УДК 681.5

К ОПТИМИЗАЦИИ БАЗИСА КОНФИГУРАЦИОННОГО ПРОСТРАНСТВА ИДЕНТИФИЦИРОВАННОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ ДИНАМИКИ КРУПНОГАБАРИТНОЙ КОСМИЧЕСКОЙ КОНСТРУКЦИИ

© 2019 А.В. Данеев[1,2], В.А. Русанов[1,3], М.В. Русанов[1], В.Н. Сизых[1]

[1] Иркутский государственный университет путей сообщения
[2] Восточно-Сибирский филиал Российского государственного университета правосудия, г. Иркутск
[3] Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова Сибирского отделения Российской академии наук, г. Иркутск

Статья поступила в редакцию 07.02.2019

Предложен аналитически обоснованный численный метод оптимизации апостериорного базиса в конфигурационном пространстве идентифицированной нелинейной дифференциальной модели, заданной в форме уравнений Лагранжа 2-го рода, демпфированных колебаний крупногабаритной космической конструкции. Результаты статьи имеют приложения в прецизионном математическом моделировании (по данным натурных испытаний) уравнений управляемой динамики нелинейных колебаний, генерируя теоретико-прикладные постановки для дифференциальной реализации сложных управляемых гиперболических систем.
Ключевые слова: нелинейная дифференциальная реализация, теория Морса, юстировка идентифицированной модели.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 19-01-00301).

ВВЕДЕНИЕ

Прецизионное моделирование динамических моделей упругих элементов (штанги, панели, зонтичные антенны и т.п.) крупногабаритных космических конструкций (ККК), собираемых на орбите, относится к числу наиболее важных и трудных проблем современной космодинамики, что обусловлено жесткими требованиями к точности ориентации и стабилизации космических аппаратов [1, 2]. Дифференциальные модели таких конструкций в целом определяются их инерционными, жесткостными и диссипативными характеристиками, в связи с чем большую роль играют экспериментальные методы орбитального анализа как линейных [3–5], так и нелинейных [6–8] моделей динамики ККК. При этом современные методы апостериорного математического моделирования позволяют обоснованно выбрать *оптимальную структуру* математической модели с целью формирования адаптивного контура ККК-стабилизации [1]. На языке качественной теории дифференциальной реализации термин «оптимальная структура» предполагает минимальную динамическую размерность (МДР) модели [7, 8] и ее прецизионную калибровку (относительно некоторой «эталонной» модели [9]) в классе подобных МДР-систем вида «объект – регулятор – наблюдатель», индуцированных матричными группами преобразований [10], над идентифицированной ККК-МДР-моделью.

ТЕРМИНОЛОГИЯ И ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧ ПРЕЦИЗИОННОЙ ЮСТИРОВКИ ККК-МДР-МОДЕЛИ

В этом разделе, обходя по возможности трясину математических обобщений, приведем сведения из пространств модулей систем дифференциальной реализации, которые являются по существу лишь кратким списком необходимых обозначений, понятий и основных предварительных фактов. После чего сформулируем ряд задач по определению/вычислению «предпочтительной» системы (в рамках прецизионной калибровки МДР-модели) динамической реализации на семействе подобных моделей «объект – регулятор – наблюдатель», индуцированных матричными группами преобразований. При этом теоретический акцент будет ставиться на соответствие формальных МДР-моделей практической реальности [4, 5]; мотивирующие детали см. также во введении работы [9].

Данеев Алексей Васильевич, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры ИрГУПС и ВСФ РГУП. E-mail: daneev@mail.ru
Русанов Вячеслав Анатольевич, доктор физико-математических наук, профессор ИрГУПС, с.н.с. ИДСТУ СО РАН. E-mail: v.rusanov@mail.ru
Русанов Марк Вячеславович, аспирант ИрГУПС. E-mail: rusanovmark@mail.ru
Сизых Виктор Николаевич, доктор технических наук, доцент, профессор кафедры ИрГУПС. E-mail: sizykh_vn@mail.ru

Пусть, как обычно, $M_{n\times m}(\mathbb{R})$ – множество всех $n\times m$-матриц над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$ (соответственно $M_{n\times m}(\mathbb{C})$ – пространство матриц над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$), $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ – полная линейная группа степени n над $\mathbb{R}$ и $\mathrm{SO}_n \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ – специальная ортогональная группа; отметим, что группа $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ является неограниченным несвязным открытым n^2-многообразием, соответственно SO_n – связное компактное $n(n-1)/2$-многообразие (следствие 0.2.4 [10]); везде ниже верхний индекс «$^{\mathrm{T}}$» означает операцию матричного транспонирования.

Рассмотрим на временной полуоси $[0,\infty)\subset\mathbb{R}$ уравнения (см. систему (2) [2]) углового движения ККК в виде нелинейной векторно-матричной дифференциальной МДР-системы второго порядка:

$$d^2x(t)/dt^2 + Ddx(t)/dt + Ax(t) = B_1u(t) + B_2\hat{u}(dx(t)/dt, x(t)), \qquad (1)$$
$$y(t) = C_1x(t) + C_2dx(t)/dt$$

с состояниями $x(t)$ в конфигурационном пространстве $\mathbb{R}^n$, программным управлением $u(t)\in\mathbb{R}^m$, вектор-функцией связей $\hat{u}(dx(t)/dt, x(t))\in\mathbb{R}^q$ (возможно сформированной по схеме «feedback»), выходами $y(t)\in\mathbb{R}^p$ и матрицами соответствующих размерностей:

$$D, A\in M_{n\times n}(\mathbb{R}),\ B := (B_1, B_2)\in M_{n\times m}(\mathbb{R})\times M_{n\times q}(\mathbb{R}),$$
$$C := (C_1, C_2)\in M_{p\times n}(\mathbb{R})\times M_{p\times n}(\mathbb{R});$$

далее примем $B\in M_{n\times(m+q)}(\mathbb{R}), C\in M_{p\times 2n}(\mathbb{R}),$ при этом полагаем, что $\operatorname{rank} C = p.$

Считаем, что система (1) получена *a posteriori* в результате минимальной дифференциальной реализации [3–7][1] некоторого фиксированного семейства управляемых процессов движения ККК. Это определяет матричную «модель-представление» МДР-реализации, т.е. упорядоченную четверку матриц (D, A, B, C) в виде фиксированной точки декартова пространства

$$\mathfrak{R}(\mathbb{R}) := M_{n\times n}(\mathbb{R})\times M_{n\times n}(\mathbb{R})\times M_{n\times(m+q)}(\mathbb{R})\times M_{p\times 2n}(\mathbb{R}).$$

Переход к новому «*апостериорному*» базису в конфигурационном пространстве $\mathbb{R}^n$ на основе трансформирующей матрицы $S\subset\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ изменяет координаты модели (1) по формуле $z := Sx$ и преобразует уравнения (1) в эквивалентную им дифференциальную систему

$$d^2z(t)/dt^2 + SDS^{-1}dz(t)/dt + SAS^{-1}z(t) = SB_1u(t) + SB_2\hat{u}(S^{-1}dz(t)/dt, S^{-1}z(t)), \qquad (2)$$
$$y(t) = C_1S^{-1}z(t) + C_2S^{-1}dz(t)/dt.$$

Уравнения (2) определяют [10] вещественно-аналитическое действие группы Ли $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ на множестве матричного представления дифференциальных систем (2) согласно правилу

$$\rho_{\mathrm{GL}} : \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\times\mathfrak{R}(\mathbb{R})\to\mathfrak{R}(\mathbb{R}),$$
$$(S,(D,A,B,C))\mapsto\rho_{\mathrm{GL}}(S,(D,A,B,C)) =$$
$$= (SDS^{-1}, SAS^{-1}, SB, (C_1S^{-1}, C_2S^{-1})),$$

называемое *действием подобия* на $n(2n+m+q+2p)$-многообразии $\mathfrak{R}(\mathbb{R})$.

Действие подобия ρ_{GL} задает на $\mathfrak{R}(\mathbb{R})$ отношение эквивалентности $\sim$, а именно:

$$(D', A', B', C')\sim(D, A, B, C)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\exists S\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) : (D', A', B'C') = (SDS^{-1}, SAS^{-1}, SB, (C_1S^{-1}, C_2S^{-1})).$$

В этом положении классы эквивалентности

$$[D, A, B, C]_{\mathrm{GL}} := \{(SDS^{-1}, SAS^{-1}, SB, (C_1S^{-1}, C_2S^{-1})) : S\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\}$$

отношения $\sim$ называются [10] *орбитами* действия ρ_{GL}. Фактор-пространство по отношению $\sim$ называется *пространством орбит* действия ρ_{GL} и обозначается через

[1] В [5] проиллюстрирована эффективность данных алгоритмов на примере идентификации динамической модели защепленной штанги-балки ККК, представленной в форме уравнений Лагранжа 2-го рода; важно отметить, что смена, как геометрической схемы размещения датчиков первичной информации, так и численного алгоритма идентификации приводит к тому, что система уравнений (1) трансформируется в некоторую дифференциальную модель (2).

$$\mathfrak{R}^{\mathrm{GL}}(\mathbb{R}) := \mathfrak{R}(\mathbb{R}) / \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}).$$

В пространстве орбит $\mathfrak{R}^{\mathrm{GL}}(\mathbb{R})$ имеется естественная топология [10], называемая фактор-топологией и являющаяся самой тонкой из всех возможных топологий на $\mathfrak{R}^{\mathrm{GL}}(\mathbb{R})$, для которых непрерывно каноническое естественное отображение

$$\pi_{\mathrm{GL}} : \mathfrak{R}(\mathbb{R}) \to \mathfrak{R}^{\mathrm{GL}}(\mathbb{R}),$$
$$(D,A,B,C) \mapsto \pi_{\mathrm{GL}}(D,A,B,C) = [D,A,B,C]_{\mathrm{GL}}.$$

Пространство орбит $\mathfrak{R}^{\mathrm{GL}}(\mathbb{R})$, как правило, называют [9] *пространством модулей* многообразия динамических систем минимальной (по индексу n) дифференциальной реализации; по существу это означает, что его точки параметризуют орбиты действия ρ_{GL}.

Перечисленные конструкции переносятся на действие подобия ρ_{SO} по специальной ортогональной группе SO_n; можно показать [11, с. 120], что SO_n – связная компонента ортогональной группы O_n, при этом справедливо равенство $\mathrm{SO}_n = \cup\{U^k : k = 1,2,\ldots\}$, где U – любая окрестность единицы в SO_n (см. п. (в) предложения 1 [11, с. 118]), в этом положении $\mathfrak{R}^{\mathrm{SO}}(\mathbb{R})$ хаусдорфово, отображение π_{SO} замкнутое (теорема I.3.1 [10]). Поэтому далее индекс «GL» (соответственно «SO») подтверждает действие группы $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ (соответственно SO_n); замена указанных индексов на нейтральный индекс «#» означает действие либо группы $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, либо SO_n.

Рассмотрим матричнозначное отображение η_{GL} и функционалы f_{GL}, g_{SO} вида

$$\eta_{\mathrm{GL}} : \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R}),$$
$$(S, A', A'') \mapsto \eta_{\mathrm{GL}}(S, A', A'') := SA'S^{-1} - A'',$$
$$f_{\mathrm{GL}} : M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R},$$
$$(A', A'') \mapsto f_{\mathrm{GL}}(A', A'') := \inf(\|S^{-1}\| \cdot \|\eta_{\mathrm{GL}}(A', A'')S\|),$$
$$g_{\mathrm{SO}} : M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R},$$
$$(A', A'') \mapsto g_{\mathrm{SO}}(A', A'') := \sup(\|S^{-1}\| \cdot \|\eta_{\mathrm{SO}}(S, A', A'')S\|),$$

где $\|\cdot\|$ – евклидова норма (l_2-норма) в $M_n(\mathbb{R})$; ниже используем факт $\|S\|^2 = \mathrm{tr}\,(S^{\mathrm{T}} S)$. Заметим, что $\eta_{\mathrm{SO}}(\cdot,\cdot, A'') : \mathrm{SO}_n \times M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ – замкнутое отображение (теорема I.1.2 [10]).

Будем называть $(A, \hat{A})$-параметризованную матрично-значную функцию $\eta_{\mathrm{GL}}(\cdot, A, \hat{A}) : \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$, где $A \in M_n(\mathbb{R})$ и $\hat{A} \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) \setminus \{(SAS^{-1}) : S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\}$ заданы, GL-*юстировкой матриц* A, $\hat{A}$ под действием подобия ρ_{GL}, при этом значение функционала $f_{\mathrm{GL}}(A, \hat{A})$ назовем *квазиточностью* GL-юстировки матриц A, $\hat{A}$, соответственно $g_{\mathrm{SO}}(A, \hat{A})$ – *рассогласованием* SO-юстировки; в силу пункта ii) теоремы 1 SO-юстировка используется только при действии группы SO_n. Термин «квазиточность» инициирован следующим положением:

$$0 \le \inf\{\|\eta_{\mathrm{GL}}(S, A, \hat{A})\| : S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\} \le f_{\mathrm{GL}}(A, \hat{A}),$$
$$\hat{A} \in \{SAS^{-1} : S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\} \Rightarrow \inf\{\|\eta_{\mathrm{GL}}(S, A, \hat{A})\| : S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\} = f_{\mathrm{GL}}(A, \hat{A}) = 0.$$

Постановки задач: для матрицы A реализации (1) и «эталонной» $n \times n$-матрицы позиционных сил $\hat{A} \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) \setminus \{(SAS^{-1}) : S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\}$ для (2) найти решения следующих задач (a) – (d):

(a) в терминах жордановой A-структуры установить достаточные условия разрешимости задачи оптимизации GL-юстировки вида: существует матрица $S^* \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, для которой

$$\|\eta_{\mathrm{GL}}(S^*, A, \hat{A})\| = \inf\{\|\eta_{\mathrm{GL}}(S, A, \hat{A})\| : S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\};$$

(b) показать разрешимость задачи оптимальной SO-юстировки вида: для любой «эталонной» матрицы $\hat{A} \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) \setminus \{(SAS^{-1}) : S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\}$, найдется такая матрица $S^{**} \in \mathrm{SO}_n$, что

$$\left\|\eta_{\mathrm{SO}}(S^{**}, A, \hat{A})\right\| = \inf\{\left\|\eta_{\mathrm{SO}}(S, A, \hat{A})\right\| : S \in \mathrm{SO}_n\};$$

(c) построить характеристическое уравнение для матрицы S^{**} задачи (b);

(d) определить нижнюю оценку квазиточности GL/SO-юстировки матриц $A,\ \hat{A}$ через построение вычислимого неотрицательного функционала $\sigma_{\mathrm{GL}} : \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \times M_{n\times n}(\mathbb{R}) \times M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ и вычислимой функции $H : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \times M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ таких, что для любой означенной матричной пары $(A, \hat{A})$ функционал $\sigma_{\mathrm{GL}}(\cdot, A, \hat{A})$ ненулевой и удовлетворяет неравенствам

$$0 \le \sigma_{\mathrm{GL}}(H(A, \hat{A}), A, \hat{A}) \le f_{\mathrm{GL}}(A, \hat{A}). \tag{3}$$

Замечание 1. Задачи (a)–(d) (и им подобные [4]) мотивируется определением через действие подобия ρ_{GL} «оптимальной» дифференциальной реализации (2) посредством калибровки идентифицированной ККК-МДР-модели (1) относительно некоторой «эталонной» модели; в частности, при $\hat{A} = 0$ задачам (a), (b) отвечает выбор реализации (2) с минимальной l_2-нормой для SAS^{-1} [12]. С другой стороны, постановка (d) отвечает вычислению начального приближения в схеме Ньютона–Канторовича [13, с. 669] при решении характеристического уравнения задачи (c), т.е. когда SAS^{-1} «SO- подгоняется» к эталонной матрице $\hat{A}$ позиционных сил, не входящей в орбиту $[D, A, B, C]_{\mathrm{SO}}$. Заметим, что в этих вопросах можно применять другие альтернативные подходы [14, с. 351].

МОДЕЛИРОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО БАЗИСА КОНФИГУРАЦИОННОГО ПРОСТРАНСТВА ККК-МДР-МОДЕЛИ

При GL/SO-юстировке матрицы A системы реализации (1) знание геометрии пространства модулей $\mathfrak{R}^{\#}(\mathbb{R})$ тесно связано с геометрией дифференциальных уравнений второго порядка [15, с. 57]. Поэтому ниже уточним некоторые орбитальные конструкции действия подобия $\rho_{\#}$. Результаты этого раздела не претерпят качественных изменений при смене l_2-нормы в $(M_{n\times n}(\mathbb{R}), \|\cdot\|)$ на любую матричную норму; полезные сопутствующие понятия см. в [11], а также § 30 из [15].

Везде далее $\mathrm{Pr}_A : \mathfrak{R}(\mathbb{R}) \to M_{n\times n}(\mathbb{R})$ – оператор проектирования на второе координатное подпространство пространства $\mathfrak{R}(\mathbb{R})$. Очевидно, что для всякой матрицы $\hat{A} \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ будет

$$\mathrm{Pr}_A \circ \pi^{-1}_{\mathrm{GL}}([D, A, B, C]_{\mathrm{GL}}) = \eta_{\mathrm{GL}}(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), A, \hat{A}) + \hat{A}.$$

В данном контексте $\eta_{\mathrm{GL}}(\cdot,\cdot, \hat{A}) + \hat{A} \colon \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \times M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to M_{n\times n}(\mathbb{R})$ – действие группы $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ на пространстве $M_{n\times n}(\mathbb{R})$, при этом $\mathrm{Pr}_A \circ \pi^{-1}_{\mathrm{GL}}([D, A, B, C]_{\mathrm{GL}})$ – гладкое (без края) подмногообразие в $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ размерности $n^2 - k$, где k – размерность стабилизатора матрицы A или, что эквивалентно, k – размерность ядра кольцевого коммутатора $S \mapsto (SA - AS) : \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \to M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

Согласно следствия теоремы 1.7 [11, с. 12] имеем (аналог теоремы Лагранжа):

$$\mathrm{Card}\,\mathrm{Pr}_A \circ \pi^{-1}_{\mathrm{GL}}([D, A, B, C]_{\mathrm{GL}}) = (\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) : \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})_A),$$

где $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})_A$ – централизатор матрицы A, при этом $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})_A$ – замкнутая подгруппа без кручения в объемлющей группе $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ (теорема 6.3 [11, с. 117]).

Теорема 1. i) *Для дефектной матрицы* $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ *многообразие* $\mathrm{Pr}_A \circ \pi^{-1}_{\mathrm{GL}}([D, A, B, C]_{\mathrm{GL}})$ *не замкнуто в пространстве* $(M_{n\times n}(\mathbb{R}), \|\cdot\|)$;

ii) *для не скалярной* $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ *многообразие* $\mathrm{Pr}_A \circ \pi^{-1}_{\mathrm{GL}}([D, A, B, C]_{\mathrm{GL}})$ *не ограничено.*

Доказательство. i) Доказательство проведем для случая вещественного спектра матрицы A. Пусть $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n\} \subset \mathbb{R}$ – собственные значения A, и пусть A в жордановом базисе имеет хотя бы одну клетку (жорданов блок) порядка ≥ 2 для некоторого собственного значения. Условимся, что

$\hat{A} := \operatorname{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n\}$, т.е. матрица $\hat{A}$ недефектная (терминология [16]). Согласно теореме 3.4.8 [16] будет $\hat{A} \notin \mathrm{Pr}_A \circ \pi_{\mathrm{GL}}^{-1}([D, A, B, C]_{\mathrm{GL}})$. Покажем, что в такой постановке в любой «l_2-близости» от $\hat{A}$ найдутся матрицы из многообразия $\mathrm{Pr}_A \circ \pi_{\mathrm{GL}}^{-1}([D, A, B, C]_{\mathrm{GL}})$.

В силу теоремы Шура 2.3.1 [16] существуют матрицы, унитарная $U \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ и верхняя треугольная $\Delta \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, что $A = U\Delta U^T$. Пусть $D_h := \operatorname{diag}\{1, h, h^2, \ldots, h^{n-1}\} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, тогда

$$D_h \Delta D_h^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & h^{-1}d_{12} & h^{-2}d_{13} & \ldots & h^{-n+1}d_{1n} \\ 0 & \lambda_2 & h^{-1}d_{23} & \ldots & h^{-n+2}d_{2n} \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \ldots & h^{-n+3}d_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & h^{-1}d_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Таким образом, сумма квадратов всех наддиагональных элементов матрицы $D_h \Delta D_h^{-1}$ при достаточно большом h не будет превосходить заведомо малую величину $\varepsilon > 0$, при этом, очевидно, $D_h \Delta D_h^{-1} \in \mathrm{Pr}_A \circ \pi_{\mathrm{GL}}^{-1}([D, A, B, C]_{\mathrm{GL}})$. Иными словами, при достаточно большом h будет выполняться неравенство $\| D_h \Delta D_h^{-1} - \hat{A} \| \le \varepsilon^{1/2}$, что доказывает первую часть теоремы.

ii) Рассмотрим доказательство в случае, когда не скалярная матрица $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ является диагональной (вариант, когда A не обладает диагональной структурой, устанавливается аналогично). В этом положении найдется $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, что A и S не коммутируют и, следовательно, матрица SAS^{-1} не будет диагональной (в противном случае S коммутирует с A), поскольку центр группы $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ образуют скалярные матрицы, то именно они коммутируют с любыми матрицами из $M_{n\times m}(\mathbb{R})$, и никакие другие матрицы таким свойством не обладают. Тогда $D_h SAS^{-1} D_h^{-1} \in \mathrm{Pr}_A \circ \pi_{\mathrm{GL}}^{-1}([D, A, B, C]_{\mathrm{GL}})$ $\forall h \in (0, \infty)$ и $\| D_h SAS^{-1} D_h^{-1} \| \to \infty$, как при $h \to \infty$ (нижняя треугольная структура $D_h SAS^{-1} D_h^{-1}$), $D_h SAS^{-1} D_h^{-1}$), так и $h \to 0$ (верхняя треугольная структура), либо в обоих случаях (не треугольная структура). ■

Очевидно, что, если многообразие $\mathrm{Pr}_A \circ \pi_{\mathrm{GL}}^{-1}([D, A, B, C]_{\mathrm{GL}})$ не замкнуто, то для любой матрицы $\hat{A} \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) \setminus \mathrm{Pr}_A \circ \pi_{\mathrm{GL}}^{-1}([D, A, B, C]_{\mathrm{GL}})$, являющейся предельной точкой $\mathrm{Pr}_A \circ \pi_{\mathrm{GL}}^{-1}([D, A, B, C]_{\mathrm{GL}})$, сколь угодно малое неустранимое «шевеление»[2] ее элементов может привести к включению $\hat{A} \in \mathrm{Pr}_A \circ \pi_{\mathrm{GL}}^{-1}([D, A, B, C]_{\mathrm{GL}})$. Несмотря на этот мало оптимистичный вывод (для реализации (1) с дефектной A), заметим, что для практических задач [4, 5], например, конечномерных аппроксимаций нормально-гиперболических систем [3] (орбита $[D, A, B, C]_{\mathrm{GL}}$ такой дифференциальной модели содержит четверку (D', A', B', C'), у которой D', A' – симметричные матрицы), по существу достаточно следующего утверждения.

Теорема 2. i) *Многообразие* $\mathrm{Pr}_A \circ \pi_{\mathrm{GL}}^{-1}([D, A, B, C]_{\mathrm{GL}})$ *замкнуто в* $(M_{n\times n}(\mathbb{R}), \|\cdot\|)$, *коль скоро матрица* $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ *диагонализируема в пространстве* $M_{n\times n}(\mathbb{C})$;

ii) *для каждой орбиты* $[D, A, B, C]_{\mathrm{SO}} \in \mathfrak{R}^{\mathrm{SO}}(\mathbb{R})$ *проекция* $\mathrm{Pr}_A \circ \pi_{\mathrm{SO}}^{-1}([D, A, B, C]_{\mathrm{SO}})$ *– компакт, являющийся образом канторова множества при некотором непрерывном отображении.*

Доказательство. Многообразие $\mathrm{Pr}_A \circ \pi_{\mathrm{SO}}^{-1}([D, A, B, C]_{\mathrm{SO}})$ компактно в силу пункта (3) теоремы I.3.1 [10], что подтверждает (совместно с теоремой 4.11 [17, с. 77]) часть ii). Перейдем к доказательству утверждения i).

[2] В [15, с.262] дан анализ, к какому простейшему виду можно привести семейство матриц из $M_{n\times m}(\mathbb{C})$, гладко зависящих от параметров, при помощи гладко зависящих от параметров замен координат (см. ниже теорему 3).

Пусть $\mathrm{C}([0,1],\mathbb{R})$ – пространство всех непрерывных на $[0,1]\subset\mathbb{R}$ вещественнозначных функций с sup-нормой, матрица A имеет k различных собственных значений и пусть

$$\Delta_A(\lambda):=\lambda^n+\hat{a}_{n-1}\lambda^{n-1}+\hat{a}_{n-2}\lambda^{n-2}+\ldots+\hat{a}_1\lambda+\hat{a}_0,$$
$$\Delta_{A,\min}(\lambda):=\lambda^k+a_{k-1}\lambda^{k-1}+a_{k-2}\lambda^{k-2}+\ldots+a_1\lambda+a_0$$

– соответственно характеристический и минимальный многочлены матрицы A.

В такой постановке для орбиты $[D,A,B,C]_{\mathrm{GL}}\in\mathfrak{R}^{\mathrm{GL}}(\mathbb{R})$ и некоторой $E\in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ критерием $E\in \mathrm{Pr}_A\circ\pi^{-1}_{\mathrm{GL}}([D,A,B,C]_{\mathrm{GL}})$ согласно теореме 3.4.8 [16] и следствию 3.3.8 [16] является одновременное выполнение следующих двух равенств (функционального и алгебраического)[3]:

$$\det(tI-E)=\Delta_A(t)\in\mathrm{C}([0,1],\mathbb{R}),\quad \Delta_{A,\min}(E)=0\in M_{n\times n}(\mathbb{R}),\tag{4}$$

где $I\in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ – единичная матрица, $\det(tI-E),\ \Delta_A(t)$ – полиномы (параметризованные соответственно элементами матриц E и A) переменной $t\in[0,1]$, $\Delta_{A,\min}(E)$ – многочлен матрицы E с коэффициентами, тождественными коэффициентам от минимального многочлена $\Delta_{A,\min}(\lambda)$.

Далее рассмотрим два непрерывных (согласно формулы (1.2.11) [16]) отображения

$$\kappa: M_{n\times n}(\mathbb{R})\to\mathrm{C}([0,1],\mathbb{R}),\ \ \hat{E}\mapsto\kappa(\hat{E}):=\det(tI-\hat{E}),$$
$$\varphi: M_{n\times n}(\mathbb{R})\to M_{n\times n}(\mathbb{R}),\ \ \hat{E}\mapsto\varphi(\hat{E}):=\Delta_{A,\min}(\hat{E}).$$

Тогда в силу условий (4) будет $\mathrm{Pr}_A\circ\pi^{-1}_{\mathrm{GL}}([D,A,B,C]_{\mathrm{GL}})=\kappa^{-1}(\Delta_A(t))\cap\varphi^{-1}(0)$, что, с учетом пунктов 1), 2) теоремы 2 [13, с. 22], завершает доказательство. ■

Замечание 2. Несмотря на то, что приведение матрицы к жордановой нормальной форме неустойчивая операция [15, с. 262] (данная форма и приводящее к ней преобразование разрывно зависят от элементов исходной матрицы), ход доказательства теоремы 2 (в части анализа топологической структуры на $\kappa^{-1}(\Delta_A(t))$) позволяет заключить, что многообразие[4]

$$\{SA'S^{-1}: S\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), A'\in M_{n\times n}(\mathbb{R})\ \&\ \det(\lambda I-A')=\Delta_A(\lambda)\}$$

замкнуто. Это уточняет расположение в пространстве $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ проекции $\mathrm{Pr}_A\circ\pi^{-1}_{\mathrm{GL}}([D,A,B,C]_{\mathrm{GL}})$, когда матрица A дефектная (недиагонализируемая; см. пункт i) теоремы 1).

Теорема 2 приводит к важным выводам, касающихся разрешимости задачи оптимизации нормы юстировки матриц A, $\hat{A}$, которые ниже перечислены в следствии 1 (при этом матрицы S^*,S^{**},S^{***} можно строить в рамках теории Морса [17, с. 265]; см. следующий раздел).

Следствие 1. *При юстировке матриц* $A\in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, $\hat{A}\in M_{n\times n}(\mathbb{R})\setminus\mathrm{Pr}_A\circ\pi^{-1}_{\mathrm{GL}}([D,A,B,C]_{\mathrm{GL}})$ *существуют такие трансформирующие матрицы* $S^{**},S^{***}\in\mathrm{SO}_n$, *что выполнимы равенства*

$$\left\|\eta_{\mathrm{SO}}(S^{***},A,\hat{A})\right\|=\sup\{\left\|\eta_{\mathrm{SO}}(S,A,\hat{A})\right\|: S\in\mathrm{SO}_n\},$$
$$\left\|\eta_{\mathrm{SO}}(S^{**},A,\hat{A})\right\|=\inf\{\left\|\eta_{\mathrm{SO}}(S,A,\hat{A})\right\|: S\in\mathrm{SO}_n\}.$$

---

[3] Первое равенство обеспечивает (через отождествление характеристических полиномов) совпадение спектров матриц A и E. Второе равенство решает вопрос о диагонализуемости матрицы E, а именно, если спектры матриц A и E совпадают (первый критерий), то легко проверить, аннулирует ли многочлен $\Delta_{A,\min}(\lambda)$ матрицу E. Если да (второй критерий), то согласно следствия 3.3.8 [16] $\Delta_{A,\min}(\lambda)$ – минимальный многочлен диагонализуемой матрицы E, так как никакой многочлен меньшей степени не может иметь k различных собственных значений от E.

[4] Данное многообразие – объединение *всех* проекций $\mathrm{Pr}_A\circ\pi^{-1}_{\mathrm{GL}}([D',A',B',C']_{\mathrm{GL}})$, отвечающих A' с характеристическим полином как у исходной матрицы A (т.е. не обязательно, что A' подобна A). Согласно теореме 2 среди означенных проекций $\mathrm{Pr}_A\circ\pi^{-1}_{\mathrm{GL}}([D',A',B',C']_{\mathrm{GL}})$ замкнута лишь *одна*, – та, что отвечает A^*, для которой минимальный многочлен не имеет кратных корней, причём оставшиеся проекции лежат от нее в нулевой близости. Это не препятствует каждой матрице из этих проекций отстоять от $\mathrm{Pr}_A\circ\pi^{-1}_{\mathrm{GL}}([D^*,A^*,B^*,C^*]_{\mathrm{GL}})$ на ненулевом расстоянии.

Для недефектной матрицы A *найдется* $S^{*}\in \mathrm{GL}_{n}(\mathbb{R})$, *для которой будет*

$$\left\|\eta_{\mathrm{GL}}(S^{*},A,\hat{A})\right\|=\inf\{\left\|\eta_{\mathrm{GL}}(S,A,\hat{A})\right\|: S\in \mathrm{GL}_{n}(\mathbb{R})\}. \qquad (5)$$

Доказательство. Первые два равенства вполне прозрачны, подтвердим (5).

Пусть $\| A-\hat{A}\|$. Тогда множество GL-юстировки матриц A, $\hat{A}$

$$W:=\{A'\in M_{n\times n}(\mathbb{R}):\| A'-\hat{A}\|\le r\}\cap \mathrm{Pr}_{A}\circ\pi_{\mathrm{GL}}^{-1}([D,A,B,C]_{\mathrm{GL}})$$

компактное (поскольку многообразие $\mathrm{Pr}_{A}\circ\pi_{\mathrm{GL}}^{-1}([D,A,B,C]_{\mathrm{GL}})$ замкнутое), откуда приходим к

$$\exists\, S^{*}\in \mathrm{GL}_{n}(\mathbb{R}): S^{*}AS^{*-1}\in W\ \&\left\|\eta_{\mathrm{GL}}(S^{*},A,\hat{A})\right\|=\inf\{\left\|A'-\hat{A}\right\|: A'\in W\},$$

что подтверждает (5); т.е. $\left\|\eta_{\mathrm{GL}}(S^{*},A,\hat{A})\right\|$ – расстояние от $\hat{A}$ до компакта W в метрике Хаусдорфа, при этом существование матрицы S^{*} – следствие факта, что функция $A'\mapsto\| A'-\hat{A}\|: W\to\mathbb{R}$ достигает на компакте W нижней (впрочем, и верхней) грани. ■

Теорема 3. *Если порядок* n *конфигурационного пространства системы* (1) *нечетный, то многообразие* $\mathrm{Pr}_{A}\circ\pi_{\mathrm{GL}}^{-1}([D,A,B,C]_{\mathrm{GL}})$ *линейно связное*. ■

Доказательство вытекает из рассуждений, привлекающих линейную связность подгруппы матриц из $\mathrm{GL}_{n}(\mathbb{R})$ с положительным детерминантом [17, с. 44]. Данная подгруппа, как линейно связная компонента, образует открытое множество в $(M_{n\times n}(\mathbb{R}),\|\cdot\|)$. На геометрическом языке этот результат гласит: при нечетном порядке конфигурационного пространства для действия подобия нет структурных препятствий, чтобы перевести апостериорный базис системы (1) в базис системы (2) *непрерывным движением* (иными словами, *деформацией*, трансформирующей матрицы S в области орбиты $[D,A,B,C]_{\mathrm{GL}}$). Это при четном n делает проблематичным использование метода Ньютона–Канторовича в вычислении трансформирующей матрицы S^{*}, удовлетворяющей следствию 1, и методологически оправданным (например, в положении действия теоремы 9 [3]) использование линейно связной [17, с. 44] компактной группы SO_{n}. Отметим [17, с. 291], что фундаментальная группа пространства SO_{n} изоморфна аддитивной группе целых чисел при $n=2$, и группе вычетов по модулю 2 при $n>2$.

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ SO-ЮСТИРОВКИ. ОЦЕНКА КВАЗИТОЧНОСТИ GL-ЮСТИРОВКИ

Следствие 1 решает вопрос о существовании трансформирующей матрицы S^{**} глобального минимума нормы SO-юстировки матриц A, $\hat{A}$, при этом (как отмечено выше) задачу конструктивного построения S^{**} можно проводить с опорой на теорию Морса [17, с. 265]. Ниже покажем, как данная теория, связывая геометрическое строение компактного линейно связного многообразия SO_{n} со свойствами стационарных точек функционала

$$S\mapsto\left\|\eta_{\mathrm{SO}}(S,A,\hat{A})\right\|=\| SAS^{-1}-\hat{A}\|=\| SAS^{\mathrm{T}}-\hat{A}\|,\ S\in \mathrm{SO}_{n},$$

аналитически выражает эту связь в виде матричного алгебраического уравнения относительно матрицы $S^{**}\in \mathrm{SO}_{n}$, определяя необходимые условия для процесса SO-юстировки:

$$\left\|\eta_{\mathrm{SO}}(S^{**},A,\hat{A})\right\|=\inf\{\left\|\eta_{\mathrm{SO}}(S,A,\hat{A})\right\|: S\in \mathrm{SO}_{n}\}.$$

Введем в рассмотрение $(A,\hat{A})$-параметризованный функционал $\omega:\mathrm{SO}_{n}\to\mathbb{R}$ вида

$$\omega(S):=\mathrm{tr}\,((SAS^{\mathrm{T}}-\hat{A})^{\mathrm{T}}(SAS^{\mathrm{T}}-\hat{A})).$$

Ясно, что стационарные точки функционалов $\left\|\eta_{\mathrm{SO}}(\cdot,A,\hat{A})\right\|$ и $\omega(\cdot)$ совпадают, причем это те точки $S\in \mathrm{SO}_{n}$, для которых проекция от $\mathrm{grad}\,\omega(S)$ на касательное пространство $T_{S}\mathrm{SO}_{n}$ образует нулевой вектор. Согласно лемме 19.3 [17, с. 279] это условие имеет компактный вид

$$\mathrm{grad}\,\omega(S)-S\,\mathrm{grad}\,\omega(S)^{\mathrm{T}}S=0; \qquad (6)$$

данное уравнение назовем *характеристическим уравнением* SO-юстировки; таким образом, построение матричного уравнения для S^{**} свелось к вычислению вектора $\operatorname{grad}\omega(S)\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $S\in\mathrm{SO}_n$.

Вводя в пространстве $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ скалярное произведение $\langle H,E\rangle=\operatorname{tr}(H^{\mathrm{T}}E)=\operatorname{tr}(HE^{\mathrm{T}})$, легко установить, что $\operatorname{grad}\operatorname{tr}(X^{\mathrm{T}}X)=2X$. Далее, пусть $S\in\mathrm{SO}_n$ и $D(S)\in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ – матрица, для которой при всех $h\in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ имеет место $hAS^{\mathrm{T}}=D(S)h^{\mathrm{T}}$. Тогда для обговоренных условий

$$\|(S+h)A(S+h)^{\mathrm{T}}\|^2-\|SAS^{\mathrm{T}}\|^2=\operatorname{tr}(((S+h)A(S+h)^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}((S+h)A(S+h)^{\mathrm{T}}))-\|SAS^{\mathrm{T}}\|^2=$$
$$=2\operatorname{tr}((SAS^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}(SAh^{\mathrm{T}}))+2\operatorname{tr}((SAS^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}(hAS^{\mathrm{T}}))+2\operatorname{tr}((SAS^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}(hAh^{\mathrm{T}}))+$$
$$+2\operatorname{tr}((SAh^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}(hAS^{\mathrm{T}}))+2\operatorname{tr}((SAh^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}(hAh^{\mathrm{T}}))+\|SAh^{\mathrm{T}}\|^2+\|hAS^{\mathrm{T}}\|^2+\|hAh^{\mathrm{T}}\|^2.$$

Величина $2\left(\langle SA^{\mathrm{T}}A,h\rangle+\langle SA^{\mathrm{T}}S^{\mathrm{T}}D(S),h\rangle\right)$ представляет собой главную линейную (по h) часть последнего выражения, следовательно, сильная и слабая производные от SAS^{T} равны

$$2(SA^{\mathrm{T}}A+SA^{\mathrm{T}}S^{\mathrm{T}}D(S)),$$

откуда (с учетом дифференцирования сложной функции и $\operatorname{grad}\operatorname{tr}(X^{\mathrm{T}}X)=2X$) приходим к

$$\operatorname{grad}\omega(S)=4(SAS^{\mathrm{T}}-\hat{A})(SA^{\mathrm{T}}A+SA^{\mathrm{T}}S^{\mathrm{T}}D(S)).$$

Проведенные построения позволяют переписать уравнение (6) в развернутом виде

$$(SAS^{\mathrm{T}}-\hat{A})(SA^{\mathrm{T}}A+SA^{\mathrm{T}}S^{\mathrm{T}}D(S))-S(SA^{\mathrm{T}}A+SA^{\mathrm{T}}S^{\mathrm{T}}D(S))^{\mathrm{T}}(SAS^{\mathrm{T}}-\hat{A})^{\mathrm{T}}S=0;$$

данное уравнение можно решать методом Ньютона–Канторовича [13, с. 670].

Далее, для любых матриц $H,A,\hat{A}\in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ существует (и притом единственная) симметричная положительно-полуопределенная матрица $G(A,\hat{A})\in M_{nn\times nn}(\mathbb{R})$, такая, что

$$h^{\mathrm{T}}G(A,\hat{A})h=\|HA-\hat{A}H\|^2,$$

где $h:=\operatorname{col}(h_{11},\ldots,h_{nn})\in\mathbb{R}^{n\times n}$ и $[h_{ij}]=H\in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Явное выражение для матрицы $G(A,\hat{A})$ легко получить, используя конструкцию прямого произведения (см., например, [18, с. 228]), при этом высказанная связь продуцирует соотношения:

$$G(A,\hat{A})=F^{\mathrm{T}}F,$$
$$F=I\otimes A^{\mathrm{T}}-\hat{A}\otimes I.$$

В контексте нижеследующей теоремы отметим (переходя к построениям над полем C), что собственные значения $n^2\times n^2$-матрицы $F\in M_{nn\times nn}(\mathbb{C})$ (кронекеровская разность A^{T} и $\hat{A}$) совпадают с n^2 числами $\upsilon_i-\upsilon_i'$, где $\upsilon_1,\ldots,\upsilon_n$ – собственные значения матрицы $A\in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ и $\upsilon_1',\ldots,\upsilon_n'$ – собственные значения матрицы $\hat{A}\in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ (теорема 8.3.1 [18]). Ясно, что $\|F\|=(\operatorname{tr}G)^{1/2}$ и все n^2 собственных значений матрицы $G(A,\hat{A})$ лежат (пункт (b) теоремы 4.1.3 [16]) на полуоси $[0,\infty)\subset\mathbb{R}$.

Теорема 4. *При юстировке матриц* $A\in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, $\hat{A}\in M_{n\times n}(\mathbb{R})\setminus\operatorname{Pr}_A\circ\pi_{\mathrm{GL}}^{-1}([D,A,B,C]_{\mathrm{GL}})$ *справедливы оценки функционалов квазиточности и рассогласования*

$$f_{\mathrm{GL}}(A,\hat{A})\geq(n\lambda_{\min}(G(A,\hat{A})))^{1/2},$$
$$\sup\{\|\eta_{\mathrm{SO}}(S,A,\hat{A})\|:S\in\mathrm{SO}_n\}\leq g_{\mathrm{SO}}(A,\hat{A})\leq n(\lambda_{\max}(G(A,\hat{A})))^{1/2},$$

где $\lambda_{\min}(G(A,\hat{A}))$, $\lambda_{\max}(G(A,\hat{A}))$ *– соответственно минимальное и максимальное собственные значения матрицы* $G(A,\hat{A})$.

Доказательство. Поскольку при GL-юстировке матриц A, $\hat{A}$, имеют место положения

$$c\in\mathbb{R},\ c\neq0\Rightarrow\eta_{\mathrm{GL}}(cS,A,\hat{A})=\eta_{\mathrm{GL}}(S,A,\hat{A}),$$
$$\|S\|=1\Rightarrow\|S^{-1}\|\geq n^{1/2},$$

справедливость которых едва ли нуждается в комментариях и, сверх того, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ – открытое множество всюду плотное в $(M_{n\times n}(\mathbb{R}),\|\cdot\|)$, то имеет место цепочка следующих отношений:

$$f_{\mathrm{GL}}(A,\hat{A})=\inf\{\|S^{-1}\|\cdot\left\|\eta_{\mathrm{GL}}(S,A,\hat{A})S\right\|:S\in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\}\geq$$
$$\geq\inf\{n^{1/2}\left\|\eta_{\mathrm{GL}}(S,A,\hat{A})S\right\|:S\in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}),\|S\|=\inf\{\|S^{-1}\|=1\}=$$
$$=\inf\{n^{1/2}\left\|HA-\hat{A}H\right\|:H\in M_{n\times n}(\mathbb{R}),\|H\|=1\}=$$
$$=(\inf\{n\left\|HA-\hat{A}H\right\|^2\left\|H\right\|^{-2}:H\in M_{n\times n}(\mathbb{R})\})^{1/2}=$$
$$=(\inf\{nh^{\mathrm{T}}G(A,\hat{A})\,h(h^{\mathrm{T}}h)^{-1}:h\in\mathbb{R}^{n\times n}\})^{1/2}=$$
$$=(n\lambda_{\min}(G(A,\hat{A})))^{1/2},$$

где $h:=\mathrm{col}(h_{11},\ldots,h_{nn})\in\mathbb{R}^{n\times n}$ – вектор, индуцированный матрицей $[h_{ij}]=H\in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, $\lambda_{\min}(G(A,\hat{A}))$ – минимальное собственное значение матрицы $G(A,\hat{A})$; этим завершаем построение нижней оценки квазиточности $f_{\mathrm{GL}}(A,\hat{A})$ при GL-юстировки матриц A, $\hat{A}$.

Теперь обозначим основные аналитические элементы верхней оценки $g_{\mathrm{SO}}(A,\hat{A})$:

$$\sup\{\left\|\eta_{\mathrm{SO}}(S,A,\hat{A})\right\|:S\in\mathrm{SO}_n\}\leq g_{\mathrm{SO}}(A,\hat{A})=$$
$$=\sup\{\|S^{\mathrm{T}}\|\cdot\left\|\eta_{\mathrm{SO}}(S,A,\hat{A})S\right\|:S\in\mathrm{SO}_n\}=$$
$$=n(\sup\{\left\|SA-\hat{A}S\right\|^2\|S\|^{-2}:S\in\mathrm{SO}_n\})^{1/2}\leq$$
$$\leq n(\sup\{q^{\mathrm{T}}G(A,\hat{A})q/q^{\mathrm{T}}q:q\in\mathbb{R}^{n\times n}\})^{1/2}=$$
$$=n(\lambda_{\max}(G(A,\hat{A})))^{1/2},$$

где $\lambda_{\max}(G(A,\hat{A}))$ – максимальное собственное значение матрицы $G(A,\hat{A})$. ■

Подытожим полученные результаты: в контексте решения задачи (3) при доказательстве теоремы 4 по существу показали, что любой собственный вектор $\mathrm{col}(h_{11},\ldots,h_{nn})$ матрицы $G(A,\hat{A})$, отвечающий $\lambda_{\min}(G(A,\hat{A}))$, индуцирует матрицу $H=[h_{ij}]\in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, при этом, если $H\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, то при действии подобия ρ_{GL} матрицу H можно рассматривать в качестве «претендента» решения при вычислении квазиточности GL-юстировки заданных матриц A, $\hat{A}$. Иными словами, если по факту $\det H\neq 0$, где матрица H отвечает (как собственный вектор матрицы $G(A,\hat{A})$) собственному значению $\lambda_{\min}(G(A,\hat{A}))$, то с алгоритмической точки зрения несложная конструкция

$$\sigma_{\mathrm{GL}}(H,A,\hat{A})=n^{1/2}\left\|HA-\hat{A}H\right\|\cdot\left\|H\right\|^{-1}=(n\lambda_{\min}(G(A,\hat{A})))^{1/2} \tag{7}$$

удовлетворяет (3), сводя построение квазиточности GL-юстировки к осязаемой задаче вычисления собственных значений $G(A,\hat{A})$. В противном случае (поиск решения (3) при $\det H=0$) можно исходить из того, что в любой «l_2-близости» от H всегда найдется ($\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ всюду плотно в $M_{n\times n}(\mathbb{R})$) трансформирующая матрица $S\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, реализующая оценку (3).

Сказанное выше позволяет дать ряд рекомендаций: если порядок n нечетный и $\det H<0$, где матрица H сформирована согласно правила (7), то согласно теоремы 3 трансформирующая матрица $-H\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ тоже определяет решение задачи (3), для которого (в отличие от H) существует непрерывный путь в многообразии $\mathrm{Pr}_A\circ\pi^{-1}_{\mathrm{GL}}([D,A,B,C]_{\mathrm{GL}})$, соединяющий исходную матрицу A системы (1) и матрицу HAH^{-1} системы (2) (т.е. $S=H$). Таким образом, существует непрерывное отображение замкнутого интервала в орбиту $\mathrm{Pr}_A\circ\pi^{-1}_{\mathrm{GL}}([D,A,B,C]_{\mathrm{GL}})$ с начальной точкой в A и концевой в HAH^{-1}, что важно для оптимальных систем, основанных на методах идентификации [19]. С другой стороны, если при выполнении (7) имеет место $\det H<0$ и порядок n системы реализации четный, то для трансформирующих матриц H и $-H$ такой путь отсутствует.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Одна из важнейших задач любой научной теории, и в особенности математической, – это проблема классификации. В точной формулировке данной проблемы существенно свойство эквивалентности, которое часто определяется некоторой группой преобразований; как правило, соответствующие понятия вводятся и исследуются на языке алгебраической геометрии. В данной работе изучение проблемы прецизионной $\mathrm{GL/SO}$-юстировки нелинейной МДР-модели классы эквивалентности представляли собой многообразие модулей (пространство орбит при действии подобия), знакомство с которым предполагает (и влечет) использование языка метода орбит, который по своей простоте, наглядности и общности относится к основам современной теории представлений.

Важность изложенной выше теории заключается в том, что она является не только строго аналитической, она с очевидностью приводит к весьма полезным идеям для синтеза алгоритмов оптимальной калибровки модели дифференциальной реализации гиперболических систем [20]. В частности, включать в цикл S-настройки дополнительный учет матричной пары (SDS^{-1}, SB) системы (2), в том числе для полилинейных регуляторов [21, 22], учитывающих дифференциальное моделирование нелинейных колебаний. Кроме того, предложенный метод юстировки можно разрабатывать для целей практики [3–8, 23, 24] в «робастной» постановке [25], но теоретически такой подход до конца еще не исследован.

Благодаря подобным изысканиям теория апостериорного математического моделирования успешно развивается в новых теоретико-системных направлениях [26], обобщая классическую детерминистическую теорию идентификации и робастно-апостериорное построение моделей. В этом методологическом обобщении границы между этими двумя областями математического моделирования, очевидно, будут сглаживаться, предопределяя одну из основных тенденций развития современной теории дифференциальной реализации, попутно формируя адекватный язык точного моделирования [27], когда практик будет лучше понимать ее и относиться к ней с большим доверием.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Rutkovsky V.Yu., Suchanov V.M., Giumov V.M.* On control theory of large space structures assembled in orbit. In: Space Technology. Oxford: Lister Sci. Publ. 2010. P. 35–46.
2. *Банщиков А.В.* Исследование влияния управляющих сил на устойчивость спутника с гравитационным стабилизатором средствами компьютерной алгебры // Проблемы управления и информатики. 2018. № 4. С. 139–149.
3. *Данеев А.В., Русанов В.А., Русанов М.В.* От реализации Калмана–Месаровича к линейной модели нормально-гиперболического типа // Кибернетика и системный анализ. 2005. № 6. С. 137–157.
4. *Дружинин Э.И.* Построение структурно устойчивых моделей динамики больших космических конструкций по данным летных испытаний // Доклады РАН. 2017. Т. 479. № 3. С. 285–288.
5. *Rusanov V.A., Banshchikov A.V., Daneev A.V., Vetrov A.A., Voronov V.A.* A posteriori simulation of dynamic model of the elastic element of satellite-gyrostat // Far East Journal of Mathematical Sciences. 2017. Vol. 101. No. 9. P. 2079–2094.
6. *Rusanov V.A., Daneev R.A., Lakeyev A.V., Linke Yu.É.* Differential realization of second-order bilinear system: A functional-geometric approach // Advances in Differential Equations and Control Processes 2018. Vol. 19. No. 3. P. 303–321.
7. *Коровин С.К., Крищенко А.П., Четвериков В.Н.* Нелинейные отображения вход–выход и их минимальные реализации // Доклады РАН. 2010. Т. 434. № 5. С. 604–608.
8. *Русанов В.А., Лакеев А.В., Линке Ю.Э.* К разрешимости дифференциальной реализации минимального динамического порядка семейства нелинейных процессов «вход–выход» в гильбертовом пространстве // Дифференциальные уравнения. 2015. Т. 51. № 4. С. 524–537.
9. *Rusanov V.A., Lakeev A.V., Linke Yu.E., Voronov V.A.* On realization of dynamic systems: Assessment of fiducial accuracy in the process of adjustment of the realization matrix // Far East Journal of Dynamical Systems. 2014. Vol. 25. No. 1. P. 23–35.
10. *Бредон Г.* Введение в теорию компактных групп преобразований. М.: Наука, 1980.
11. *Бахтурин Ю.А.* Основные структуры современной алгебры. М.: Наука, 1990.
12. *Rusanov V.A., Antonova L.V., Daneev A.V., Mironov A.S.* Differential realization with a minimum operator norm of a controlled dynamic process // Advances in Differential Equations and Control Processes. 2013. Vol. 11. No. 1. P. 1–40.
13. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.
14. *Глазман И.М., Любич Ю.И.* Конечномерный линейный анализ. М.: Наука, 1969.
15. *Арнольд В.И.* Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений М.: МЦНМО, 2012.
16. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. М.: Мир, 1989.
17. *Прасолов В.В.* Элементы комбинаторной и дифференциальной топологии. М.: МЦНМО, 2014.

18. *Ланкастер П.* Теория матриц. М.: Наука, 1982.
19. *Ahmed N.U.* Optimization and Identification of Systems Governed by Evolution Equations on Banach Space. New York: John Wiley and Sons, 1988.
20. *Мишин С.Н.* Обобщение метода Лагранжа на случай линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными операторными коэффициентами в локально выпуклых пространствах. Математические заметки. 2018. Т. 103. Вып. 1. С. 75–91.
21. *Лакеев А.В., Линке Ю.Э., Русанов В.А.* К реализации полилинейного регулятора дифференциальной системы второго порядка в гильбертовом пространстве // Дифференциальные уравнения. 2017. Т. 53. № 8. С. 1098–1109.
22. *Rusanov V.A., Daneev A.V., Lakeyev A.V., Sizykh V.N.* Higher-order differential realization of polylinear-controlled dynamic processes in a Hilbert space // Advances in Differential Equations and Control Processes 2018. Vol. 19. No. 3. P. 263–274.
23. *Самарский А.А., Михайлов А.П.* Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. М.: Физматлит, 2005.
24. *Банщиков А.В., Ветров А.А., Данеев А.В., Русанов В.А.* К юстировке параметров источника электромагнитного излучения на геостационарной орбите // Проблемы управления и информатики. 2018. № 2. С 114–124.
25. Kreinovich V., Lakeyev A.V., Rohn J., Kahl P. Computational complexity and feasibility of data processing and interval computational. Dordrecht: Kluwer. 1998.
26. *Rusanov V.A., Daneev A.V., Linke Yu.É., Sizykh V.N., Voronov V.A.* System-theoretical foundation for identification of dynamic systems. I. Far East Journal of Mathematical Sciences. 2018. Vol. 106. N 1. P. 1–42.
27. *Кабанихин С.И.* Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: СНИ, 2009.

OPTIMIZATION OF THE CONFIGURATION SPACE BASIS OF THE IDENTIFIED NONLINEAR MODEL OF LARGE-SIZE SPACE STRUCTURE DYNAMICS

© 2019 A.V. Daneev[1,2], V.A. Rusanov[1,3], M.V. Rusanov[1], V.N. Sizykh[1]

[1] Irkutsk State Transport University
[2] East-Siberian Branch of Russian State University of Justice, Irkutsk
[3] Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Irkutsk

An analytically based numerical method for optimizing the a posteriori basis in the configuration space of an identi-fied nonlinear differential model is proposed the model is given in the form of Lagrange equations of the 2nd kind damped oscillations of a large-size space structure. The results of the article have applications in precision mathematical modeling (according to field tests) of the equations of controlled dynamics of nonlinear oscillations, generating theoretical and applied statements for the differential implementation of complex controlled hyperbolic systems.
Keywords: nonlinear differential realization, Morse theory, adjustment of the identified model.

Alexey Daneev, Doctor of Technics, Professor, Professor of the Irkutsk State Transport Univer-sity. E-mail: daneev@mail.ru
Vyacheslav Rusanov, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Irkutsk State Transport University. E-mail: v.rusanov@mail.ru
Mark Rusanov, Post-graduate Student of the Irkutsk State Transport University, E-mail: rusanovmark@mail.ru
Viktor Sizykh, Doctor of Technics, Associate Professor, Professor of the Irkutsk State Transport University. E-mail: sizykh_vn@mail.ru