бесконечности решение* (19), *т.е. захваченную волну. На интервале* $(0, \varepsilon^4 d_\Omega)$ *собственное число* (5) *простое и единственное.*

Осталось проверить простоту и единственность. С этой целью воспользуемся разработанной в статье [4] схемой. Предположим, что нашлась бесконечно малая положительная последовательность $\{\varepsilon_m\}_{m=1}^\infty$ (далее индекс m не пишем) и функции a_ε и ρ_0, допускающие оценки $|a_\varepsilon(x)| \leqslant c\varepsilon^2$ и $|\rho_0| \leqslant c$, при которых у задачи (1), (2) есть захваченная волна $u_\varepsilon \in H^4(\Omega)$. Нормируем её в $L^2(\Theta)$ и осуществим предельный переход $\varepsilon \to +0$ в пространстве $W_{-\beta}^4(\Omega)$ экспоненциально растущих функций. В результате слабый в $W_{-\beta}^4(\Omega)$ и сильный в $L^2(\Theta)$ предел u_0 оказывается решением однородной задачи (8), т.е. $u_0(x) = \wp(x) = c_0 + c_1 y + c_2 z$. Убедимся в том, что $c_1 = c_2 = 0$, и тем самым получим равенство $u_0(x) = c_0 \neq 0$, так как $\|u_0; L^2(\Theta)\| = 1$. Следуя схеме из [4], подставим в формулу Грина для бигармонического оператора на полуполосе Π_+ экспоненциально затухающее решение u_ε и следующие линейные комбинации ограниченных волн из списка (12):

$$v_\varepsilon^1(x) = \varepsilon^{-2}(2w_{\varepsilon-}^{1\mathrm{re}} - (1+i)w_{\varepsilon+}^{1\mathrm{im}} - (1-i)w_{\varepsilon-}^{1\mathrm{im}}),$$
$$v_\varepsilon^2(x) = \varepsilon^{-1}(w_{\varepsilon+}^{2\mathrm{im}} - w_{\varepsilon-}^{2\mathrm{im}}).$$

Поскольку рассматриваемые функции удовлетворяют уравнению (1) в полуполосе Π_+ и краевым условиям (2) на её боковых сторонах, в формуле

Грина остается лишь интеграл по торцу $\left\{x: z=0, |y|<\frac{1}{2}\right\}$. Итак, предельный переход $\varepsilon\to+0$ приводит к формулам

$$\int_{-1/2}^{1/2}\left(u_0(x)N^3(\nabla)v_0^j(x)+\partial_n u_0(x)N^2(\nabla)v_0^j(x)\right)\Big|_{z=0}dy-$$

$$-2(1-\nu)\sum_{\pm}\pm u_0\left(\pm\frac{1}{2},0\right)\frac{\partial^2 v_0^j}{\partial y\partial z}\left(\pm\frac{1}{2},0\right)=0. \quad (24)$$

Левые части формул (24) суть $2\mu_1(1-\nu^2)c_1$ при $j=1$ и $4i\mu_2(1-\nu)c_2$ при $j=2$, т.е. нужные равенства, а вместе с ним и искомая единственность захваченной волны установлены.

Вернёмся к обсуждению скалярной задачи Неймана в области Ω, начатому в разделе 1. У соответствующей модельной задачи в полосе Π с параметром (5) имеются только две осциллирующие волны $e^{\pm i\varepsilon^2 z}$ (ср. вторую формулу (12)). В результате описанных выше рассуждений для предела $u_0(x)=c_0\neq 0$ нормированной захваченной волны $u_\varepsilon\in H^2(\Omega)$ получаем замену соотношениям (24) — равенство

$$\int_{-1/2}^{1/2}u_0(y,0)dy=0,$$

приводящее к противоречию. Доказанное отсутствие захваченных акустических волн на малых частотах объясняется тем, что среди экспоненциальных волн с малым показателем $O(\varepsilon^2)$ нет затухающих при $z\to+\infty$ волн. В задаче Кирхгофа такая волна одна, и поэтому удаётся построить только одну захваченную изгибную волну, отвечающую спектральному параметру. В [8, §3] разработана простая, по сути арифметическая, процедура обнаружения полиномиальных решений общих формально самосопряжённых краевых задач, которые (решения) аннулируют квадратичную энергетическую форму.

Источник финансирования. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 17–11–01003).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Михлин С.Г.* Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970.
2. *Крылов А.Н.* О расчете балок, лежащих на упругом основании. Л.: Изд-во АН СССР, 1931.
3. *Hetenyi M.* Beams on elastic foundation. Michigan: University Press, 1946.
4. *Назаров С.А.* Асимптотика собственных чисел на непрерывном спектре регулярно возмущенного квантового волновода // Теоретическая и математическая физика. 2011. Т. 167. № 2. С. 239–262.
5. *Бирман М.Ш.* О вариационном методе Треффца для уравнения $\Delta^2 u=f$ // ДАН СССР. 1955. Т. 101. № 2. С. 201–204.
6. *Бирман М.Ш., Соломяк М.З.* Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Л.: Изд-во Ленингр. ун–та, 1980.
7. *Nazarov S.A., Plamenevsky B.A.* Elliptic problems in domains with piecewise smooth boundaries. B., N.Y.: Walter de Gruyter, 1994.
8. *Назаров С.А.* Полиномиальное свойство самосопряженных эллиптических краевых задач и алгебраическое описание их атрибутов // Успехи матем. наук. 1999. Т. 54. № 5. С. 77–142.
9. *Вайнберг М.М., Треногин В.А.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: Наука, 1969.
10. *Мазья В.Г., Пламеневский Б.А.* О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач в области с коническими точками // Math. Nachr. 1977. Bd. 76. S. 29–60.
11. *Назаров С.А.* Принудительная устойчивость простого собственного числа на непрерывном спектре волновода // Функц. анализ и его приложения. 2013. Т. 47. № 3. С. 37–53.

INFINITE KIRCHHOFF PLATE ON A COMPACT ELASTIC FOUNDATION MAY HAVE ARBITRARY SMALL EIGENVALUE

S. A. Nazarov

Saint-Petersburg State University, Saint-Petersburg, Russian Federation

Presented by Academician of the RAS N.F. Morozov March 4, 2019

Received May 22, 2019

An inhomogeneous Kirhhoff plate composed from semi-infinite strip–waveguide and a compact resonator which is in contact with the Winkler foundation of small compliance, is considered. It is shown that for any $\varepsilon>0$, it is possible to find the compliance coefficient $O(\varepsilon^2)$ such that the described plate possesses the eigenvalue ε^4 embedded into continuous spectrum. This result is quite surprising because in an acoustic waveguide (the spectral Neumann problem for the Laplace operator) a small eigenvalue does not exist for any unsubstantial perturbation. A reason of this dissension is explained as well.

Keywords: Kirhhoff plate, Winkler foundation, eigenvalue embedded into continuous spectrum, asymptotic analysis.