ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2019, *том 488*, № 5, *с. 493–497*

МЕХАНИКА

УДК 532.5.011, 532.5.013.2

О ПРИСОЕДИНЁННОЙ МАССЕ В МОДЕЛИ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Г. Я. Дынникова

Представлено академиком РАН В.А. Левиным 15.05.2019 г.

Поступило 24.05.2019 г.

Доказано, что при одном и том же мгновенном распределении скорости течения вязкой несжимаемой жидкости силы, действующие на тело, движущееся с ускорением, отличаются от сил при движении с постоянной скоростью на векторную величину, равную тензору присоединённых масс, умноженному на вектор ускорений. При этом тензор присоединённых масс совпадает с тензором, вычисленным для потенциальных течений при той же геометрии тела и окружающих поверхностей, и не зависит ни от вязкости, ни от распределения завихренности в пространстве течения, в то время как сила, соответствующая движению с постоянной скоростью, зависит от предыстории движения.

Ключевые слова: присоединённая масса, вязкая несжимаемая жидкость, уравнения Навье–Стокса, нестационарные течения.

DOI: https://doi.org/10.31857/S0869-56524885493-497

Известно, что гидродинамические силы, действующие на тело, могут быть выражены через потоки завихренности с его поверхности. В данной работе выведено интегральное уравнение, определяющее распределение плотности этих потоков в вязкой несжимаемой жидкости при граничном условии прилипания к обтекаемым поверхностям. Показано, что плотность потоков с поверхности твёрдого тела может быть представлена в виде суммы распределений, одно из которых соответствует движению тела без ускорения, а каждое из остальных линейно зависит только от одной компоненты ускорения. В результате доказано, что тензор присоединённых масс в вязкой несжимаемой жидкости зависит только от формы тела и наличия обтекаемых поверхностей вблизи него, но не зависит от скорости тела и предыстории его движения, тогда как силы, действующие на тело при движении с постоянной скоростью, зависят от распределения завихренности в пространстве, а следовательно и от предыстории движения.

ВВЕДЕНИЕ

Понятие присоединённой массы имеет точное определение в теории потенциальных течений. Теоретические выражения тензора присоединённых масс для тел различной формы можно найти в [1–3]. Известно также, что экспериментальные данные для тел, совершающих гармонические колебания в реальных жидкостях, дают хорошее совпадение с результатами расчёта на основе теории потенциальных течений [4]. В случае прямолинейного движения сферической частицы в вязкой несжимаемой жидкости с переменной скоростью при низких значениях числа Рейнольдса известно аналитическое выражение для результирующей гидродинамической силы, действующей на частицу. Эта сила может быть представлена в виде суммы четырёх составляющих: квазистационарной силы вязкого трения, силы Архимеда, силы присоединённых масс и «наследственной» силы Бассэ, зависящей от предыстории движения [5]. Однако вопрос о коэффициентах присоединённых масс при движении тел в вязкой жидкости в общем случае остаётся открытым. Гидродинамические силы, действующие на тела в вязкой жидкости, зависят от предыстории движения и являются нестационарными даже при движении с постоянной скоростью. Поэтому выделение составляющих сил, зависящих только от ускорения, оказывается проблематичным, а его полезность для решения практических задач представляется неочевидной. В данной работе даны ответы на эти вопросы для общего случая движения тел в вязкой несжимаемой жидкости.

ЭВОЛЮЦИЯ ЗАВИХРЕННОСТИ В ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ И ЕЁ СВЯЗЬ С СИЛАМИ, ДЕЙСТВУЮЩИМИ НА ТЕЛА

Используется предложенная в работе [6] дивергентная форма уравнения эволюции завихренности

Научно-исследовательский институт механики Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова

E-mail: dyn@imec.msu.ru

в вязкой несжимаемой жидкости, вытекающая из уравнений Навье–Стокса:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{Q} = -\nabla\left(\frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2}\right), \quad \mathbf{Q} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} + \nu \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\omega},$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} = -\operatorname{Div} \mathbf{W}(\mathbf{Q}), \quad \mathbf{W}(\mathbf{Q}) = \begin{pmatrix} 0 & Q_3 & -Q_2 \\ -Q_3 & 0 & Q_1 \\ Q_2 & -Q_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь $\mathbf{u}$ – скорость жидкости, $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$, ν – кинематический коэффициент вязкости, который для простоты полагается константой.

При выводе данной формы уравнения использовано тождественное преобразование ротора векторной функции в дивергенцию тензора:

$$\nabla \times \mathbf{Q} = \sum_{i,j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}^i \frac{\partial}{\partial r_j} Q^k = \operatorname{Div} \mathbf{W} = \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial r_j} W_{ij} \mathbf{e}^i,$$

$$W_{ij} = \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} Q^k,$$

где ε_{ijk} – символ Леви–Чивиты.

Тензор $\mathbf{W}$ назван тензором переноса завихренности, а его проекция $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{W}$ на нормаль $\mathbf{n}$ к элементарной площадке – плотностью потока завихренности через эту площадку[1]. Согласно теореме Стокса для любого объёма жидкости τ, ограниченного замкнутой неподвижной поверхностью s, справедливо равенство

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_\tau \boldsymbol{\omega} d\tau = -\int_\tau \operatorname{Div} \mathbf{W} d\tau = \oint_s \mathbf{n} \cdot \mathbf{W} ds.$$

Вектор $\boldsymbol{\sigma}$, равный $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{W} = \mathbf{n} \times \mathbf{Q} = \mathbf{n} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}) + \mathbf{n} \times (\nu \nabla \times \boldsymbol{\omega})$, состоит из двух слагаемых $\boldsymbol{\sigma}_c = \mathbf{n} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u})$ и $\boldsymbol{\sigma}_\nu = \mathbf{n} \times (\nu \nabla \times \boldsymbol{\omega})$, вектор $\mathbf{n}$ направлен внутрь области τ. Первое слагаемое связано с конвективным переносом завихренности, второе – с диффузией завихренности. В случае, если поверхность, ограничивающая объём τ, движется со скоростью жидкости, выполняется соотношение [6]

$$\frac{d}{dt} \int_\tau \boldsymbol{\omega} d\tau = -\oint_s (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{u} ds + \oint_s \nu \mathbf{n} \times (\nabla \times \boldsymbol{\omega}) ds.$$

Первый интеграл $-\oint_s (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{u} ds = \int_\tau (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u} d\tau$ связан с деформацией и поворотом вихревых линий при их движении со скоростью жидкости, второй описывает обмен завихренностью между соседними областями вследствие вязкости. Если часть поверхности s совпадает с частью поверхности тела ΔS_b, то поток завихренности через неё представляет собой поток $\boldsymbol{\sigma}_{\text{new}}$, генерируемый этой частью поверхности тела S_b:

$$\boldsymbol{\sigma}_{\text{new}} = \nu \mathbf{n} \times (\nabla \times \boldsymbol{\omega})\big|_{S_b}.$$

В [6] показано, что сила давления и момент сил, действующие на твёрдое тело, выражаются через $\boldsymbol{\sigma}_{\text{new}}$ следующими формулами:

$$\mathbf{F}_p = -\frac{\rho}{\kappa - 1} \oint_{S_b} \mathbf{r} \times \boldsymbol{\sigma}_{\text{new}} ds + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_m m_f + \dot{\mathbf{U}}_m m_f,$$

$$\mathbf{M}_p = \frac{\rho}{2} \oint_{S_b} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)^2 \boldsymbol{\sigma}_{\text{new}} ds + \frac{\rho}{2} \oint_{S_b} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)^2 (\mathbf{n} \times \dot{\mathbf{u}}_b) ds, \quad (1)$$

где κ – размерность пространства, $\mathbf{r}_m$, m_f – центр тяжести объёма вытесненной жидкости и её масса, $\mathbf{U}_m = \dot{\mathbf{r}}_m$, $\boldsymbol{\Omega}$ – угловая скорость движения тела.

В следующем разделе выведено интегральное уравнение для функции $\boldsymbol{\sigma}_{\text{new}}$, с помощью которого доказано, что тензор присоединённых масс при ускоренном движения тела не зависит от его скорости и распределения завихренности в пространстве, т.е. от предыстории течения.

ВЫВОД ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ПОТОКА ЗАВИХРЕННОСТИ С ПОВЕРХНОСТИ

Рассматривается течение вязкой несжимаемой жидкости, подчиняющееся уравнению Навье–Стокса с постоянным значением кинематического коэффициента вязкости:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nu \nabla \times \boldsymbol{\omega} = -\frac{\nabla p}{\rho}, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (2)$$

Введём обозначение $\mathbf{G} = \frac{\nabla p}{\rho}$. Дивергенция H и ротор $\mathbf{R}$ этой векторной функции равны соответственно

$$H = \nabla \cdot \mathbf{G} = -\nabla \cdot ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}), \quad \mathbf{R} = \nabla \times \mathbf{G} = 0.$$

Известно [8, 9], что любая непрерывная кусочно-гладкая векторная функция $\mathbf{G}$, определённая в области V_f, может быть выражена через её ротор, дивергенцию и значения на границах области S:

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{G}(\mathbf{r}), \ \mathbf{r} \in V_f \\ \alpha \mathbf{G}(\mathbf{r}), \ \mathbf{r} \in S \\ 0, \ \mathbf{r} \notin V_f \cup S \end{array}\right\} = \int_{V_f} \mathbf{R}(\mathbf{r}') \times \mathbf{K}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV + \int_{V_f} H(\mathbf{r}') \mathbf{K}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV +$$

$$+ \int_S (\mathbf{n}(\mathbf{r}') \times \mathbf{G}(\mathbf{r}')) \times \mathbf{K}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS + \int_S (\mathbf{G}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}')) \mathbf{K}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS;$$

$$\mathbf{K} = \frac{1}{2^{\kappa-1}\pi} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^\kappa}; \quad \mathbf{r}' \in V_f \cup S; \quad (3)$$

[1] Отметим, что в литературе есть понятие граничного потока завихренности (boundary vorticity flux), определённого только на поверхности тел как производная завихренности по нормали к поверхности [7].

Коэффициент α на гладкой поверхности равен 1/2, нормаль $\mathbf{n}$ направлена внутрь области V_f.

Нормальная проекция этого уравнения на поверхности S имеет вид

$$\alpha\mathbf{n}(\mathbf{r})\cdot\mathbf{G}(\mathbf{r}) = \mathbf{n}(\mathbf{r})\cdot\int_{V_f} H\mathbf{K}dV + \mathbf{n}(\mathbf{r})\cdot\int_S\left(\mathbf{n}(\mathbf{r}')\times\mathbf{G}\right)\times$$
$$\times\mathbf{K}dS + \mathbf{n}(\mathbf{r})\cdot\int_S\left(\mathbf{G}\cdot\mathbf{n}(\mathbf{r}')\right)\mathbf{K}dS. \quad (4)$$

При известных значениях функции H и величины $\mathbf{n}\cdot\mathbf{G} = \dfrac{\partial p}{\partial n}$ равенство (4) является сингулярным интегральным уравнением относительно векторной функции $\mathbf{n}\times\mathbf{G}$, в котором несобственные интегралы понимаются в смысле главного значения. Аналогичное уравнение с тем же ядром широко используется в вихревых методах, а также панельном методе, где для его решения используется потенциал двойного слоя. Причём в данном уравнении искомое распределение интенсивности двойного слоя с точностью до константы совпадает с распределением $\dfrac{p}{\rho}$.

Значение функции $\mathbf{G}$ на поверхности тела при условии прилипания $\mathbf{u}(\mathbf{r}_s) = \mathbf{u}_b(\mathbf{r}_s)$ в соответствие с (2) равно $\mathbf{G}(\mathbf{r}_s) = -\nu\nabla\times\boldsymbol{\omega} - \dot{\mathbf{u}}_b$. Следовательно,

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{G}(\mathbf{r}_s) = -\nu\mathbf{n}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{\omega}) - \mathbf{n}\cdot\dot{\mathbf{u}}_b = -\nu(\mathbf{n}\times\nabla)\cdot\boldsymbol{\omega} - \mathbf{n}\cdot\dot{\mathbf{u}}_b,$$
$$\mathbf{n}\times\mathbf{G}(\mathbf{r}_s) = -\nu\mathbf{n}\times(\nabla\times\boldsymbol{\omega}) - \mathbf{n}\times\dot{\mathbf{u}}_b = -\boldsymbol{\sigma}_{\text{new}} - \mathbf{n}\times\dot{\mathbf{u}}_b. \quad (5)$$

Выражение $(\mathbf{n}\times\nabla)\cdot\boldsymbol{\omega}$ состоит из производных вдоль поверхности от завихренности и является известной величиной при заданном распределении $\boldsymbol{\omega}$. Как правило, эти производные являются малыми величинами. Также известными являются слагаемые, включающие ускорение поверхности при заданном движении тела. Неизвестным является лишь вектор $\boldsymbol{\sigma}_{\text{new}}$. Подставляя (5) в (4), получаем интегральное уравнение относительно этой функции:

$$\mathbf{n}\cdot\int_S\boldsymbol{\sigma}_{\text{new}}\times\mathbf{K}dS = \mathbf{n}\cdot\int_{V_f} H\mathbf{K}dV - \mathbf{n}\cdot\int_S\left(\mathbf{n}\times\dot{\mathbf{u}}_b\right)\times\mathbf{K}dS -$$
$$-\mathbf{n}\cdot\int_S\left(\nu\left(\mathbf{n}\times\nabla\right)\cdot\boldsymbol{\omega} + \mathbf{n}\cdot\dot{\mathbf{u}}_b\right)\mathbf{K}dS + \alpha\left(\nu\left(\mathbf{n}\times\nabla\right)\cdot\boldsymbol{\omega} + \mathbf{n}\cdot\dot{\mathbf{u}}_b\right). \quad (6)$$

Таким образом, получено уравнение для потока завихренности с поверхности, связывающее его распределение с ускорением поверхности и другими характеристиками течения. Дополнительным условием для выделения единственного решения является в случае двумерных течений равенство $\oint_C\boldsymbol{\sigma}_{\text{new}}dl = -\oint_C\mathbf{n}\times\dot{\mathbf{u}}_b dl$, где C — контур профиля. В случае трёхмерных течений дополнительным условием является соленоидальность функции $\boldsymbol{\sigma}_{\text{new}} + \mathbf{n}\times\dot{\mathbf{u}}_b$ на поверхности, что вытекает из определения $\mathbf{G} = \dfrac{\nabla p}{\rho}$.

ДЕКОМПОЗИЦИЯ ПОТОКА ЗАВИХРЕННОСТИ И СИЛ, ДЕЙСТВУЮЩИХ НА ТЕЛО, НА СОСТАВЛЯЮЩИЕ, СВЯЗАННЫЕ С УСКОРЕНИЕМ И ДВИЖЕНИЕМ С ПОСТОЯННОЙ СКОРОСТЬЮ

При движении в неограниченном пространстве тела неизменной формы с поступательной скоростью $\mathbf{U}$ и вращательной $\boldsymbol{\Omega}$ относительно оси, проходящей через центр масс $\mathbf{r}_m$, скорость $\mathbf{u}_b$ точки поверхности, имеющей координаты $\boldsymbol{\xi}$ в системе, связанной с телом, и координаты $\mathbf{r}_b(\boldsymbol{\xi}, t)$ в неподвижной системе, описывается формулой

$$\mathbf{u}_b(\boldsymbol{\xi}, t) = \mathbf{U}(t) + \boldsymbol{\Omega}(t)\times\left(\mathbf{r}_b(\boldsymbol{\xi}, t) - \mathbf{r}_m(t)\right).$$

Частная производная $\mathbf{u}_b(\boldsymbol{\xi}, t)$ при фиксированном $\boldsymbol{\xi}$ равна

$$\dot{\mathbf{u}}_b = \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{\boldsymbol{\xi}}\mathbf{u}_b = \dot{\mathbf{U}} + \dot{\boldsymbol{\Omega}}\times\left(\mathbf{r}_b - \mathbf{r}_m\right) + \boldsymbol{\Omega}\times\left(\mathbf{u}_b - \mathbf{U}\right).$$

После подстановки этого выражения в (6) и упрощения получаем уравнение

$$\mathbf{n}\cdot\int_S\boldsymbol{\sigma}_{\text{new}}\times\mathbf{K}dS = \mathbf{n}\cdot\int_{V_f} H\mathbf{K}dV - \mathbf{n}\cdot\int_{V_b} 2\dot{\boldsymbol{\Omega}}\times\mathbf{K}dV_b -$$
$$-\mathbf{n}\cdot\int_S\mathbf{K}\left(\nu\left(\mathbf{n}\times\nabla\right)\cdot\boldsymbol{\omega}\right)dS + \nu\alpha\left(\mathbf{n}\times\nabla\right)\cdot\boldsymbol{\omega} + \mathbf{n}\cdot\dot{\mathbf{u}}_b.$$

Если тело движется с постоянными поступательной и угловой скоростями, то поток завихренности с поверхности $\boldsymbol{\sigma}_{\text{new}}^{\text{stat}}$ удовлетворяет уравнению

$$\mathbf{n}\cdot\int_S\boldsymbol{\sigma}_{\text{new}}^{\text{stat}}\times\mathbf{K}dS = \mathbf{n}\cdot\int_{V_f} H\mathbf{K}dV - \mathbf{n}\cdot\int_S\mathbf{K}\left(\nu\left(\mathbf{n}\times\nabla\right)\cdot\boldsymbol{\omega}\right)dS +$$
$$+\nu\alpha\left(\mathbf{n}\times\nabla\right)\cdot\boldsymbol{\omega} + \mathbf{n}\cdot\left(\boldsymbol{\Omega}\times\left(\mathbf{u}_b - \mathbf{U}\right)\right).$$

При движении с ускорением поток завихренности $\boldsymbol{\sigma}_{\text{new}}$ может быть представлен в виде суммы $\boldsymbol{\sigma}_{\text{new}} = \boldsymbol{\sigma}_{\text{new}}^{\text{stat}} + \boldsymbol{\sigma}_{\text{new}}^{\dot{U}} + \boldsymbol{\sigma}_{\text{new}}^{\dot{\Omega}}$, где функции $\boldsymbol{\sigma}_{\text{new}}^{\dot{U}}$, $\boldsymbol{\sigma}_{\text{new}}^{\dot{\Omega}}$ удовлетворяют уравнениям

$$\mathbf{n}\cdot\int_S\boldsymbol{\sigma}_{\text{new}}^{\dot{U}}\times\mathbf{K}dS = \mathbf{n}\cdot\dot{\mathbf{U}},$$
$$\mathbf{n}\cdot\int_S\boldsymbol{\sigma}_{\text{new}}^{\dot{\Omega}}\times\mathbf{K}dS = -\mathbf{n}\cdot\int_{V_b} 2\dot{\boldsymbol{\Omega}}\times\mathbf{K}dV_b + \mathbf{n}\cdot\left(\dot{\boldsymbol{\Omega}}\times\left(\mathbf{r}_b - \mathbf{r}_m\right)\right). \quad (7)$$

Используя выражение (1), можно представить силу давления в виде суммы сил, ответственных за движение с постоянной скоростью и с ускорениями

$$\mathbf{F}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{stat}} = -\frac{\rho}{\kappa - 1} \oint_{S_b} \mathbf{r} \times \boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{new}}^{\mathrm{stat}} ds,$$

$$\mathbf{F}_{p}^{\dot{U}} = -\frac{\rho}{\kappa - 1} \oint_{S_b} \mathbf{r} \times \boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{new}}^{\dot{U}} ds + \dot{\mathbf{U}} m_f, \qquad (8)$$

$$\mathbf{F}_{p}^{\dot{\Omega}} = -\frac{\rho}{\kappa - 1} \oint_{S_b} \mathbf{r} \times \boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{new}}^{\dot{\Omega}} ds + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_m m_f.$$

Аналогичные формулы можно получить из (1) для моментов сил.

Из формул (7) видно, что потоки $\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{new}}^{\dot{U}}$, $\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{new}}^{\dot{\Omega}}$ зависят только от $\dot{\mathbf{U}}$ и $\dot{\boldsymbol{\Omega}}$, соответственно, но не зависят от $\mathbf{U}$, $\boldsymbol{\Omega}$ и распределения завихренности в пространстве. При заданном направлении $\dot{\mathbf{U}}$ и $\dot{\boldsymbol{\Omega}}$ эти потоки пропорциональны модулям $\dot{U}$ и $\dot{\Omega}$. То же самое можно сказать о силах $\mathbf{F}_{p}^{\dot{U}}$, $\mathbf{F}_{p}^{\dot{\Omega}}$, которые могут быть выражены в виде тензоров, умноженных на векторы $\dot{\mathbf{U}}$ и $\dot{\boldsymbol{\Omega}}$ соответственно. Интересно, что задача нахождения $\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{new}}^{\dot{U}}$, $\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{new}}^{\dot{\Omega}}$ из уравнений (7) эквивалентна задаче определения присоединённой завихренности при мгновенном старте в неподвижной среде. Учитывая, что сила трения зависит от мгновенного распределения завихренности, но не от ускорения, можно сделать вывод о том, что тензор присоединённой массы не зависит от предыстории движения тела и его скорости. Однако сила $\mathbf{F}_{p}^{\mathrm{stat}}$ и сила трения зависят от распределения завихренности, а потоки завихренности, связанные с ускорением, влияют на это распределение.

В случае наличия нескольких тел или ограничивающих область течения поверхностей, движущихся с разными скоростями и ускорениями, уравнения для потоков завихренности имеют вид

$$\mathbf{n}(\mathbf{r}_b) \cdot \int\limits_{\bigcup_i S_i} \boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{new}}^{\dot{U}_j} \times \mathbf{K} dS = \begin{cases} \mathbf{n}(\mathbf{r}_b) \cdot \dot{U}_j, \mathbf{r}_b \in S_j, \\ 0, \quad \mathbf{r}_b \notin S_j, \end{cases}$$

$$\mathbf{n}(\mathbf{r}_b) \cdot \int\limits_{\bigcup_i S_i} \boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{new}}^{\dot{\Omega}_j} \times \mathbf{K} dS = -\mathbf{n}(\mathbf{r}_b) \cdot \sum_i \int\limits_{V_{bi}} 2\dot{\boldsymbol{\Omega}}_i \times \mathbf{K} dV_b + \begin{cases} \mathbf{n}(\mathbf{r}_b) \cdot \left(\dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \left(\mathbf{r}_b - \mathbf{r}_m \right) \right), \ \mathbf{r}_b \in S_j, \\ 0, \quad \mathbf{r}_b \notin S_j, \end{cases}$$

откуда следует, что близко расположенные к телу поверхности могут влиять на эти потоки и, соответственно, на тензор присоединённых масс, но, как и в случае одиночного тела, не зависят от скоростей движения тел и характеристик течения.

Полученные результаты могут быть полезны при решении сопряжённых задач движения тел под действием гидродинамических сил. В этом случае на каждом шаге по времени должны быть согласованы новые значения скоростей и гидродинамические силы, которые, в свою очередь, зависят от ускорения. Обычно в сеточных методах с расщеплением шага на гидродинамическую и динамическую части это достигается с помощью итераций. Но для лёгких тел с большой присоединённой массой итерации либо не сходятся, либо требуется очень мелкий шаг. Использование результатов данной работы позволяет преодолеть эту проблему и даже решать сеточными методами сопряжённые задачи с телами, имеющими исчезающее малую (нулевую) инерционность. До сих пор это удавалось делать только с помощью вихревого бессеточного метода, разработанного в [10, 11].

ВЫВОДЫ

Доказано, что при одном и том же мгновенном распределении скорости течения вязкой жидкости постоянной плотности силы, действующие на тело, движущееся с ускорением, отличаются от сил при движении с постоянной скоростью на векторную величину, равную тензору присоединённых масс, умноженному на вектор ускорений. При этом тензор присоединённых масс совпадает с тензором, вычисленным для потенциальных течений, и не зависит ни от вязкости, ни от распределения завихренности в пространстве течения, в то время как сила, соответствующая движению с постоянной скоростью, зависит от предыстории движения.

Источник финансирования. Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 18–31–20057).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Седов Л.И.* Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.; Л., 1950. 444 с.
2. *Ламб Г.* Гидродинамика. Пер. с англ. М.; Л., 1947.
3. *Риман И.С., Крепс Р.Л.* Присоединенные массы тел различной формы. М., 1947.
4. *Дейли Дж., Харлеман Д.* Механика жидкости. М: Энергия, 1971. 480 с.
5. *Нигматулин Р.И.* Динамика многофазных сред. Ч. 1. М.: Наука, 1987. 464 с.
6. *Dynnikova G.Y., Andronov P.R.* Expressions of Force and Moment Exerted on a Body in a Viscous Flow Via the Flux of Vorticity Generated on its Surface // Europ. J. of Mechanics. B/Fluids. 2018. V. 72. № Nov-Dec. P. 293–300. DOI: 10.1016/j.euromechflu.2018.06.002
7. *Wu J.Z., Ma H.Y., Zhou M.D.* Vorticity and Vortex Dynamics. Springer, 2006. 776 p.
8. *Kempka S.N., Glass M.W., Peery J.S., Strickland J.H.* Accuracy Considerations for Implementing Velocity

Boundary Conditions in Vorticity Formulations / SANDIA Report SAND96-0583. 1996. 53c.

9. *Wu J.C., Thompson J.F.* Numerical Solutions of Time-dependent Incompressible Navier—Stokes Equations Using an Integro-differential Formulation // Computers & Fluids. 1973. V. 1. P. 197—215.

10. *Андронов П.Р., Григоренко Д.А., Гувернюк С.В., Дынникова Г.Я.* // Изв. РАН. МЖГ. 2007. № 5. С. 47—60.

11. *Андронов П.Р., Гувернюк С.В., Дынникова Г.Я.* Вихревые методы расчета нестационарных гидродинамических нагрузок. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2006. 184 с.

ON THE ADDED MASS IN A VISCOUS INCOMPRESSIBLE FLUID

G. Ya. Dynnikova

Lomonosov Moscow State University, Research Institute of Mechanics, Moscow, Russian Federation

Presented by Academicain of the RAS V.A. Levin May 15, 2019

Received May 24, 2019

It is proved that at the same instantaneous distribution of the flow velocity of a viscous incompressible fluid, the forces acting on a body moving with acceleration differ from forces acting on the body moving with constant velocity by a vector which is equal to the added masses tensor multiplied by the acceleration vector. The tensor of the added masses coincides with the tensor calculated for potential flows with the same geometry of the body and surrounding surfaces, and does not depend either on viscosity or on the distribution of vorticity in the flow space. While the force corresponding to the motion with constant velocity depends on the history of movement.

Keywords: added mass; viscous incompressible fluid; Navier—Stokes equations, unsteady flows.