УДК 533.5 : 533.72

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРЯМОГО СКАЧКА УПЛОТНЕНИЯ МОДИФИЦИРОВАННЫМ МЕТОДОМ МОНТЕ-КАРЛО

© 2019 В.В. Никонов

Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва

Статья поступила в редакцию 11.06.2019

В статье решается задача прямого численного моделирования прямого скачка уплотнения модифицированным методом Монте-Карло. Получено распределение плотности и скорости в скачке с помощью модифицированного метода. Результаты сравниваются с результатами оригинального метода. Результаты, полученные с помощью модифицированного метода Монте-Карло, практически совпадают с результатами оригинального метода. При этом время расчета задачи сократилось на 18 процентов.

Ключевые слова: разреженный газ, прямой скачок, прямое моделирование, численное моделирование, метод Монте-Карло, одномерное течение.

ВВЕДЕНИЕ

Первый вероятностный метод моделирования течений с поверхностями отражения был введен Haviland и Lavin [1] и назывался метод тестовых частиц Монте-Карло.

Этот метод применялся для моделирования течений без столкновений и имел дело со сложными течениями, которые включают многоповерхностные отражения. При моделировании переходных режимов становится необходимым вычислять типичные межмолекулярные столкновения в дополнение к молекулярно-поверхностному взаимодействию.

Метод, учитывающий межмолекулярные столкновения, был в первый раз применен Bird к задаче релаксации однородного газа [2] и назывался метод моделирования Монте-Карло. Далее этот метод был применен Bird к моделированию задачи о распространении ударной волны [3]. Hammersley и Handscomb [4] установили, что методы Монте-Карло работают в области экспериментальной математики, которая связана с теорией вероятности. Они также применили термин «прямое моделирование» к расчету вероятностных задач данным методом. В настоящей работе используется дальнейшее развитие метода прямого моделирования Монте-Карло (ПММК) [5, 6].

1. ЧИСЛЕННАЯ СХЕМА МЕТОДА

В работе рассматриваются схемы метода ПММК для случая одномерного течения, хотя для частиц вычисляются все три компоненты скорости, но учитываются перемещения частиц только вдоль оси Ox. В методе, описанном в [5], область течения разбивается основной и вспомогательной однородными сетками. Основная сетка имеет квадратные ячейки, при этом в каждой ячейке содержится несколько подъячеек вспомогательной сетки. В начальный момент времени в ячейках сетки располагаются частицы случайным образом с компонентами скорости:

$$v_1 = u_m a\cos\theta\cos\varphi,\quad v_2 = u_m a\cos\theta\sin\varphi,\quad v_3 = u_m a\sin\theta. \tag{1}$$

Здесь

$$a = \sqrt{-\ln(R')}, \tag{2}$$

где R' – случайная величина из диапазона $R' \in (0,1)$,

$$\varphi = 2\pi R', \tag{3}$$

$$\theta = \pi(R' - \tfrac{1}{2}), \tag{4}$$

$$u_m = \sqrt{2kT / m_m}, \tag{5}$$

где k - постоянная Больцмана, T - температура течения, m_m - молекулярная масса.

После чего частицы перемещаются со своей скоростью за шаг по времени Δt в новое положение

$$x^i = x^{i-1} + v_1^{i-1}\Delta t. \tag{6}$$

Если частицы вылетают за расчетную область, то они удаляются. При этом если число частиц становится меньше максимального числа частиц, то новые частицы добавляются в течение. После этого заполняются вспомогательные массивы, ставящие в соответствие каждой ячейке сетки несколько частиц, которые в ней находятся. Причем в оригинальной программе

Никонов Валерий Владимирович, кандидат технических наук, старший преподаватель кафедры конструкции и проектирования летательных аппаратов.
E-mail: v_nikonov@mail.ru

Bird [5] заполняется также массив, ставящий в соответствие каждой подъячейке сетки частицы газа, которые в ней находятся. В предлагаемой модифицированной программе данный шаг отсутствует, так как вспомогательная сетка с подъячейками была исключена из схемы метода ПММК [7].

На следующем шаге алгоритма вычисляются скорости после столкновения частиц. В оригинальной программе [5] выбирается пара частиц для столкновения из подъячеек, ближайших к рассматриваемой ячейке, методом случайного выбора, но в пределах одной ячейки сетки. В предлагаемой модифицированной схеме метода [7] пары частиц выбираются сразу из рассматриваемой ячейки сетки методом случайного выбора, что сильно упрощает алгоритм.

Компоненты относительной скорости двух столкнувшихся частиц l и m определяются следующим образом

$$u_j = v_{jl} - v_{jm}, \quad j = (\overline{1,3}). \qquad (7)$$

Относительная скорость частиц по модулю определится как

$$v^* = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}. \qquad (8)$$

Если выполняется условие

$$|\alpha - 1| < 0.001, \qquad (9)$$

то расчет ведется по модели твердых ядер, в противном случае расчет выполняется по модели мягких ядер. Здесь α - величина обратная параметру разброса в модели мягких ядер.

Промежуточные величины скорости для модели мягких ядер рассчитываются с помощью следующих формул:

$$u_1^* = u_1 \cos\chi + d \sin\chi \sin\varphi,$$

$$u_2^* = u_2 \cos\chi + \sin\chi (v^* u_3 \cos\varphi - u_1 u_2 \sin\varphi)/d, \qquad (10)$$

$$u_3^* = u_3 \cos\chi - \sin\chi (v^* u_2 \cos\varphi + u_1 u_3 \sin\varphi)/d,$$

где

$$d = \sqrt{u_2^2 + u_3^2}, \qquad (11)$$

$$\varphi = 2\pi R', \qquad (12)$$

$$\cos\chi = 2R'^{\alpha} - 1. \qquad (13)$$

Скорости частиц после столкновения вычисляются по скоростям центра масс частиц l и m до столкновения и скоростям, определяемым по формулам (10),

$$v'_{jl} = \frac{v_{jl} + v_{jm} + u_j^*}{2},$$

$$v'_{jm} = \frac{v_{jl} + v_{jm} - u_j^*}{2}, \quad j = (\overline{1,3}). \qquad (14)$$

После этапа столкновений частиц следует этап вычисления параметров потока. Параметры потока, как и в [5], рассчитываются каждые четыре шага по времени. Скорость потока в k-ой ячейке сетки определяется следующим образом

$$\bar{v}_{jk} = \frac{\sum_{m=1}^{M_k} v'_{jkm}}{M_k}, \qquad (15)$$

где v_{jkm} – j-ая компонента скорости m-ной частицы в k-ой ячейке сетки; M_k – число образцов для измерений в k-ой ячейке сетки.

На этом численная схема метода завершается и происходит переход к следующему шагу по времени.

2. НЕКОТОРЫЕ ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Был рассмотрен прямой скачок уплотнения в одномерной области $x \in [-0,3; 0,3]$ *м*. Граница разрыва параметров течения находилась при $x = 0$. В начальный момент времени в ней размещались частицы с полем скорости, которое соответствовало скачку, на него накладывалось случайное поле скорости теплового движения частиц. С левой границы области в неё добавлялись частицы со случайными скоростями плюс скорость набегающего потока, а на правой границе ставилось условие зеркального отражения. Параметры потока до скачка равнялись $\rho_I = 6,64 \cdot 10^{-6}$ *кг/м³*, $V_I = 446,11$ *м/с*, $T_I = 293$ *K*, после скачка $\rho_{II} = 1,0495552 \cdot 10^{-5}$ *кг/м³*, $V_{II} = 282,2310$ *м/с*, $T_{II} = 407,8105$ *K*. Расчет производился по модели мягких ядер, величина, обратная параметру разброса, принималась равной $\alpha = 0,6015$. Однородная сетка состояла из 300 ячеек и 1800 подъячеек. Температура газа в области [в выражении (5)] равнялась до скачка T_I, после скачка T_{II}. Время моделирования составляло 0.6009193 с. Максимальное число частиц равнялось 20000.

На рисунках 1, 2 представлены результаты, полученные с помощью оригинального метода ПММК [5], в сравнении с результатами модифицированного метода [7]. Из рисунков видно, что две линии, соответствующие представленным методам, сливаются в одну. Для оценки совпадения результатов была произведена выборка для скорости в пяти точках рассматриваемой области, которая приводится в таблице 1. Из результатов таблицы видно, что численные результаты двух методов практически совпадают. При этом в модифицированном методе ПММК удалось добиться снижения времени счета на 18 %.

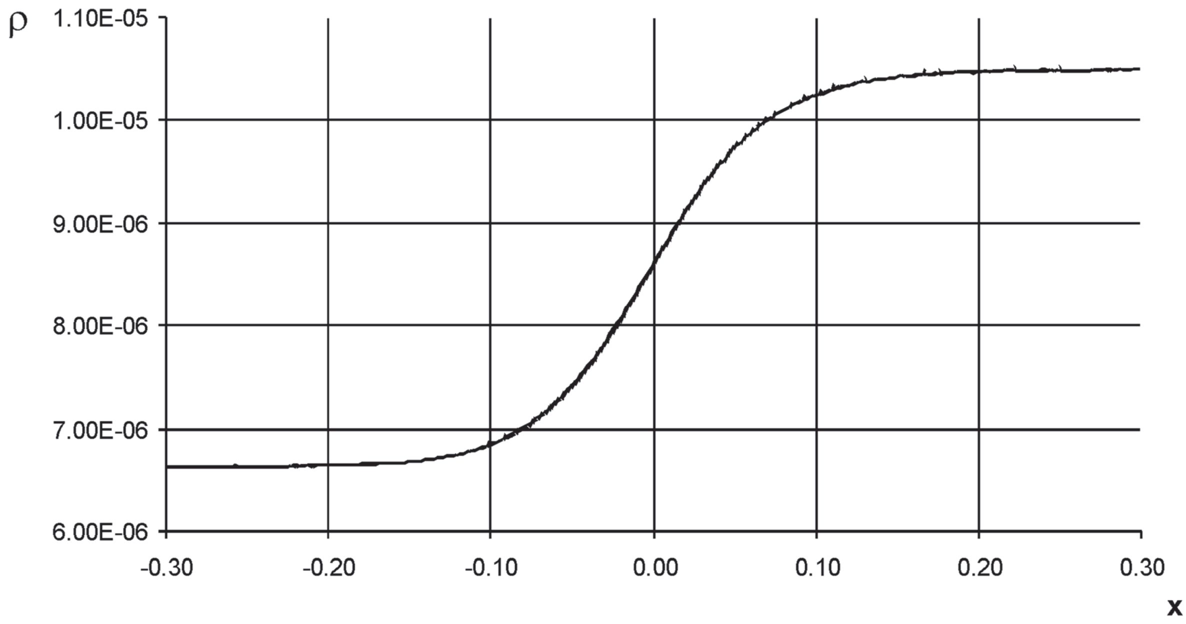

Рис. 1. Распределение плотности в скачке уплотнения:
- - - - - – метод ПММК Bird [5], ——— – модификация метода ПММК

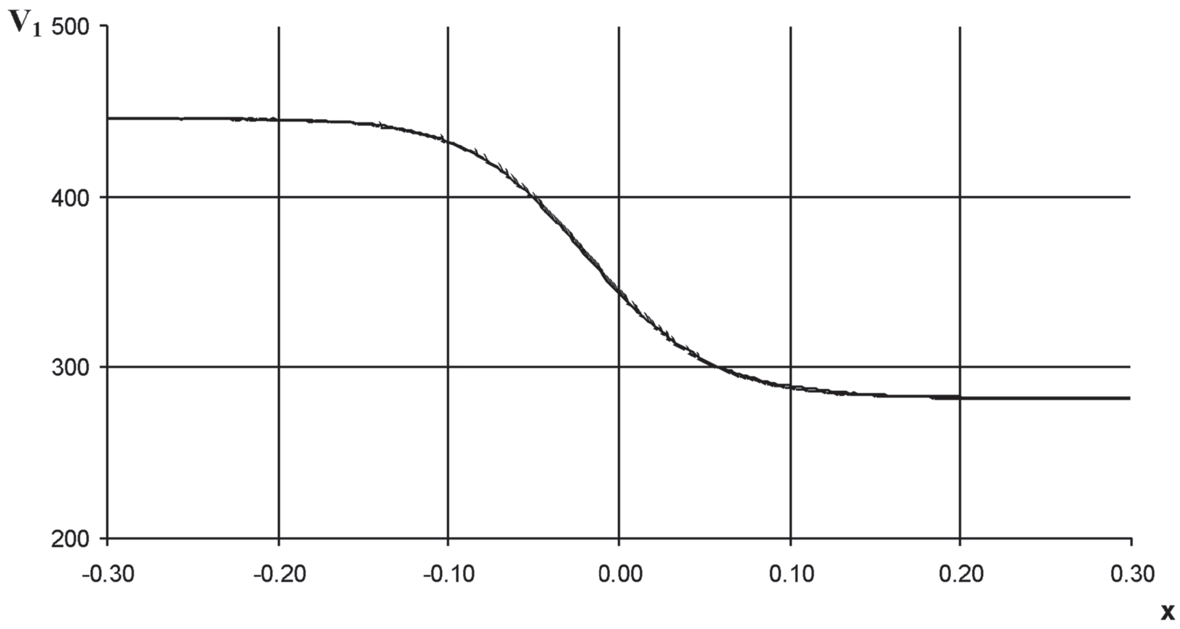

Рис. 2. Распределение скорости в скачке уплотнения:
- - - - - – метод ПММК Bird [5], ——— – модификация метода ПММК

Таблица 1. Сравнение скоростей модифицированного и оригинального методов

x, м	V_1, м/с [5]	V_1, м/с [7]
-0.20	445.48	445.37
-0.10	432.84	432.22
0.00	345.47	344.83
0.10	288.57	289.13
0.20	282.45	282.84

ВЫВОДЫ

По численным результатам моделирования методом ПММК прямого скачка уплотнения можно сделать вывод, что модифицированный метод ПММК [7] позволяет получать результаты, практически совпадающие с результатами оригинального метода Bird [5], при этом его алгоритм более прост. Кроме того, удалось добиться снижения времени счета на 18 %.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Haviland, J.K.* Applications of the Monte Carlo method to heat transfer in a rarefied gas / *J.K. Haviland, M.L. Lavin* // Phys. Fluids. 1962. v5. pp. 1399-1405.
2. *Bird, G.A.* Approach to translational equilibrium in rigid sphere gas / *G.A. Bird* // Phys. Fluids. 1963. Vol. 6. P. 1518-1519.
3. *Bird, G.A.* Shock wave structure in a rigid sphere gas / *G.A. Bird* // Rarefied gas dynamics (ed. J.H. de Leeuw). 1965. Vol. 1. Academic Press. New York. P.216-222.
4. *Hammersley, J.M.* Monte Carlo methods / *J.M. Hammersley, D.C. Handscomb* - Wiley. - New York. 1964.
5. *Bird, G.A.* Molecular gas dynamics and the direct simulation of gas flows / *G.A. Bird*. – Clarendon press. - Oxford. 1994.
6. *Bird, G.A.* The DSMC method / *G.A. Bird*. – The University of Sydney. 2013.
7. *Никонов, В.В.* Модификация метода Монте-Карло для прямого моделирования течения разреженного газа / *Никонов, В.В.* // Известия СНЦ РАН. 2017. т. 19. N 1. Самара. с. 183-186.

NORMAL SHOCK SIMULATION BY MODIFICATED MONTE-CARLO METHOD

Samara National Research University named after Academician S.P. Korolyov

The problem of direct numerical simulation of normal shock by Monte-Carlo method is solved. Density and velocity distribution in shock by modificated method are obtained. For calculation the original Monte-Carlo method and its modification are used. It is shown, that the modificated Monte-Carlo method is able to obtain very good results in comparing with the original one. By the way executive time is reduced at 18 percent.

Keywords: dilute gas, shock, direct simulation, numerical simulation, Monte-Carlo method, one-dimensional flow.

Valeriy Nikonov, PhD, Senior Lecturer of Aircraft Construction and Design Department. E-mail: v_nikonov@mail.ru