

УДК 51-72 : 539.214 : 539.374

**МОДЕЛИРОВАНИЕ И СРАВНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ТОЧНОГО АНАЛИТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТЕЧЕНИЯ В ТОНКОМ СЛОЕ С ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМИ ДАННЫМИ**

© 2023 Е. А. Яновская

Московский государственный технологический университет «СТАНКИН», г. Москва, Россия

Статья поступила в редакцию 26.05.2023

Многие технологические процессы обработки металлов давлением включают деформирование удлиненной заготовки сближающимися инструментами, контактные поверхности которых имеют неглубокие ручьевые полости. Распространенным частным случаем являются штампы или часть их контактных поверхностей, представляющих собой плоскости: площадки под осадку и некоторые виды заготовительных ручьев. Статья посвящена математическому моделированию течения тонкого слоя металла по шероховатым поверхностям. В статье приводятся результаты аналитического исследования краевой задачи о вязкопластическом течения тонкого слоя металла, расположенного между движущимися навстречу друг другу тонкими шероховатыми плитами. Приводятся точные решения, основанные на классической постановке в рамках «идеальной жидкости» и «вязкопластической жидкости». Описан реальный эксперимент, проведенный для оценки влияния осредненных по толщине слоя касательных напряжений на кинематику течения пластического слоя. С целью оценки влияния касательных напряжений, осредненных по толщине слоя, на кинематику течения, и, в особенности, вблизи неподвижных границ поставлены эксперименты и анализируются результаты по осадке между сближающимися жесткими плитами тонкого пластического образца, ограниченного неподвижными стенками и, первоначально имеющего форму прямоугольника в плане. Неподвижные стенки инструмента расположены вдоль длинных сторон прямоугольника. Установлены экспериментальные закономерности. Растекание образцов происходит ожидаемо – по прямым линиям тока, параллельным длинной стороне прямоугольника, или по лучам кругового сектора. При этом установлено, что продольные перемещения вблизи неподвижных стенок заметно отстают от перемещений вдали от границы, а максимальные перемещения наблюдаются на линии симметрии образца относительно неподвижных стенок. Этот факт говорит о наличии ненулевых сдвиговых напряжений и (скоростей) деформаций в рассматриваемых течениях тонкого пластического слоя. Сравнение полученных экспериментальных и аналитических результатов моделирования позволяет оценить корректность выбранной математической модели, которая может быть использована для описания течений.

*Ключевые слова:* тонкий слой, стесненное течение, модель «идеальной жидкости», результаты эксперимента.

DOI: 10.37313/1990-5378-2023-25-3-130-139

EDN: LLYQKW

**Постановка и решение краевой задачи.**

Пусть достаточно тонкий слой металла деформируется параллельно движущимся навстречу друг другу плоскими инструментами, как показано на рис. 1. В качестве допущений примем [1]:

- плоскости контакта инструмента являются шероховатыми;
- материал инструмента абсолютно жесткий;
- деформируемый слой из идеально пластического металла.

Кроме того, течение по координате  $y = \pm b_0$  отсутствует, т.к. контейнер матрицы имеет боковые стенки (рис. 1 б).

Краевая задача растекания на шероховатой плоскости слоя из пластического материала формулируется следующим образом [2, 3]:

*Яновская Елена Александровна, кандидат технических наук, доцент кафедры прикладной математики. E-mail: elena\_yanovskaya@bc.ru*

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\sigma_s}{3} \frac{dt}{dl} \Delta u - \frac{2\tau_s}{h} \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\sigma_s}{3} \frac{dt}{dl} \Delta v - \frac{2\tau_s}{h} \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{dl}{dt} = 0, \tag{3}$$

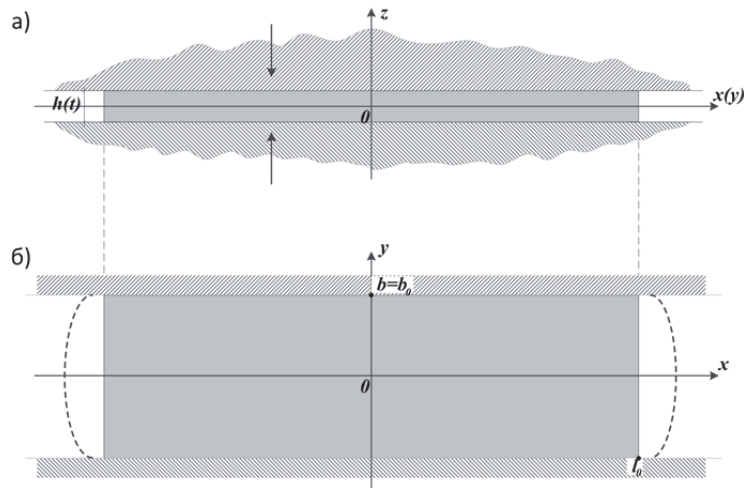
где  $p, u, v$  – давление на контактных поверхностях и компоненты вектора скорости;  $\tau_s = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}$

– сдвиговые напряжения материала пластического слоя;  $h = h(t)$  – зависимость изменения толщины слоя от времени;

$$\lambda(t) = \ln \frac{h(t_0)}{h(t)},$$

$\lambda(t)$  – степень деформации по А.А. Ильюшину;  $t_0$  – время начала процесса деформирования.

Примем на свободной границе образца, обозначенной как  $\Gamma_C: F(x, y, t) = 0$ , положение которой заранее неизвестно, краевые условия:



**Рисунок 1.** Схема течения сборного образца:

а – разрез плоскостью, проходящей через ось z; б – вид сверху

одно динамическое

$$\vec{\sigma}^{(n)} = \tilde{\sigma} \vec{n} = \vec{0}, \quad (4)$$

заменяв его двумя скалярными, получим:

$$\sigma_{xx}n_x + \sigma_{xy}n_y = 0; \quad \sigma_{yy}n_y + \sigma_{xy}n_x = 0, \quad (5)$$

где нормальный к границе вектор:

$$\vec{n} = (n_x, n_y) = \frac{\nabla F}{|\nabla F|}, \quad (6)$$

при этом не нулевые компоненты тензора напряжений  $\tilde{\sigma}$  будут иметь вид:

$$\sigma_{xx} = -p + \frac{2}{3}\sigma_s + \frac{2}{3}\sigma_s \frac{dt}{d\lambda} \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \sigma_{xy} = \frac{1}{3} \frac{dt}{d\lambda} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right); \quad \sigma_{yy} = -p + \frac{2}{3}\sigma_s + \frac{2}{3}\sigma_s \frac{dt}{d\lambda} \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (7)$$

Кроме динамического условия (4), требуется задать одно кинематическое, обусловленное непроницаемостью границ:

$$v_n \equiv \vec{v} \cdot \vec{n} = - \frac{\partial F / \partial t}{|\text{grad} F|} \quad (8)$$

По условию (8) можно восстановить интересующую нас границу  $\Gamma_c$ . Обозначим контактную поверхность с инструментом через  $\Gamma_k: G(x, y, t) = 0$ , на которой реализуются также два условия: одно динамическое, диктуемое равенством тангенциальной составляющей вектора напряжения предельному значению при факторе трения  $\mu = 1$ :

$$|\vec{\sigma}^{(n)} \cdot \vec{\tau}| = |\sigma_{xx}n_xn_y + \sigma_{xy}(n_y^2 - n_x^2) - \sigma_{yy}n_xn_y| = \mu\tau_s, \quad (0 \leq \mu \leq 1) \quad (9)$$

и второе кинематическое, обусловленное непроницаемостью контактных поверхностей инструмента (10):

$$v_n \equiv \vec{v} \cdot \vec{n} = - \frac{\partial G / \partial t}{|\text{grad} G|}, \quad (10)$$

где  $\vec{\tau} = (n_y, -n_x)$  и  $\vec{n}$  – единичные касательный и нормальный векторы к границе  $\Gamma_k$ . Если граница неподвижна, то компонента нормальной скорости равна нулю.

Для решения системы (1)-(3) течения пластического слоя с подвижными и неподвижными границами выписанных условий (7)-(10) вполне достаточно.

Для перехода к безразмерному описанию задачи определим значения характерной длины  $l_0$ , скорости сближения плит деформирующих инструментов  $v_0$ , контактного давления  $p_0$ , толщина слоя обезразмеривается на  $h_0$ , время – на  $\frac{l_0}{v_0}$ . Относительную толщину пластического слоя  $\varepsilon = \frac{h_0}{l_0} \ll 1$  примем за малый параметр.

Проведем оценку порядка последних величин, исходя из простейших уравнений математической модели растекания тонкого слоя из пластического материала.

Уравнение равновесия (1) при  $v=0$

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{2\tau_s}{h} = 0$$

запишем в безразмерном виде

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_{xx}}{\partial \bar{x}} \left( \frac{p_0}{l_0} \right) + \frac{2\tau_s}{\bar{h}} \cdot \frac{1}{h_0} = 0. \quad (11)$$

Следовательно,

$$\frac{p_0}{l_0} \sim \frac{\sigma_s}{h_0}, \text{ или } p_0 \sim \frac{\sigma_s}{\left(\frac{h_0}{l_0}\right)} = \frac{\sigma_s}{\varepsilon}.$$

$$p_0 = \frac{\sigma_s}{\varepsilon}. \quad (12)$$

Рассмотрим, далее условие несжимаемости (2)

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{h} \frac{dh}{dt} = 0. \quad (13)$$

Следовательно,

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \left(\frac{v_0}{l_0}\right) + \frac{1}{\bar{h}} \frac{1}{h_0} \left(\frac{dh}{dt}\right) \frac{dh(t_0)}{dt} = 0,$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \left(\frac{v_0}{l_0}\right) + \frac{1}{\bar{h}} \left(\frac{dh}{dt}\right) \left(\frac{h_0}{l_0}\right) \frac{dh(t_0)}{dt} = 0$$

и

$$\frac{v_0}{l_0} \sim \frac{1}{h_0} \frac{dh(t_0)}{dt}.$$

Очевидно, что

$$v_0 \sim \frac{dh(t_0)}{dt} \frac{1}{\varepsilon}.$$

Приведем уравнение несжимаемости (13) к безразмерному виду

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \left(\frac{v_0}{l_0}\right) + \frac{1}{\bar{h}} \left(\frac{1}{h_0}\right) \frac{dh(t_0)}{dt} \frac{h_0}{t_0} = 0.$$

После подстановки  $\frac{v_0}{l_0}$  и сокращения, получим, что

$$\frac{v_0}{l_0} \sim \frac{1}{t_0}$$

и окончательно

$$t_0 \sim \frac{l_0}{v_0}.$$

Будем считать, что

$$t_0 = \frac{l_0}{v_0}; \quad v_0 = -\frac{dh(t_0)}{dt} \frac{1}{\varepsilon}.$$

Сравнение величин характерных скоростей приводит к утверждению, что скорость сближения инструментов заметно отстает от скорости течения слоя и это является прогнозируемым. Оценим порядок слагаемых в квазистатических уравнениях равновесия. Очевидно, что давление на контакте (12) при возрастании, превышает предел текучести материала слоя.

Полагая, что толщина слоя  $h$ , в отличие от других линейных размеров (координат), при делении на  $h(t_0)$  становится безразмерной, перепишем в безразмерном виде систему уравнений (1) – (3):

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} = \varepsilon \frac{d\bar{t}}{d\lambda} \Delta \bar{u} - \frac{2}{\sqrt{3}\bar{h}} \frac{\bar{u}}{\sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2}}, \quad (14)$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} = \varepsilon \frac{d\bar{t}}{d\lambda} \Delta \bar{v} - \frac{2}{\sqrt{3}\bar{h}} \frac{\bar{v}}{\sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2}}, \quad (15)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} - \frac{d\lambda}{d\bar{t}} = 0, \quad (16)$$

где безразмерные величины отмечены диакритическим знаком «верхняя черта» (заметим, что в уравнениях равновесия при слагаемых со старшими производными - лаплассианами появился малый параметр  $\varepsilon$ ).

Граничные условия поставленной задачи преобразуем следующим образом. На свободной границе  $\Gamma_F: F(x, y, t) = 0$  при отсутствии напряжений (4):

$$\bar{\sigma}_{xx} = -\bar{p} + \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3} \frac{d\bar{t}}{d\lambda} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}}\right) \varepsilon; \quad \bar{\sigma}_{xy} = \frac{1}{3} \frac{d\bar{t}}{d\lambda} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}}\right) \varepsilon; \quad \bar{\sigma}_{yy} = -\bar{p} + \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3} \frac{d\bar{t}}{d\lambda} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}}\right) \varepsilon.$$

С учетом безразмерного вектора (6) нормали к границе:

$$\vec{n} = \frac{\text{grad} \bar{F}}{|\text{grad} \bar{F}|}$$

скалярные условия (5) после обезразмеривания приобретут вид

$$\left[-\bar{p} + \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3} \frac{d\bar{t}}{d\lambda} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}}\right) \varepsilon\right] n_x + \left[\frac{1}{3} \frac{d\bar{t}}{d\lambda} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}}\right) \varepsilon\right] n_y = 0, \quad (17)$$

$$\left[ \frac{1}{3} \frac{d\bar{\epsilon}}{d\lambda} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \right) \epsilon \right] n_x + \left[ -\bar{p} + \left( \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \frac{d\bar{\epsilon}}{d\lambda} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right) \epsilon \right] n_y = 0. \quad (18)$$

Кинематическое условие (8) для восстановления границы  $\Gamma_F$  преобразуется:

$$\bar{v}_n = - \frac{\partial \bar{F} / \partial \bar{t}}{|grad \bar{F}|}. \quad (19)$$

На контактной границе слоя с инструментом  $\Gamma_k$  динамическое условие (9) в безразмерном виде:

$$\left| \bar{\sigma}_{xx} n_x n_y + \sigma_{xy} (n_y^2 - n_x^2) - \bar{\sigma}_{yy} n_x n_y \right| = \frac{\mu}{\sqrt{3}} \epsilon \quad (20)$$

или

$$\left[ -\bar{p} + \left( \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \frac{d\bar{\epsilon}}{d\lambda} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \right) \epsilon \right] n_x n_y + \left[ \frac{1}{3} \frac{d\bar{\epsilon}}{d\lambda} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \right) \epsilon \right] (n_y^2 - n_x^2) - \left[ -\bar{p} + \left( \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \frac{d\bar{\epsilon}}{d\lambda} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right) \epsilon \right] n_x n_y = \pm \frac{\mu}{\sqrt{3}} \epsilon. \quad (21)$$

Условие непроницаемости поверхности инструмента (10) определится как (22):

$$\bar{v}_n = - \frac{\partial \bar{G} / \partial \bar{t}}{|grad \bar{G}|}, \quad (22)$$

В итоге два дифференциальных уравнения в частных производных (14), (15) квазистатического равновесия и условие несжимаемости (16) вместе с граничными условиями (17) – (22) составляют общую краевую задачу течения пластического слоя в модели «вязкой жидкости» [4, 5].

В главном приближении, когда отсутствует малый параметр ( $\epsilon = 0$ ), исходные уравнения упрощаются с понижением порядка системы:

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} = - \frac{2\tau_s}{\sqrt{3}h} \frac{\bar{u}}{\sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2}}; \quad (25)$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} = - \frac{2\tau_s}{\sqrt{3}h} \frac{\bar{v}}{\sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2}}; \quad (26)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} - \frac{d\lambda}{d\bar{t}} = 0. \quad (25)$$

Надо заметить, что большинство исследований в указанной области проводились на основе упрощенной постановки краевой задачи в модели «идеальной жидкости», которая описывается нелинейными дифференциальными уравнениями в частных производных первого порядка [2, 6]. В эту модель входят уравнения квазистатического равновесия (26) и (27):

$$\frac{\partial p}{\partial x} = - \frac{2\tau_s}{h} \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \quad (26)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = - \frac{2\tau_s}{h} \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \quad (27)$$

а для избавления модели от статической неопределенности в систему следует добавить условие несжимаемости (3).

Логично, что граничных условий в упрощенной задаче в модели «идеальной жидкости» требуется меньше, а касательными напряжениями пренебрегают. В этом случае краевые условия имеют вид:

$$p = \sigma_s, \quad (28)$$

если деформирующий инструмент содержит пазы, куда свободно затекает металл, то

$$p = 2\sigma_s, \quad (29)$$

а в случае, если на границе пластического слоя и инструмента течение затруднено, то

$$p = p_\Gamma(\eta), \quad (30)$$

где  $\eta$  - параметр вдоль контура области.

Из двух уравнений (26) и (27) последней системы нетрудно получить одно нелинейное дифференциальное уравнение относительно контактного давления:

$$\left( \frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial p}{\partial y} \right)^2 \equiv grad^2 p = \frac{4\tau_s^2}{h^2}, \quad (31)$$

которое вместе с граничным условием (28) или (29), или (30) представляет краевую задачу относительно контактного давления.

Исследование кинематических параметров течения пластического слоя по упрощенной модели обеспечило возможность вывода эволюционного уравнения, с помощью которого устанавливают свободную границу растекающейся области [7].

**Краевая задача течения пластического слоя в новой постановке** предполагает введение функции тока  $\psi = \psi(x, y)$ , которая не противоречит условию несжимаемости (3). Преобразованные компоненты скоростей (32)

$$u = \frac{d\lambda}{dt} \left( \psi'_y + \frac{x}{2} \right); \quad v = -\frac{d\lambda}{dt} \left( \psi'_x - \frac{y}{2} \right). \quad (32)$$

подставим в квазистатические уравнения равновесия и в результате получим систему из двух дифференциальных уравнений (33) и (34) относительно контактного давления  $p$  и функции тока  $\psi$ :

$$\frac{p'_x - \left(\frac{\sigma_s}{3}\right) \Delta \psi'_y}{p'_y + \left(\frac{\sigma_s}{3}\right) \Delta \psi'_x} = -\frac{2\tau_s}{h} \frac{\psi'_y + \frac{x}{2}}{\psi'_x - \frac{y}{2}}, \quad (33)$$

$$\left( p'_x - \left(\frac{\sigma_s}{3}\right) \Delta \psi'_y \right)^2 + \left( p'_y - \left(\frac{\sigma_s}{3}\right) \Delta \psi'_x \right)^2 = \frac{4\sigma_s^2}{3h^2}. \quad (34)$$

Далее рассмотрим в натуральных величинах задачу течения пластического слоя, имеющего в начальный момент деформирования форму прямоугольника в плане (см. рис.1). В силу симметрии пластической области относительно выбранной системы координат, будем работать с элементом слоя, расположенным в первом квадранте. На неподвижной стенке инструмента при координате  $G(x, y) \equiv y - b_0 = 0$ :

$$v = 0 \Rightarrow \psi'_x - \frac{b_0}{2} = 0, \quad (35)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = -\sqrt{3}\lambda'\mu \Rightarrow \psi''_{yy} - \psi''_{xx} = -\sqrt{3}\lambda'\mu. \quad (36)$$

Краевые условия:

$$y = 0: v = 0 \Rightarrow \psi'_x = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \Rightarrow \psi''_{yy} = 0 \quad (37)$$

$$x = 0: u = 0 \Rightarrow \psi'_y = 0; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \Rightarrow \psi''_{xx} = 0 \quad (38)$$

На неизвестной свободной границе  $F(x, y, t) = 0$ , в начальный момент имеющей параметры  $x = l_0 (n_x = 1, n_y = 0)$ , краевые условия определяются:

$$\sigma_{xx} = 0 \Rightarrow -p + \sigma_s + \frac{2}{3}\sigma_s\psi''_{xy} = 0; \quad \sigma_{xy} = 0, \psi''_{yy} - \psi''_{xx} = 0. \quad (39)$$

Для нивелирования влияния краевых эффектов будем искать аналитическое решение задачи на некотором удалении от оси  $x = 0$  и от свободной границы  $x = 0,5l_0$ , поскольку протяженность области течения в направлении  $x$  позволяет это сделать. Для рассматриваемого участка области течения компонента скорости  $v(x, y) = 0$ . После интегрирования уравнения несжимаемости (36) получаем:

$$u(x, y) = \lambda' [x + g(y)],$$

где функцию  $g(y)$  можно определить из других уравнений системы: (2) дает  $p = p(x)$  и тогда из (1) следует (40):

$$p'(x) = \frac{\sigma_s}{3} - \frac{2\sigma_s}{\sqrt{3}h}, \quad (40)$$

где в левой части стоит функция аргумента  $x$ , а в правой - функция  $y$  и параметр  $h(t)$ , другими словами, имеем дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. В итоге получаем систему с произвольной постоянной, представляющей собой функцию времени  $k$ :

$$g''(y) = k = const; \quad p'(x) = \frac{\sigma_s k}{3} - \frac{2\sigma_s}{\sqrt{3}h}. \quad (41)$$

После нахождения решения дифференциального уравнения первого порядка с разделяющимися переменными (41) после подстановки граничных условий (37), (38) получим:

$$g(y) = c - \frac{\sqrt{3}\mu}{2b_0} y^2, \quad k = -\frac{\sqrt{3}\mu}{b_0}, \quad (42)$$

$$u(x, y) = \lambda' \left[ x - \frac{\sqrt{3}\mu}{2b_0} y^2 + c \right], \quad (43)$$

где  $c$  - постоянная интегрирования.

Заметим, что первое слагаемое в правой части уравнения (43) соответствует скорости течения в модели «идеальной жидкости», в рамках которой касательное напряжение на неподвижной границе, равное 0, как и на других границах, отсутствует. Положим, что сечение  $x = x_f$  представляет собой условную свободную границу ( $x_f h = x_0 h_0$ ). Тогда из интегрального условия сохранения объема несжимаемого материала

$$-x_f(t) \frac{dh}{dt} b_0 = \int_0^{b_0} hu(x_f, y) dy$$

определяем входящую в решение произвольную постоянную  $c = \frac{\sqrt{3}}{6}\mu b_0$ , что дает возможность получить окончательную формулу для скорости течения:

$$u(x, y) = \lambda' \left[ x + \frac{\sqrt{3}}{6b_0} (\mu b_0^2 - 3y^2) \right]. \quad (44)$$

Сопоставлением найденной скорости (44) и граничного условия (30) при значении  $x = 0$  убеждаемся, что оно выполняется в интегральном виде:

$$\int_0^{b_0} u(0, y) dy = \frac{\lambda' \sqrt{3}}{6b_0} \int_0^{b_0} (b_0^2 - 3y^2) dy = 0.$$

Из второго уравнения (41) после интегрирования получим (45):

$$p(x) = p_0 - \frac{\sigma_s x}{\sqrt{3}} \left( \frac{2}{h} + \frac{\mu}{b_0} \right), \quad (45)$$

с постоянной интегрирования  $p_0$ , не зависящей от координаты  $y$ . Полагая, что на свободной границе нормальное напряжение равно нулю:

$$\sigma_{xx} = -p + \frac{4\sigma_s}{3} = 0$$

находим

$$p_0(t) = \frac{2\sigma_s x_f}{\sqrt{3}h} + \left( \frac{x_f}{\sqrt{3}b_0} + \frac{4}{3} \right) \sigma_s.$$

При достаточно большом  $x_f$  третьим слагаемым в правой части можно пренебречь, тогда окончательно постоянная интегрирования примет вид

$$p_0(t) = \frac{\sigma_s x_f}{\sqrt{3}} \left( \frac{2}{h} + \frac{\mu}{b_0} \right).$$

В результате искомое значение давления найдем в соответствии с результатом в (45):

$$p \approx \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}} \left( \frac{2}{h} + \frac{\mu}{b_0} \right) (x_f - x). \quad (46)$$

В заключении определим вид функции тока:

$$\psi'_x = \frac{y}{2}; \quad \psi'_y = \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6b_0} (\mu b_0^2 - 3y^2) \Rightarrow \psi(x, y) = \frac{\sqrt{3}}{6b_0} (\mu b_0^2 y - 3y^3) + c_1. \quad (47)$$

Таким образом, в рамках общей модели «вязкой жидкости» получено приближенное аналитическое решение. На границе  $x = 0$ , а также на свободной границе  $x = x_f(t)$  оно удовлетворяет краевым условиям в интегральной форме. Следовательно, согласно принципу Сен-Венана, решение справедливо в центральной части области течения. Характер течения в слое не является одномерным, поэтому прямые линии ( $x = const$ ) с течением временем искривляются, причем наблюдается заметное отставание продольного перемещения частиц вблизи неподвижной границы. Этот факт подтверждается результатами проведенных экспериментов. Полученные закономерности невозможно описать с помощью модели «идеальной жидкости», в которой не учитываются касательные напряжения.

**Результаты экспериментальных исследований.** Для оценки влияния осредненных по толщине слоя касательных напряжений на кинематику течения в эксперименте необходимо обеспечить условия затрудненного течения пластического слоя, что достигалось конструкцией инструмента, а именно матрица имеет противоположные неподвижные стенки (рис. 2), ограничивающие течение плоского образца, имеющего прямоугольную форму, вдоль длинных сторон. Образцы выполнены составными из двух полос толщиной 2 мм. Размеры в плане: длина  $2l_0 = 70$  мм, ширина  $2b_0 = 25$  мм, и суммарная толщина  $h_0 = 4$  мм. Материал образцов свинец марки С0 ГОСТ 3778-98 [8]. Для того, чтобы нанести координатную сетку на одну из плоскостей полосы, были изготовлены пары тонких полос с толщинами  $l_{01} = l_{02} = 2$  мм, и на поверхность одной из них с помощью инструментального микроскопа УИМ-21 наносилась координатная сетка с шагом  $\Delta l = 2 \pm 0,01$  мм (рис. 3).

Были проведены две серии экспериментов. Полоса деформировалась в оснастке так, что в процессе осаживания размер  $r_0$  оставался неизменным.

В результате проведенных экспериментов по сжатию образцов между сближающимися жесткими плоскостями инструментов установлены экспериментальные закономерности. С помощью этих закономерностей можно оценить корректность выбранной математической модели, которая может быть использована для описания течений.



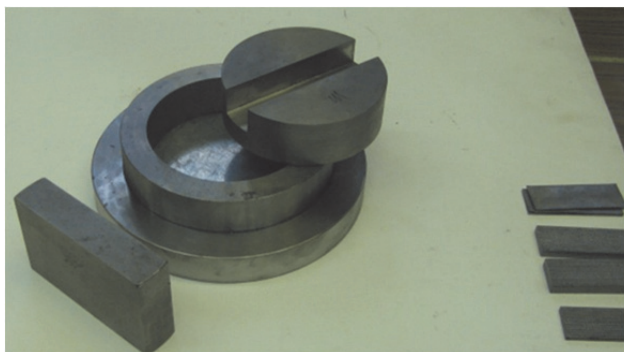


Рисунок 2. Штамповая оснастка

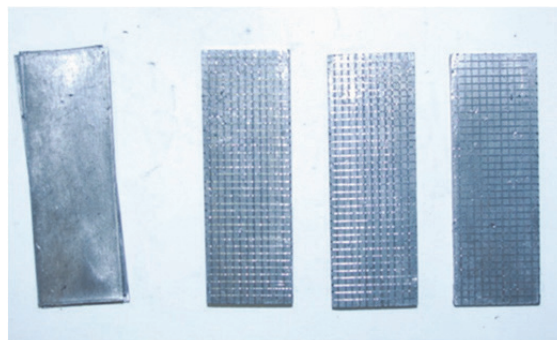
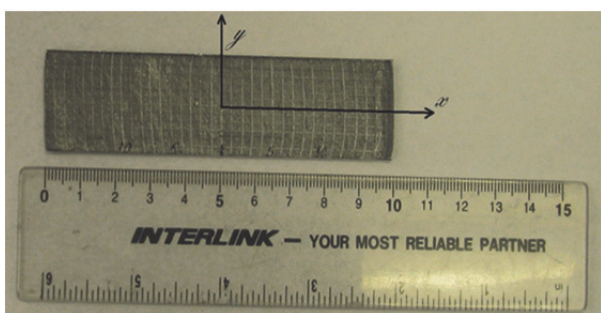
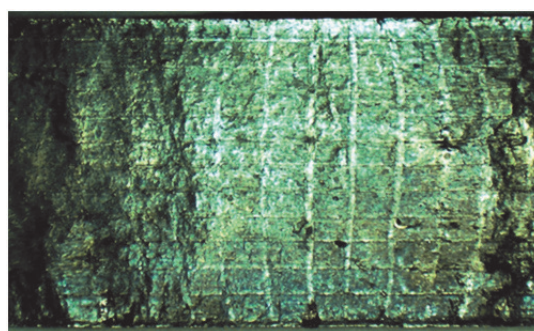


Рисунок 3. Исходные свинцовые образцы полос, на которые нанесена координатная сетка

В каждом отмеченном рисками сечении  $X = const$  отслеживали поле перемещений.



а)



б)

Рисунок 4. Координатная сетка после деформации ( $\frac{\Delta h}{h_0} = 0,3$ ):

а – система координат (линейка показывает только масштаб);

б – участок сетки с 4-х кратным увеличением

Смещения узлов координатной сетки после деформирования измеряли с точностью 0,01 мм на инструментальном микроскопе УИМ-21 с определением минимального значения перемещения  $u_b(X) = u(X; Y = \frac{b_0}{2})$  вблизи неподвижной границы ( $Y = \frac{b_0}{2}$ ) и максимального значения  $u_m(X) = u(X; Y = 0)$  в средней по ширине точке ( $Y = 0$ ) (рис. 4). Затем вычисляли абсолютную  $\Delta u = u_m(X) - u_b(X)$  и относительную  $\frac{\Delta u(X)}{u_m(X)}$  величины перемещений в характерных сечениях  $X = const$ .

Результаты измерений и значения оценок внесены в табл. 1 и табл. 2.

Таблица 1. Перемещения в сечении  $X = const$ :  $h_1 = 2,8$  мм;  $\Delta h_1 = h_0 - h_1 = 1,2$  мм;  $F = 200$  кН

$X$	$u_m(X)$	$u_\delta(X)$	$\Delta u(X) = u_m(X) - u_\delta(X)$	$\frac{\Delta u(X)}{u_m(X)}$
0	0	0		
4	2,43	1,92	0,52	0,21
8	3,93	3,29	0,64	0,16
12	6,16	4,95	1,21	0,19
16	8,10	6,68	1,42	0,17
20	9,93	8,07	1,86	0,19
24	11,90	9,54	2,36	0,20
28	14,05	10,60	2,45	0,24
32	16,05	11,51	4,64	0,28

**Таблица 2.** Перемещения в сечении  $X = const$ :  $h_2 = 2,6$  мм;  $\Delta h_2 = h_0 - h_2 = 1,2$  мм;  $F = 310$  кН

$X$	$u_m(X)$	$u_\delta(X)$	$\Delta u(X) = u_m(X) - u_\delta(X)$	$\frac{\Delta u(X)}{u_m(X)}$
0	0	0		
4	3,05	2,64	0,41	0,13
8	5,40	3,92	1,48	0,28
12	7,98	6,08	1,90	0,24
16	8,38	7,03	1,35	0,16
20	12,27	10,34	1,93	0,16
24	14,35	12,04	2,31	0,16
28	16,94	14,06	2,88	0,17
32	19,12	17,45	2,54	0,13

Анализ экспериментальных результатов подтверждает заметное отставание продольного перемещения частиц вблизи неподвижной границы: вертикальные в начальном состоянии риски ( $X = const$ ) перестают быть прямыми в процессе осадки полосы. Поэтому экспериментальные закономерности невозможно корректно описать с помощью модели «идеальной жидкости» (26), (27) и (3), в которой пренебрегают касательными напряжениями. Для рассматриваемого случая воспользуемся граничными условиями:

$$\begin{aligned} y = 0; v = 0; \\ y = b_0; v = 0; \\ x = 0; u = 0, \end{aligned} \quad (48)$$

а на свободной границе справедливо (28).

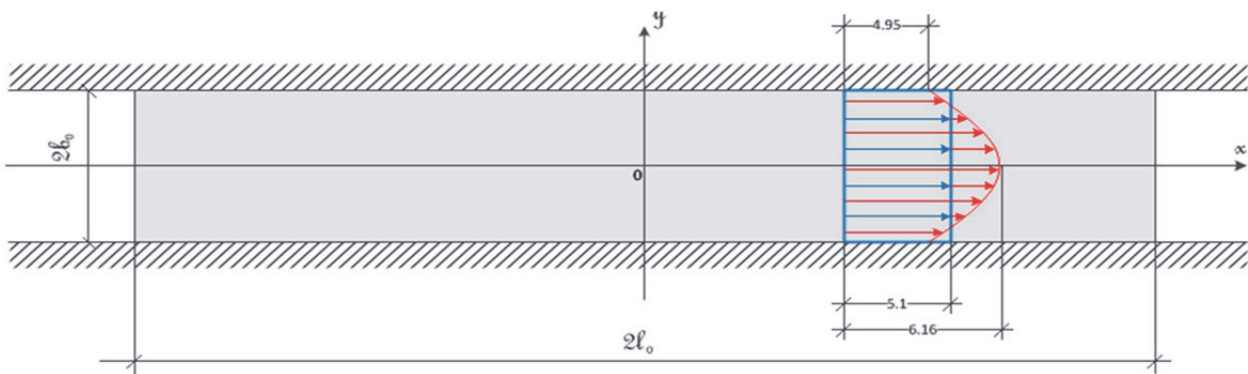
Решение системы уравнений краевой задачи имеет следующий вид:

кинематические параметры:

$$v \equiv 0; u = -\frac{1}{h} \frac{dh}{dt} x, \quad (49)$$

контактное давление:

$$p = -\tau_s \left[ \frac{2}{h} \left( x - \frac{h_0 l_0}{h} \right) - \sqrt{3} \right]. \quad (50)$$



**Рисунок 5.** Распределение перемещений по ширине срединной плоскости образца: прямолинейный фронт – модель «идеальной жидкости»; криволинейный фронт – данные эксперимента

**Заключение.** Течение образцов происходит ожидаемо – по прямым линиям тока, параллельным длинной стороне прямоугольника. Продольные перемещения вблизи неподвижных стенок заметно отстают от перемещений вдали от границы, а максимальные перемещения наблюдаются на оси симметрии образца. Этот факт говорит о наличии ненулевых касательных напряжений и скоростей угловых деформаций в рассматриваемых течениях тонкого пластического слоя. При сравнении результатов экспериментов с точным решением краевой задачи в рамках математической модели «идеальной жидкости» выявлено, что они находятся в противоречии. Корректное описание течения удастся выполнить только в рамках общей математической модели «вязкой жидкости», при условии осреднения по толщине рассматриваемого пластического слоя.



### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Георгиевский, Д.В.* Избранные задачи механики сплошной среды/ Д.В. Георгиевский. – М.: ЛЕНАНД, 2018. – 560 с.
2. *Ильюшин, А.А.* Труды (1946-1966). Т. 2. Пластичность/ Составители Е.А. Ильюшина, М.Р. Короткина. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 480 с.
3. *Кийко, И.А.* О форме пластического слоя, сжимаемого параллельными плоскостями/ И.А. Кийко// Прикладная математика и механика. – 2011. – Т. 75. – Вып. 1. – С. 15-26.
4. *Кадымов, В.А.* Контактная задача о несвободном растекании пластического слоя на плоскости: эксперимент и теория/ В.А. Кадымов, Е.Н. Сосенушкин, Н.А. Белов // Сб. науч. трудов Упругость и неупругость. – М.: МГУ, 2016. – С.180–185.
5. *Белов, Н.А.* О краевой задаче течения пластического слоя между сближающимися жесткими плитами/ Н.А. Белов, В.А. Кадымов// Изв. РАН. МТТ. – 2011. – №1. – С. 46–58.
6. *Сосенушкин, Е.Н.* Механика выдавливания алюминиевого сплава при штамповке поковки с продольными рёбрами/ Е.Н. Сосенушкин, В.А. Кадымов, Е.А. Яновская, Т.В. Гуреева //Цветные металлы. – 2019. – № 3. – С.69–75.
7. *Кадымов, В.А.* Некоторые точные решения эволюционного уравнения растекания пластического слоя на плоскости/ В.А. Кадымов, Е.Н. Сосенушкин, Е.А. Яновская // Вестник Московского ун-та. Сер.1. Математика, механика. – 2016. – №3. – С. 61–65.
8. ГОСТ 3778-98 Свинец. Технические условия. Минск: ИПК Издательство стандартов, 2003. – 8 с.

### SIMULATION AND COMPARISON OF THE RESULTS OF THE EXACT ANALYTICAL SOLUTION OF THE BOUNDARY PROBLEM OF A FLOW IN A THIN LAYER WITH EXPERIMENTAL DATA

© 2023 E. A. Yanovskaya

Moscow State Technological University "STANKIN", Moscow, Russia

Many technological processes of metal forming include deformation of an elongated workpiece by approaching tools, the contact surfaces of which have shallow grooved cavities. A common special case are stamps or part of their contact surfaces, which are planes: sites for draft and some types of harvesting streams. The article is devoted to mathematical modeling of the flow of a thin metal layer over rough surfaces. The article presents the results of an analytical study of the boundary value problem of the viscoplastic flow of a thin layer of metal located between thin rough plates moving towards each other. Exact solutions based on the classical formulation in the framework of an "ideal fluid" and "viscoplastic fluid" are given. A real experiment is described for assessing the effect of shear stresses averaged over the layer thickness on the kinematics of the flow of a plastic layer. In order to assess the effect of shear stresses averaged over the layer thickness on the flow kinematics, and, in particular, near fixed boundaries, experiments were carried out and the results on settlement between converging rigid plates of a thin plastic sample bounded by fixed walls and initially having the shape of a rectangle in plan are analyzed. The fixed walls of the tool are located along the long sides of the rectangle. Experimental regularities have been established. Spreading of samples occurs as expected, i.e., along straight streamlines parallel to the long side of the rectangle, or along the rays of a circular sector. It was found that the longitudinal displacements near the immovable walls noticeably lag behind the displacements far from the boundary, and the maximum displacements are observed on the line of symmetry of the sample with respect to the immovable walls. This fact indicates the presence of nonzero shear stresses and (velocities) of deformations in the considered flows of a thin plastic layer. Comparison of the obtained experimental and analytical simulation results allows us to evaluate the correctness of the chosen mathematical model, which can be used to describe the flows.

*Keywords:* thin layer, constrained flow, "ideal fluid" model, experimental results.

DOI: 10.37313/1990-5378-2023-25-3-130-139

EDN: LLYQKW

## REFERENCES

1. *Georgievskij, D.V.* Izbrannye zadachi mekhaniki sploshnoj sredy/ D.V. Georgievskij. – M.: LENAND, 2018. – 560 s.
2. *Il'yushin, A.A.* Trudy (1946-1966). T. 2. Plastichnost'/ Sostaviteli E.A. Il'yushina, M.R. Korotkina. – M.: FIZMATLIT, 2004. – 480 s.
3. *Kijko, I.A.* O forme plasticheskogo sloya, szhimaemogo parallel'nymi ploskostyami/ I.A. Kijko// Prikladnaya matematika i mekhanika. – 2011. – T. 75. – Vyp. 1. – S. 15-26.
4. *Kadymov, V.A.* Kontaktnaya zadacha o nesvobodnom rastekanii plasticheskogo sloya na ploskosti: eksperiment i teoriya/ V.A. Kadymov, E.N. Sosenushkin, N.A. Belov // Sb. nauch. trudov Uprugost' i neuprugost'. – M.: MGU, 2016. – S.180–185.
5. *Belov, N.A.* O kraevoj zadache techeniya plasticheskogo sloya mezhdub sblizhayushchimisya zhestkimi plitami/ N.A. Belov, V.A. Kadymov// Izv. RAN. MTT. – 2011. – №1. – S. 46–58.
6. *Sosenushkin, E.N.* Mekhanika vydavlivaniya alyuminievogo splava pri shtampovke pokovki s prodol'nymi ryobrami/ E.N. Sosenushkin, V.A. Kadymov, E.A. Yanovskaya, T.V. Gureeva // Cvetnye metally. – 2019. – № 3. – S.69–75.
7. *Kadymov, V.A.* Nekotorye tochnye resheniya evolyucionnogo uravneniya rastekaniya plasticheskogo sloya na ploskosti/ V.A. Kadymov, E.N. Sosenushkin, E.A. Yanovskaya// Vestnik Moskovskogo un-ta. Ser.1. Matematika, mekhanika. – 2016. – №3. – S. 61–65.
8. GOST 3778-98 Svinec. Tekhnicheskie usloviya. Minsk: IPK Izdatel'stvo standartov, 2003. – 8 s.