

УДК 551.511.61, 532.517.4

О МОДЕЛИРОВАНИИ СКОРОСТИ ДИССИПАЦИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Е. В. Мортиков^{1,2,*}, А. В. Глазунов^{1,2}, А. В. Дебольский^{1,3},
член-корреспондент РАН В. Н. Лыкосов^{1,2}, С. С. Зилитинкевич^{1,4,5}

Поступило 05.06.2019 г.

В работе рассматривается релаксационное уравнение относительно волнового числа для полуэмпирических замыканий геофизической турбулентности. Показано, что традиционное феноменологическое уравнение скорости диссипации кинетической энергии турбулентности можно рассматривать как аппроксимацию предложенного релаксационного уравнения для устойчиво-стратифицированных течений, находящихся в состоянии квазиравновесия. Предложенный подход допускает возможность уточнения турбулентных замыканий для пограничных слоёв атмосферы и океана за счёт задания равновесных состояний и релаксационных соотношений, согласованных с данными прямого и вихреразрешающего моделирования.

Ключевые слова: геофизическая турбулентность, полуэмпирические модели турбулентности, атмосферный пограничный слой, устойчивая стратификация.

DOI: <https://doi.org/10.31857/S0869-56524894414-418>

1. В крупномасштабных моделях атмосферы и океана турбулентность в пограничных слоях описывается с помощью полуэмпирических замыканий. Наиболее распространён подход, в котором рассматриваются уравнения для вторых моментов гидродинамических полей. В предположениях Колмогорова [1] задача упрощается и требует определения скорости диссипации ε кинетической энергии турбулентности (КЭТ) E либо, что эквивалентно, нахождения масштабов длины $l_T = E^{3/2}/\varepsilon$ или времени $t_T = E/\varepsilon$. Современные замыкания по-прежнему неудовлетворительно описывают устойчиво стратифицированную турбулентность [2] и внутрисуточную динамику [3], причём одной из основных проблем остаётся параметризация диссипативных процессов.

Рассмотрим традиционные двухпараметрические замыкания [4] для горизонтально однородной турбулентности, содержащие, помимо уравнений для первых моментов, прогностические уравнения для E и ε :

¹ Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

² Институт вычислительной математики
им. Г.И. Марчука
Российской Академии наук, Москва

³ Институт физики атмосферы им. А.М. Обухова
Российской Академии наук, Москва

⁴ Finnish Meteorological Institute, University of Helsinki,
Helsinki, Finland

⁵ Институт прикладной физики
Российской Академии наук, Нижний Новгород

*E-mail: evgeny.mortikov@gmail.com

$$\frac{\partial E}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{K_m}{\sigma_E} \frac{\partial E}{\partial z} = P + B - \varepsilon, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{K_m}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} = \frac{\varepsilon}{E} (C_{1\varepsilon} P - C_{2\varepsilon} \varepsilon + C_{3\varepsilon} B), \quad (2)$$

где P — сдвиговая генерация турбулентности, B — генерация или потребление силами плавучести. Коэффициенты турбулентной вязкости K_m и диффузии K_h связаны с E и ε соотношениями подобия: $K_{m,h} = S_{m,h} E^2 / \varepsilon$, где $S_{m,h}$ — безразмерные функции устойчивости. Ограничимся так называемой “стандартной” $E - \varepsilon$ моделью, для которой $S_m = 0,09$ и $S_h = 0,11$ — константы, а число Прандтля $Pr_t = K_m / K_h = S_m / S_h \approx 0,8$ фиксировано, как и числа Шмидта: $\sigma_E = 1$, $\sigma_\varepsilon = \text{const}$.

Уравнение (2) обычно рассматривается как полностью эмпирическое. Оно записано по аналогии с уравнением (1) путём добавления размерных множителей к каждому из членов в правой части. Это уравнение содержит четыре константы: $C_{1\varepsilon}$, $C_{2\varepsilon}$, $C_{3\varepsilon}$ и σ_ε . От выбора констант существенно зависят результаты моделирования и математические свойства системы уравнений (см. [5]). Наибольшей неопределённостью обладает выбор константы $C_{3\varepsilon}$. Так, при устойчивой стратификации рассматриваются значения, лежащие в интервале $-1,0 < C_{3\varepsilon} < 1,5$. Константы $C_{1\varepsilon} \approx 1,44$ и $C_{2\varepsilon} \approx 1,92$ определяются по данным лабораторных экспериментов [6]. Величина $\sigma_\varepsilon \approx 1,11$ задаётся требованием согласованности уравнений с приближением логарифмического слоя [4]. Существуют теоретические соображения [4, 5, 7] относи-

тельно выбора констант, не дающие, впрочем, однозначного вывода об их универсальности.

Отметим, что если известен турбулентный масштаб l_T , то необходимость привлечения дополнительного эволюционного уравнения отпадает. Для турбулентных стратифицированных пограничных слоёв, находящихся в состояниях, близких к статистически стационарным, этот масштаб может быть определён при помощи теории подобия Мони́на—Обухова [8] и эмпирических результатов её обобщения на случай непостоянных по высоте потоков. Уравнение (2) служит для описания переходных режимов при быстром изменении внешних параметров, задавая вместе с уравнением (1) эволюцию некоторой размерной интегральной характеристики масштаба флуктуаций в моменты приспособления всего спектра турбулентности к новому равновесному состоянию.

Удобной интегральной характеристикой спектра является масштаб волнового числа. Например, для двумерной турбулентности средневзвешенное по энергии волновое число имеет фундаментальное значение, являясь одним из инвариантов идеальной двумерной жидкости, а для трёхмерных течений масштаб $l_T \approx 1/\bar{k}$, где \bar{k} — средневзвешенное по коспектру волновое число, является хорошей аппроксимацией турбулентного пути смешения Прандтля (см. [9]).

Здесь мы покажем, что уравнение (2) можно рассматривать как эквивалент простого уравнения для турбулентного волнового числа $k_T = 1/l_T$, содержащего лишь одну эмпирическую константу. Мы установим связи между константами $C_{1\varepsilon}$, $C_{2\varepsilon}$, $C_{3\varepsilon}$ и σ_ε и покажем, что при согласованном с теорией подобия выборе этих констант результаты моделирования устойчиво-стратифицированного пограничного слоя улучшаются.

2. Эволюция турбулентного масштаба волнового числа k_T должна описывать процесс приспособления спектра к равновесному состоянию. Ограничимся релаксационной моделью такого приспособления:

$$\frac{\partial k_T}{\partial t} = -\frac{1}{t_R}(k_T - k_T^0), \quad (3)$$

где $k_T^0 = 1/l_T^0$ и l_T^0 — равновесный турбулентный масштаб, определяемый геометрией течения и стратификацией. Время релаксации $t_R = C_R^{-1}E/\varepsilon$ полагается пропорциональным текущему масштабу времени t_T ; C_R — новая эмпирическая константа.

Подобное уравнение в предположении автономности спектра было получено из уравнения

спектрального баланса в работе [7] для однородной форсированной турбулентности. В случае затухающей однородной турбулентности, при $k_T^0 \equiv 0$ и $t \gg 1$, решение системы (1)–(3) имеет асимптотику $l_T \sim t^b$, где $b > 0$ — показатель степени, зависящий от значения константы релаксации. Степенной рост турбулентного масштаба со временем согласуется с выводами А.Н. Колмогорова (см. работу [1] и ссылки в ней).

Используя уравнения (1) и (3), получим уравнение для скорости диссипации $\varepsilon = E^{3/2}k_T$:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - \bar{D}_\varepsilon = \frac{3}{2} \frac{\varepsilon}{E} (P + B - \varepsilon) + C_R \frac{\varepsilon}{E} (\varepsilon^0 - \varepsilon), \quad (4)$$

где $\varepsilon^0 = E^{3/2}k_T^0$ — равновесное состояние, а оператор \bar{D}_ε имеет вид

$$\bar{D}_\varepsilon = \frac{3}{2} \frac{\varepsilon}{E} \left(\frac{\partial}{\partial z} \frac{K_m}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \right) \equiv \frac{3}{2} \frac{\varepsilon}{E} D_\varepsilon. \quad (5)$$

Уравнение (4) также представляет собой релаксационное соотношение, в котором ε притягивается как к локальному равновесию с суммарной продукцией КЭТ $P + B$, так и к ε^0 .

Определим равновесную скорость диссипации для горизонтально однородной турбулентности при устойчивой стратификации, где безразмерный градиент скорости Φ_u при любых значениях z/L с хорошей точностью аппроксимируется универсальной функцией [10]:

$$\Phi_u \equiv \frac{\kappa z}{\tau^{1/2}} \frac{dU}{dz} = \left(1 + C_u \frac{z}{L} \right). \quad (6)$$

Здесь τ — поток импульса, $L = -\tau^{3/2}/B$ — масштаб Обухова, $C_u = \kappa/Ri_f^\infty$, κ — константа Кармана и Ri_f^∞ — максимальное значение потокового числа Ричардсона $Ri_f = -B/P$. Тогда, следуя работе [11], предполагая локальность турбулентных процессов и пренебрегая третьими моментами, исходя из баланса продукции и потребления КЭТ, получим следующее выражение для равновесной скорости диссипации:

$$\varepsilon^0 = P - \frac{\tau^{3/2}}{L} = \frac{\tau^{3/2}}{\kappa z} \left(1 + C_\varepsilon \frac{z}{L} \right), \quad (7)$$

где $C_\varepsilon = \kappa(1 - Ri_f^\infty)/Ri_f^\infty$. Универсальная зависимость (7) подтверждается результатами прямого численного моделирования и данными измерений (см. [11]) в широком диапазоне значений z/L , в том числе при сильно устойчивой стратификации.

С учётом выражения (7) уравнение (4) записывается в виде

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - \bar{D}_\varepsilon - C_R \frac{\varepsilon}{E} \frac{\tau^{3/2}}{\kappa z} = \frac{\varepsilon}{E} (\bar{C}_{1\varepsilon} P + \bar{C}_{3\varepsilon} B - \bar{C}_{2\varepsilon} \varepsilon), \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{C}_{1\varepsilon} &= 3/2, \\ \bar{C}_{2\varepsilon} &= 3/2 + C_R, \\ \bar{C}_{3\varepsilon} &= 3/2 - C_R(1 - Ri_f^\infty)/Ri_f^\infty. \end{aligned} \quad (9)$$

Стандартное уравнение для скорости диссипации (2) можно рассматривать как частный случай уравнения (8), в котором два последних члена в левой части приближённо представляются оператором диффузии:

$$\bar{D}_\varepsilon + C_R \frac{\varepsilon}{E} \frac{\tau^{3/2}}{\kappa z} \approx D_\varepsilon \equiv \frac{\partial}{\partial z} \frac{K_m}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z}. \quad (10)$$

Ограничимся нейтральной стратификацией и рассмотрим только слой постоянных потоков, в котором величина КЭТ слабо зависит от высоты, а, следовательно, $D_E \approx 0$ и $|\bar{D}_\varepsilon| \ll C_R \frac{\varepsilon}{E} \frac{\tau^{3/2}}{\kappa z}$. Тогда, константу σ_ε можно выразить через константу C_R следующим образом:

$$\sigma_\varepsilon = \frac{\kappa^2}{S_m^{1/2} C_R} = \frac{\kappa^2}{S_m^{1/2} (\bar{C}_{2\varepsilon} - \bar{C}_{1\varepsilon})}. \quad (11)$$

Таким образом, можно ожидать, что при нейтральной и слабо устойчивой стратификации стандартное уравнение для скорости диссипации (2) и уравнение (4), полученное из релаксационного уравнения (3), будут иметь близкие стационарные решения, если равновесная диссипация ε^0 определяется выражением вида (7), а набор констант $C_{p\varepsilon} \approx \bar{C}_{p\varepsilon}$ ($p = 1, 2, 3$) и σ_ε удовлетворяет соотношениям (9), (11). Однако в случае нестационарных режимов динамика рассматриваемых систем может оказаться различной вследствие непредставимости остаточных членов в уравнении (8) в виде оператора диффузии.

Наилучшее совпадение равновесного решения (7) с результатами прямого численного моделирования [11, 12] наблюдается при $Ri_f^\infty \approx 0,2$, $\kappa \approx 0,4$. Используя эти значения и соотношения (9) при $C_{2\varepsilon} - C_{1\varepsilon} = 0,48$, получаем $C_{3\varepsilon} \approx -0,4$. Этот выбор константы $C_{3\varepsilon}$ представляется наиболее обоснованным для стандартной $E - \varepsilon$ модели.

3. Использовалась постановка численных экспериментов [2], предложенная в рамках программы GABLS (GEWEX — Global Energy and Water Ex-

changes, Atmospheric Boundary Layer Study) для сравнения моделей турбулентности при воспроизведении растущего по высоте, устойчиво-стратифицированного атмосферного пограничного слоя. Для стандартной модели (1), (2) использовались значения констант, приведённые в разделе 1, а величина $C_{3\varepsilon}$ варьировалась. Эксперименты с релаксационным уравнением (4) проводились при $C_R = 0,48$.

На рис. 1, 2 показаны профили температуры, модуля скорости ветра, потока тепла и полного потока импульса, усреднённые за девятый час расчёта, в сравнении с данными вихререзающего моделирования [13]. При $C_{3\varepsilon} \approx -0,4$ решение стандартной модели близко к результатам модели, использующей релаксационное уравнение (4), и к данным LES-моделирования. Отклонения сопоставимы с расхождениями в данных вихререзающего моделирования [14]. При несогласованном выборе константы $C_{3\varepsilon}$ высота пограничного слоя в стандартной модели оказывается завышенной и увеличивается ошибка в воспроизведении турбулентных потоков тепла и импульса.

4. Уравнение скорости диссипации кинетической энергии турбулентности ε было получено из уравнения релаксации турбулентного масштаба волнового числа k_T к его равновесному значению. Показано, что выведенное уравнение имеет вид, близкий к виду стандартного феноменологического уравнения для скорости диссипации. Установлена связь между четырьмя константами в стандартном уравнении для скорости диссипации и релаксационной константой C_R в уравнении для k_T . Показано, что при задании равновесного состояния системы, согласованного с теорией подобия Мони́на—Обухова, и при соответствующем выборе констант оба рассматриваемых подхода приводят к близким результатам. При этом хорошо воспроизводятся основные характеристики слабо-нестационарных устойчиво-стратифицированных пограничных слоёв.

Благодарности. Авторы выражают благодарность академику РАН Валентину Павловичу Дымникову за полезные советы при обсуждении материала статьи.

Источники финансирования. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 17–17–01210). С.С. Зилитинкевич благодарит за поддержку финский научный фонд Academy of Finland (грант № 314798/799).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Колмогоров А.Н. // Изв. АН СССР. Сер. физ. 1942. Т. 6. № 1/2. С. 56–68.

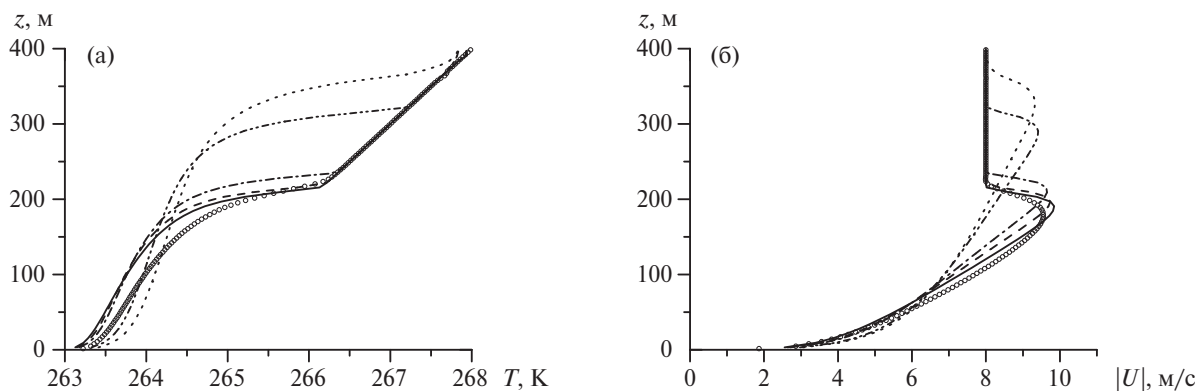


Рис. 1. Вертикальное распределение потенциальной температуры (а) и модуля скорости ветра (б). Релаксационное уравнение для скорости диссипации (4): $C_R = 0,48$, ————. Стандартное уравнение (2): $C_{3e} = -0,4$, - - - -; $C_{3e} = 0$, — · — ·; $C_{3e} = 1,14$, — · · — ·; $C_{3e} = 1,44$, ······. LES-модель: ○.

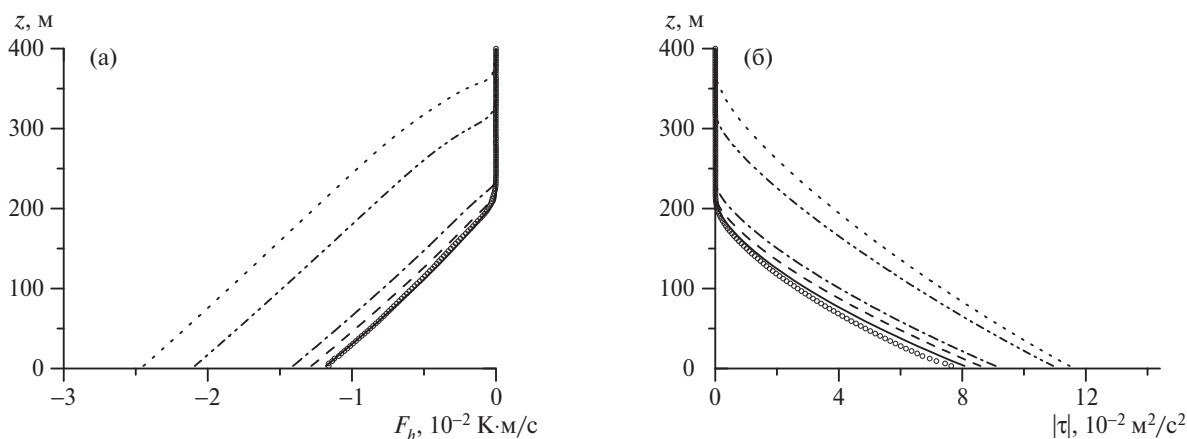


Рис. 2. Вертикальное распределение потока тепла (а) и полного потока импульса (б). Обозначения линий совпадают с приведёнными на рис. 1.

2. Cuxart J., Holtslag A.A.M., Beare R.J., Bazile E., Beljaars A., et al. // Bound.-Layer Meteorol. 2006. V. 118. № 2. P. 273–303.
3. Svensson G., Holtslag A.A.M., Kumar V., Mauritsen T., Steeneveld G.J., et al. // Bound.-Layer Meteorol. 2011. V. 140. № 2. P. 177–206.
4. Burchard H. Applied Turbulence Modelling in Marine Waters. Berlin: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2002. 218 p.
5. Лыкосов В.Н. // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 1992. Т. 28. № 7. С. 695–704.
6. Mohamed M.S., LaRue J.C. // J. Fluid Mech. 1990. V. 219. P. 195–214.
7. Schiestel R. // Phys. Fluids. 1987. V. 30. № 3. P. 722–731.
8. Монин А.С., Обухов А.М. // Тр. Геофиз. ин-та АН СССР. 1954. Т. 24. С. 163–187.
9. Глазунов А.В. // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2014. Т. 50. № 2. С. 156–165.
10. Zilitinkevich S.S., Esau I., Kleerorin N., Rogachevskii I., Kouznetsov R.D. // Bound.-Layer Meteorol. 2010. V. 135. № 3. P. 505–511.
11. Zilitinkevich S., Druzhinin O., Glazunov A., Kadantsev E., Mortikov E., et al. // Atmos. Chem. Phys. 2019. V. 19. P. 2489–2496.
12. Mortikov E.V., Glazunov A.V., Lykosov V.N. // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2019. V. 34. № 2. P. 119–132.
13. Glazunov A., Rannik Ü., Stepanenko V., Lykosov V., Auvinen M., et al. // Geosci. Model Dev. 2016. V. 9. P. 2925–2949.
14. Beare R.J., Macvean M.K., Holtslag A.A.M., Cuxart J., Esau I., et al. // Bound.-Layer Meteorol. 2006. V. 118. № 2. P. 247–272.

ON THE MODELLING OF THE DISSIPATION RATE OF TURBULENT KINETIC ENERGY

E. V. Mortikov^{1,2}, A. V. Glazunov^{1,2}, A. V. Debolskiy^{1,3},
Corresponding Member of the RAS V. N. Lykosov^{1,2}, S. S. Zilitinkevich^{1,4,5}

¹*Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

²*Marchuk Institute of Numerical Mathematics, Russian Academy of Sciences,
Moscow, Russian Federation*

³*A.M. Obukhov Institute of Atmospheric Physics, Russian Academy of Sciences,
Moscow, Russian Federation*

⁴*Finnish Meteorological Institute, University of Helsinki, Helsinki, Finland*

⁵*Institute of Applied Physics, Russian Academy of Sciences,
N. Novgorod, Russian Federation*

Received June 5, 2019

We consider a relaxation equation for turbulence wavenumber for use in semi-empirical turbulence closures. It is shown that the well-known phenomenological equation for the dissipation rate of turbulent kinetic energy can be related to this relaxation equation as a close approximation of the latter for stably stratified quasi-stationary flows. The proposed approach allows for more physically found definition of the empirical constants and improvement of atmospheric and oceanic boundary layer turbulence closures by using direct numerical and large eddy simulation data to define equilibrium states and relaxation mechanisms.

Keywords: geophysical turbulence, semi-empirical turbulence models, atmospheric boundary layer, stable stratification.