ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2019, том 489, № 5, с. 456–460

МАТЕМАТИКА

УДК 519.216.3

МЕТОД ОЦЕНКИ ПОКАЗАТЕЛЯ ХЁРСТА ФРАКТАЛЬНОГО БРОУНОВСКОГО ДВИЖЕНИЯ

А. В. Савицкий

Представлено академиком РАН А.Н. Ширяевым 25.07.2019 г.

Поступило 21.08.2019 г.

В работе изучаются процесс фрактального броуновского движения, а также статистические оценки показателя Хёрста и их свойства. Этот случайный процесс широко используется при построении моделей различных событий, эффектов и трендов, включая так называемые процессы с длительной памятью. Впервые упоминание модели с показателем Хёрста H появилось в работе британского климатолога Гарольда Хёрста, опубликованной в 1951 г., в которой он изучал поведение изменений стоков реки Нил. Впоследствии модифицированная модель фрактального броуновского движения нашла широкое применение в финансовых анализах различных показателей стабильности. В связи с востребованностью такого рода процессов актуальными являются задачи об экстраполяции значений процесса на некоторое количество шагов вперёд, а также задача о точечной оценке показателя Хёрста H. Именно второй задаче и посвящена данная работа.

Ключевые слова: фрактальное броуновское движение, показатель Хёрста, математическая модель, статистические оценки, процессы с длительной памятью.

DOI: https://doi.org/10.31857/S0869-56524895456-460

Как было отмечено выше, впервые показатель Хёрста появился при оценке поведения изменений стоков Нила за определённый период. Г. Хёрст [1] исследовал данные паводков с 622 по 1469 г. и попытался построить модель, описывающую общий расход реки. Стоит отметить, что если бы расход воды был случаен за каждый фиксированный период времени (возьмём, к примеру, год) и не зависел от других наблюдений, то данные хорошо бы описывались моделью винеровского процесса, т.е. общий расход имел бы порядок $t^{1/2}$. Однако фактический результат был совсем иным: порядок полученных значений составлял $t^{0,73}$. Были проведены расчёты и для других рек, которые подтвердили корректность результатов Хёрста.

Перейдём теперь к формальному описанию фрактального броуновского движения с показателем Хёрста H. Существуют два подхода к определению этого процесса: идею для первого определения представил в своей работе А.Н. Колмогоров [2], а затем Б. Мандельброт и Дж. ван Несс [3] предложили стохастическое определение процесса. Для удобства мы будем работать именно с определением Колмогорова.

Гауссовская случайная величина X с нулевым средним имеет характеристическую функцию

$$Ee^{i\theta X} = \exp(-\sigma^2\theta^2) = \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma_0^2\theta^2\right).$$

Конечномерные распределения процесса $X(t)$ удовлетворяют следующему соотношению:

$$Ee^{i\sum_{j=1}^{m}\theta_j X(t_j)} = \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}A(t_j, t_k)\theta_j\theta_k + \sum_{j=1}^{m}\mu(t_j)\theta_j\right),$$

$\theta_1, \ldots, \theta_m \in R$, $m \geq 1$, где $\mu(t)$, $t \in R$ — вещественнозначная функция, а $\{A(t_1, t_2), t_1, t_2 \in R\}$ неотрицательно определена.

Согласно теореме Колмогорова (см., например, [4]) для каждого заданного μ и A существует гауссовский процесс: μ является его средним значением, а A — ковариационной функцией.

Теперь зафиксируем $0 < H < 1$. Зададим гауссовский процесс с нулевым средним и ковариационной функцией, равной

$$R_H(t_1, t_2) = \mathrm{cov}(X(t_1), X(t_2)) \overset{\text{def}}{=} \overset{\text{def}}{=} \frac{\sigma^2}{2}(|t_1|^{2H} + |t_2|^{2H} - |t_1 - t_2|^{2H}). \tag{1}$$

Этот процесс обладает следующими свойствами:

1) автомодельность с показателем H;

2) имеет стационарные приращения.

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

E-mail: *savid2000@mail.ru*

Можно показать, что любой гауссовский процесс, обладающий свойствами 1 и 2, имеет ковариационную функцию (1). В связи с этим корректно

Определение 1. Гауссовский процесс, обладающий свойствами 1 и 2, называется *фрактальным броуновским движением с показателем* H.

Если $\sigma = 1$, то процесс называется стандартным фрактальным броуновским движением. В дальнейшем без ограничения общности мы будем работать именно с таким случайным процессом.

Итак, пусть $B_H(t)$ — стандартное фрактальное движение с показателем H. Рассмотрим отрезок $t \in [0, 1]$ (можно взять произвольный конечный отрезок $t \in [0, T]$, но без ограничения общности мы возьмём именно единичный отрезок). Для каждого $n > 2$ и $i = 1, 2, \ldots, n$ положим

$$X_{i,n} = B_H\left(\frac{i}{n}\right), \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$
$$Y_{i,n} = X_{i+1,n} - X_{i,n}, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{2}$$

Для этих величин, очевидно, выполнены следующие равенства:

$$EX_{i,n} = 0, \quad DX_{i,n} = \left(\frac{i}{n}\right)^{2H}, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$
$$EY_{i,n} = 0, \quad DY_{i,n} = \frac{1}{n^{2H}}, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Поскольку $Y_{i,n}$ образуют стационарную последовательность, то можно рассчитать её автокорреляционную функцию:

$$R_Y(i, j) = \frac{\operatorname{cov}(Y_{i,n}, Y_{j,n})}{\sqrt{D(Y_{i,n})}\sqrt{DY_{j,n})}} =$$
$$= \frac{\operatorname{cov}(X_{i+1,n}, X_{j+1,n}) - \operatorname{cov}(X_{i+1,n}, X_{j,n}) - \operatorname{cov}(X_{i,n}, X_{j+1,n}) + \operatorname{cov}(X_{i,n}, X_{j,n})}{\sqrt{D(Y_{i,n})}\sqrt{D(Y_{j,n})}} =$$
$$= \frac{n^{2H}}{2}\frac{1}{n^{2H}}(|i+1|^{2H} + |j+1|^{2H} - |i-j|^{2H} - |i|^{2H} - |j+1|^{2H} + |i-j-1|^{2H} - |i+1|^{2H} -$$
$$- |j|^{2H} + |i-j+1|^{2H} + |j|^{2H} + |i|^{2H} - |i-j|^{2H}) =$$
$$= \frac{1}{2}(|i-j+1|^{2H} + |i-j-1|^{2H} - 2|i-j|^{2H}) = R_Y(i-j).$$

Подставив в аргумент этой функции $i - j = 1$, получим

$$R_Y(1) = \frac{1}{2}(2^{2H} - 2),$$

откуда

$$H = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{\ln(R_Y(1) + 1)}{\ln 2}. \tag{3}$$

Пусть теперь

$$R_n(1) = \frac{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} Y_{i,n}Y_{i+1,n}}{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} Y_{i,n}^2}$$

есть выборочный коэффициент корреляции. Подставив эту статистику в выражение (3) вместо $R_Y(1)$, получаем финальное выражение для оценки показателя Хёрста:

$$H_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{\ln(R_n(1) + 1)}{\ln 2}. \tag{4}$$

В работе исследуются свойства построенной статистики, оценивается асимптотика и предельное распределение, а также проводится сравнение с оценкой, полученной в [5], соответствующей выборке из стандартного броуновского движения, которая выражается следующим образом:

$$H_n(\Re) = -\frac{\ln\left[\frac{\sqrt{\pi}S_n(\Re)}{2^{\Re/2}\Gamma\left(\frac{\Re+1}{2}\right)}\right]}{\Re\ln(n-1)}, \tag{5}$$
$$S_n(\Re) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}|X_{i+1,n} - X_{i,n}|^{\Re},$$

где $\Re > 0$ — произвольное вещественное положительное число.

Частный случай этой оценки при $\Re = 1$ рассмотрен в [6]. Преимуществом такой оценки является её наглядность, благодаря явному выражению математического ожидания для модуля приращений фрактального броуновского движения немедленно получается выражение (5).

Введём следующие обозначения: для произвольной стационарной последовательности $X_1, \ldots, X_n$

$$r_n(k) = \frac{1}{n-k}\sum_{i=1}^{n-k}(X_i - \mu)(X_{i+k} - \mu) \qquad (6)$$

есть выборочная автокорреляционная функция, а $\rho(k) = E(X_i - \mu)(X_{i+k} - \mu)$ — теоретическая автокорреляционная функция.

Ниже приведены свойства оценки (4), на основе которых можно провести сравнение двух статистик (4) и (5). Основные результаты содержатся в следующих теоремах.

Теорема 1. *Пусть $Y_{i,n}$ — приращения фрактального броуновского движения, заданные по формуле* (2).

Пусть $H \in \left(\frac{3}{4}, 1\right)$, а также $R_k = n^{2(1-H)}\frac{r_k - \rho_k}{1-\rho_k}$. Тогда если $n \to \infty$, то $R_k - R_l \xrightarrow{\text{P}} 0$ при $k \neq l$, а предельное распределение R_k имеет p-й семиинвариант, который задан следующими формулами:

$$S_1 = 0,$$
$$S_p = 2^{p-1}\cdot(H(2H-1))^p(p-1)!I_p, \quad p \geq 2,$$

где $I_p = \int_0^1 \ldots \int_0^1 |x_1 - x_2|^{-2(1-H)}|x_2 - x_3|^{-2(1-H)}\ldots$

$\ldots|x_{p-1} - x_p|^{-2(1-H)}|x_p - x_1|^{-2(1-H)}dx_1dx_2\ldots dx_p.$

Пусть $H = \frac{3}{4}$, а также $R_k = \left(\frac{n}{\ln n}\right)^{1/2}\frac{r_k - \rho_k}{1-\rho_k}$. Тогда если $n \to \infty$, то $R_k - R_l \xrightarrow{\text{P}} 0$ при $k \neq l$, а R_k имеет распределение $\mathcal{N}\left(0, \frac{9}{16}\right)$.

Пусть $H \in \left(0, \frac{3}{4}\right)$, а также $R_k = n^{1/2}(r_k - \rho_k)$. Тогда если $n \to \infty$, то $R_k - R_l \xrightarrow{\text{P}} 0$ при $k \neq l$, а всякое конечномерное распределение R_k, $k \geq 1$, является многомерным нормальным распределением с нулевым вектором средних.

Исходя из этой теоремы можно описать асимптотическое распределение статистики $R_n(1)$, входящей в выражение оценки показателя Хёрста (4):

при $H \in \left(0; \frac{3}{4}\right) \quad R_n(1) \sim \mathcal{N}(R_Y(1), O(n^{-1}))$;

при $H = \frac{3}{4} \quad R_n(1) \sim \mathcal{N}\left(R_Y(1), O\left(\frac{\ln n}{n}\right)\right)$;

при $H \in \left(\frac{3}{4}; 1\right) \quad R_n(1) \sim \mathcal{N}(R_Y(1), O(n^{-4(1-H)}))$.

Граничное значение $H = \frac{3}{4}$ возникает из следующего соображения: пусть

$$R_Y(j) = \frac{1}{2}(|j+1|^{2H} - 2|j|^{2H} + |j-1|^{2H})$$

есть автокорреляционная функция. Устремив $j \to \infty$, получим

$$R_Y(j) \sim H(2H-1)|j|^{2H-2}.$$

Значение $H = \frac{3}{4}$ равносильно тому, что функция $R_Y(j)$ убывает со скоростью $\sqrt{n}$. Именно от того, быстрее или медленнее этой скорости убывает функция $R_Y(j)$, зависит характер асимптотического распределения.

Доказательство утверждения достаточно громоздко и включает в себя несколько последовательных шагов по исследованию выборочных статистик. Указанный результат получен на основе доказанных предельных теорем для выборочного среднего и выборочной автоковариационной функции. Общий ход доказательства построен на основе теории семиинвариантов и спектральном представлении стационарных случайных процессов.

Теорема 2. *Пусть H_n — оценка показателя Хёрста из* (4). *Тогда справедливы следующие соотношения*:

1) $EH_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\ln(R_Y(1)+1)}{\ln 2} = H$;

2) $E(H_n - H)^2 = \begin{cases} O(n^{-1}), & \text{если } H \in \left(0; \frac{3}{4}\right); \\ O(n^{-1}\ln n), & \text{если } H = \frac{3}{4}; \\ O(n^{-4(1-H)}), & \text{если } H \in \left(\frac{3}{4}; 1\right). \end{cases}$

На самом деле можно доказать более общее утверждение о виде асимптотического распределения оценки H_n, но для теоремы сравнения двух оценок достаточно результата, дающего асимптотику первых двух моментов. Эта теорема, по сути, устанавливает несмещённость и состоятельность оценки H_n, а также даёт явную скорость сходимости дисперсии к нулю, которая отличается на разных диапазонах показателя H. Доказательство использует свойства асимптотического распределения выборочной автокорреляционной функции, а также принцип наследования распределений[1] и теорему Слуцкого (см. [7]).

[1] Принцип наследования заключается в следующем: если $X_n = a + O_p(r_n)$ при $r_n \to 0$, а $g(x)$ — непрерывная k раз дифференцируемая функция в точке a, то выполнено следующее равенство:

$$g(X_n) = g(a) + g'(a)(X_n - a) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{(k-1)!}g^{(k-1)}(a)(X_n - a)^{k-1} + O_p(r_n^k).$$

Теорема 3. *Пусть H_n — оценка* (4), *а* $H \in \left(0, \frac{3}{4}\right)$. *Тогда для оценки H_n справедливы следующие равенства*:

$$2\sqrt{n}(H_n - H)(R_Y(1)+1)\ln 2 \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2),$$

причём

$$\sigma^2 = \frac{1 + R_Y^2(1)(7 + 8R_Y(2)) + 2R_Y(3)(1 + R_Y(1))}{(1 + R_Y(1))^2}.$$

Доказательство основано на использовании свойств сходящейся по распределению последовательности, а также теореме Слуцкого. Теорема 3 определяет асимптотический характер распределения оценки показателя Хёрста при определённых значениях H. Стоит отметить, что теорема верна только для указанного диапазона значений H. Как показывает теорема 1, асимптотическое распределение выборочной автоковариационной функции при $H > \frac{3}{4}$ не является нормальным. По принципу наследования и сама оценка показателя H имеет другой тип распределения.

Заключительная теорема устанавливает асимптотические свойства оценки (5).

Теорема 4. *Пусть $Y_{i,n}$ — приращения стандартного фрактального броуновского движения, а $H_n(\mathfrak{R})$ — оценка* (5). *Тогда для неё справедливо следующее равенство*:

$$E(H - H_n(\mathfrak{R}))^2 = \begin{cases} O\left(\dfrac{1}{n\ln^2 n}\right), \ \text{если } H \in \left(0, \dfrac{3}{4}\right); \\ O\left(\dfrac{1}{n^{4(1-H)}\ln^2 n}\right), \ \text{если } H \in \left(\dfrac{3}{4}, 1\right). \end{cases}$$

Теорема основана на детальном анализе всех входящих в формулу (4) компонент: их сходимости по распределению, по вероятности, а также оценке допустимых значений параметра R. Доказательство также использует теорему о распределении квадратичных форм, аргументами которых являются центрированные гауссовские величины [8]. Финальная оценка получена после применения принципа наследования распределений и теоремы Слуцкого.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Hurst H.* // Transactions of American Society of Civil Engineers. 1951. V. 116. P. 770–808.
2. *Колмогоров А.Н.* Спираль Винера и некоторые другие интересные кривые в гильбертовом пространстве // ДАН. 1940. Т. 26. С. 115–118; Избранные труды. Математика и механика. М.: Наука, 1985. С. 274–277.
3. *Mandelbrot B.B.*, *Van Ness J.W.* Fractional Brownian Motions, Fractional Noises and Applications // SIAM Review. 1968. V. 10. № 4. P. 422–437.
4. *Булинский А.В.*, *Ширяев А.Н.* Теория случайных процессов. М.: Физматлит, 2005. 408 с.
5. *Peltier R.F.*, *Vehel J. Levy*. A new methods for estimation parameters of fractional Brownian motion. Preprint № 2396. November 1994.
6. *Ширяев А.Н.* Основы стохастической финансовой математики. Т. 1. Факты. Модели. М.: ФАЗИС, 1998. 512 с.
7. *Гнеденко Б.В.* Курс теории вероятностей. М.: Наука, 1965.
8. *Dobrushin R.L.*, *Major P.* Non-Central Limit Theorems for Non-Linear Functionals of Gaussian Fields // Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete, 1979. V. 50. P. 27–52.
9. *Ширяев А.Н.* Вероятность: В 2 кн. 3-е изд., перераб. и доп. М.: МЦНМО, 2004.

ESTIMATION METHOD OF HURST EXPONENT OF FRACTIONAL BROWNIAN MOTION

A. V. Savitskii

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation

Presented by Academician of the RAS A.N. Shiryaev July 25, 2019

Received August 21, 2019

The article contains fractional Brownian motion research, statistical estimations of Hurst exponent and their properties. This random process is used in model development, trend forecasting, in particular as special case of long-memory processes. The first recorded model with Hurst Exponent appeared in Harold Hurst's research, published in 1951, that was dedicated to the analysis of the flow of Nil river. After that improved model of fractional Brownian motion was widely used in different financial market researches. Due to high relevance of such random processes the problems of extrapolation of fractional Brownian motion and point estimation have become very important. This article is dedicated to the new approach of point estimation of Hurst Exponent.

Keywords: fractional Brownian motion, Hurst exponent, mathematical model, statistical estimations, long-memory processes.