УДК 517.977

АЛГОРИТМ ПЛАНИРОВАНИЯ ТРАЕКТОРИИ ДВИЖЕНИЯ БЕСПИЛОТНОГО ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА ПРИ ВЫПОЛНЕНИИ ПОИСКОВО-СПАСАТЕЛЬНЫХ ОПЕРАЦИЙ

© 2018 И.А. Батраева[1], Д.П. Тетерин[2]

[1] Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского
[2] Акционерное общество «Авиаавтоматика» имени В.В. Тарасова», г. Курск

Статья поступила в редакцию 25.09.2018

Приводится описание алгоритма предполетного планирования траектории движения беспилотного летательного аппарата средствами бортовой системы управления с учетом изменения динамических характеристик летательного аппарата вследствие уменьшения запасов топлива и массы полезной нагрузки, а также параметров полета летательного аппарата в точке сброса груза. Алгоритм отличается от аналогов повышенной точностью и более низкой вычислительной трудоемкостью расчета баллистико-навигационных задач.

Ключевые слова: беспилотные летательные аппараты, баллистико-навигационное обеспечение, планирование траектории, траектория движения*, матрица* коэффициентов разложения функции на простейшие дроби

Результаты, представленные в данной статье, получены при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ, проект 9.2108.2017/4.6.

Использование беспилотных летательных аппаратов вертолетного типа (БЛА) при проведении поисково-спасательных операций в условиях высоких широт и других трудно доступных территорий позволяет повысить эффективность поисковых работ. БЛА могут летать на малой высоте, не зависят от таких человеческих факторов как внимание и усталость, в режиме «висение» имеют возможность сбрасывать груз точно в заданную точку. Вследствие этого научно-техническая задача разработки и экспериментальной проверки теоретических основ применения комплексов с БЛА при выполнении поисково-спасательных операций является актуальной [1]. Успешное решение задачи во многом зависит от точности бортовых систем управления, программно-аппаратные средства которых должны обеспечивать автономное планирование траектории движение летательного аппарата в режиме времени близком к реальному, в зависимости от динамических характеристик летательного аппарата [2]. Трудности обеспечения планирования траектории движения БЛА связаны, в том числе, с тем, что в существующих методах глобального (предполетного) и локального (в полете) планирования траектории движения БЛА переменной массы используются приближенные численных методов математического моделирования динамических свойств летательного аппарата, которые не всегда дают необходимую точность вычислений и зависят от мощности бортовых вычислителей с точки зрения скорости вычислений в реальном времени [3-5].

Постановка задачи баллистико-навигационного обеспечения БЛА при выполнении поисково-спасательной операции в условиях Арктики**.** Известны координаты на плоскости точки нахождения грузового судна, лишившегося возможности самостоятельного перемещения во льдах. С помощью беспилотного вертолета (рис. 1) требуется доставить на судно груз, причем, обеспечить в расчетной точке сброса груза определенные значения скорости и ускорения летательного аппарата. В ходе предполетной подготовки спасательной операции средствами бортовой системы управления БЛА с встроенной упрощенной динамической моделью летательного аппарата представленной в виде однородного обыкновенного дифференциального уравнения n-го порядка (системы n управлений первого порядка) с кусочно-постоянными коэффициентами (ОДУ) осуществляется планирование траектории движения вертолета с учетом изменений в ходе полета запасов топлива и массы полезной нагрузки (вариант построения упрощенной математической модели БЛА в виде систем дифференциальных уравнений в форме Коши, а также порядок приведения систем дифференциальных уравнений в форме Коши и обыкновенных неоднородных диффе-

Батраева Инна Александровна, кандидат физико-математических наук, и.о. заведующего кафедрой технологий программирования на базе филиала ООО «Мирантис ИТ» в г. Саратове. E-mail: batraevaia@info.sgu.ru
Тетерин Дмитрий Павлович, доктор технических наук, первый заместитель генерального директора АО «Авиаавтоматика» им. В.В. Тарасова».
E-mail: tdp@aviaavtomatika.ru

ренциальных уравнений к обыкновенным однородным дифференциальным уравнениям высших порядков приведены в публикациях [6, 7]). При этом принимаются следующие допущения: изменение динамических параметров летательного аппарата (кусочно-постоянных коэффициентов ОДУ) из-за изменений в ходе полета запасов топлива происходит в точках разрыва траектории полета; точка сброса груза является опорной точкой маршрута, которая может находиться на любом кусочно-постоянном отрезке или полуинтервале траектории полета БЛА, за исключением первого отрезка; параметры модели летательного аппарата в опорной точке маршрута задаются дифференциальным оператором [7]; совпадение точки сброса груза и точки разрыва траектории в общем случае не обязательно. Результатом планирование траектории движения вертолета является траектория движения летательного аппарата, состоящая из q непрерывных функций , проходящих через q точек разрыва и опорную точку маршрута .

АНАЛИТИКО-ЧИСЛОВОЙ МАТРИЧНЫЙ АЛГОРИТМ ПЛАНИРОВАНИЯ ТРАЕКТОРИИ ДВИЖЕНИЯ БЛА

1. По имеющейся приближенной математической модели вертолета, представленной в виде приведенного однородного обыкновенного дифференциального уравнения n-го порядка с кусочно-постоянными коэффициентами вида

$$a_{0,j}+a_{1,j}\frac{dy(t)}{dt}+a_{2,j}\frac{d^2y(t)}{dt^2}+\ldots+a_{n-1,j}\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}}+\frac{d^ny(t)}{dt^n}=0,$$

где n – порядок математической модели летательного аппарата, строят $q+1$ характеристических полиномов вида

$$a_{0,j}+a_{1,j}s+a_{2,j}s^2+\ldots+a_{n-1,j}s^{n-1}+s^n,$$

где $a_{i,j}$ – кусочно-постоянные коэффициенты, $i=\overline{0,n-1}, j=\overline{1,q+1}$; s – независимая переменная (параметр интегрального преобразования Лапласа), q – количество точек разрыва траектории, в которых происходит изменение исходных данных о динамических параметрах летательного аппарата (кусочно-постоянных коэффициентов).

Полином

$$a_{0,1}+a_{1,1}s+a_{2,1}s^2+\ldots+a_{n-1,1}s^{n-1}+s^n$$

соответствует первому – начальному кусочно-постоянному отрезку траектории, расположенному между точками T_0 и T_1, где T_0 – относительное время начала полета; T_1 – относительное время первого изменения исходных данных о динамических параметрах летательного аппарата, вызванных изменением запаса топлива.

Полином

$$a_{0,q+1}+a_{1,q+1}s+a_{2,q+1}s^2+\ldots+a_{n-1,q+1}s^{n-1}+s^n$$

соответствует последнему кусочно-постоянному полуинтервалу траектории, расположенному правее точки T_q, где T_q – относительное время последнего изменения исходных данных о динамических параметрах летательного аппарата, вызванных изменением запаса топлива и/или массы полезной нагрузки.

На каждом из отрезков и последнем полуинтервале траектории кусочно-постоянные коэффициенты принимают неизменными, т.е. изменение запасов топлива и массы полезной нагрузки не оказывают принципиального влияния на динамические параметры летательного аппарата. Изменение кусочно-постоянных коэффициентов происходит только в точках разрыва траектории $T_1, \ldots, T_q$, причем в этих точках изменяет свое значение хотя бы один из коэффициентов дифференциального уравнения, соответствующего математической модели летательного аппарата.

Рис. 1. Беспилотный летательный аппарат вертолетного типа взлетной массой до 500 кг

2. Переменной $LocArg$ присваивают порядковый номер отрезка (полуинтервала) в пределах которого находится опорная точка маршрута (точка сброса груза). Если опорная точка маршрута совпадает с точкой разрыва траектории $c_{оп} = T_k$, то переменной $LocArg$ присваивают порядковый номер отрезка $[T_{k-1}, T_k]$.

3.Аналитическими методами вычисляют различные корни $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ характеристического полинома $a_{0,LocArg} + a_{1,LocArg}s + a_{2,LocArg}s^2 + \dots + a_{n-1,LocArg}s^{n-1} + s^n$, соответствующего математической модели летательного аппарата на Lo-ом кусочно-постоянном отрезке траектории полета летательного аппарата и их кратности $m_1, m_2, \dots, m_p$, где λ_i – i-й корень полинома; m_i – кратность i-го корня полинома; p – количество различных корней полинома [8].

4. Для частного случая простых корней Loc-го характеристического полинома ($n = p$) формируют матрицу-строку $BASIS \in \boldsymbol{R}^{1\times n} = (b_{1,j}) = [e^{\lambda_1 t},\ e^{\lambda_2 t}, \dots, e^{\lambda_n t}]$, где $e^{\lambda_i t}$ – i-я базисная функция, соответствующая корню λ_i.

Для случая кратных корней полинома ($n > p$) матрицу строят в порядке следования корней и возрастания номера корневой модификации базисной функции [4, 5]:

$$BASIS = (BASIS^1 \in \boldsymbol{R}^{1\times m_1}, BASIS^2 \in \boldsymbol{R}^{1\times m_2}, \dots, BASIS^p \in \boldsymbol{R}^{1\times m_p}),$$

где

$$BASIS^1 = (b_j^1) = [b_1^1, b_2^1, \dots, b_{m_1}^1]; \dots; BASIS^p = (b_j^p) = [b_1^p, b_2^p, \dots, b_{m_p}^p].$$

Т.е.:

$$BASIS = \left[\left(b_1^1, b_2^1, \dots, b_{m_1}^1\right), \left(b_1^2, b_2^2, \dots, b_{m_2}^2\right), \dots, \left(b_1^p, b_2^p, \dots, b_{m_p}^p\right)\right],$$

где $b_j^i = e^{\lambda_i t} t^{j-1}, i = \overline{1,p}, j = \overline{1,m_i}$;

$$BASIS = \left[\left(e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_1 t}t, \dots, e^{\lambda_1 t}t^{m_1 - 1}\right), \dots, \left(e^{\lambda_p t}, \dots, e^{\lambda_p t}t^{m_p - 1}\right)\right].$$

5. Находят маршрутную матрицу $ROUTE$ [4, 5], подстановкой левой границы отрезка/полуинтервала $t = T_{LocArg-1}$, где расположена опорная точка маршрута $c_{оп}$, в матрицу $BASIS$

$$ROUTE = (BASIS)_{t=T_{LocArg-1}}, \text{ где } T_0 = 0.$$

6. Строят вспомогательную матрицу $C \in \boldsymbol{R}^{n\times n} = (c_{i,j})$, в которой элементы первой строки $c_{1,i}$ есть элементы $b_{1,i}$ матрицы $BASIS$, а значения остальных элементов зависят от кратности корней Lo-го характеристического полинома. Для случая простых корней ($m_i = 1$) элементы матрицы вычисляют по формуле

$$c_{i,j} = \lambda_j^{i-1} c_{1,j}, i = \overline{2,n}, j = \overline{1,n}.$$

Тогда матрица C принимает вид

$$C = \begin{bmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \cdots & c_{1,n} \\ \lambda_1 c_{1,1} & \lambda_2 c_{1,2} & \cdots & \lambda_n c_{1,n} \\ \lambda_1^2 c_{1,1} & \lambda_2^2 c_{1,2} & \cdots & \lambda_n^2 c_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} c_{1,1} & \lambda_2^{n-1} c_{1,2} & \cdots & \lambda_n^{n-1} c_{1,n} \end{bmatrix}.$$

В случае наличия хотя бы одного кратного корня, каждому корню λ_j с кратностью m_j ставят в соответствие корневой блок размерностью $[2 \dots n, 1 \dots m_j]$. Всю матрицу строят путем приписовывания корневых блоков слева направо в порядке следования корней. Строение первого столбца блока в точности повторяет случай простого корня. Остальные элементы блока вычисляют по рекуррентной формуле

$$c_{h,j}^i = \lambda_i c_{h-1,j} + c_{h-1,j-1}(j - st - 1),$$
$$h = \overline{2,n}, j = \overline{st+2, st+m_i}, i = \overline{1,p}$$

где i – номер корневого блока, соответствующего корню λ_i с кратностью m_i;

st – порядковый номер столбца матрицы C, соответствующий первому столбцу -го корневого блока.

7. Подстановкой значения опорной точки маршрута $c_{оп}$ в матрицу C находят ее начальную (опорную) модификацию

$$C_{оп} = (C)_{t=c_{оп}}.$$

8. По параметрам модели летательного аппарата в опорной точке маршрута, заданным n дифференциальными операторами вида

$$\sum_{i=0}^{n-1} w_{k,i} \frac{d^i y(c_{оп})}{dt^i} = Y_k, k = \overline{1,n}$$

формируют n матриц-строк $POL - ICS^k \in \boldsymbol{R}^{1\times n} = (w_{1,i}^k)$ значений коэффициентов полиномов начальных условий, где элементы матриц вычисляют по формуле

$$w_{1,i+1}^k = w_{k,i}, i = \overline{0,n-1}, k = \overline{1,n},$$

где k – порядковый номер дифференциального оператора.

9. Определяют матрицу-столбец координат в опорных точках траектории на плоскости [4, 5]

$$COORD = AM^{-1} \times ICS,$$

где $AM \in \boldsymbol{R}^{n\times n}$ – матрица, строки которой вычисляют по формуле

$$AM_i = POL - ICS^i \times C_{оп}, i = \overline{1,n};$$

$ICS \in \boldsymbol{R}^{n\times 1}$ – матрица-столбец значений дифференциальных операторов в опорной точке маршрута

$$ICS = \begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}.$$

10. Находят матрицу коэффициентов разложения функции на простейшие дроби в форме Быстрова-Тетерина $KERN \in \boldsymbol{R}^{n\times n} = (k_{i,j})$ [9],

в которой элементы первой строки $k_{1,i}$ есть элементы первого столбца $[i,1]$ матрицы опорных начальных условий $COORD$, а значения остальных элементов зависят от кратности корней Lo-го характеристического полинома. Для случая простых корней ($m_i = 1$) элементы матрицы вычисляют по формуле

$$k_{i,j} = \lambda_j^{i-1} k_{1,j}, i = \overline{2,n}, j = \overline{1,n}.$$

Тогда матрица $KERN$ принимает вид

$$KERN = \begin{bmatrix} k_{1,1} & k_{1,2} & \cdots & k_{1,n} \\ \lambda_1 k_{1,1} & \lambda_2 k_{1,2} & \cdots & \lambda_n k_{1,n} \\ \lambda_1^2 k_{1,1} & \lambda_2^2 k_{1,2} & \cdots & \lambda_n^2 k_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} k_{1,1} & \lambda_2^{n-1} k_{1,2} & \cdots & \lambda_n^{n-1} k_{1,n} \end{bmatrix}.$$

В случае наличия хотя бы одного кратного корня, каждому корню λ_j с кратностью m_j ставят в соответствие корневой блок размерностью $[2 \ldots n, 1 \ldots m_j]$. Всю матрицу строят путем присовывания корневых блоков слева направо в порядке следования корней. Строение первого столбца блока в точности повторяет случай простого корня. Остальные элементы блока вычисляют по рекуррентной формуле

$$k_{h,j}^i = \lambda_i k_{h-1,j} + k_{h-1,j+1}(j - st),$$

$$h = \overline{2,n}, j = \overline{st + m_i - 1, st + 1}, i = \overline{1,p},$$

где i – номер корневого блока, соответствующего корню λ_i с кратностью m_i;
st – порядковый номер столбца матрицы $KERN$, соответствующий последнему столбцу i-го корневого блока.

11. Матрицы $KERN$ и $ROUTE$ записывают в память вычислительных средств бортовой системы управления летательного аппарата, тем самым выполняют формирование в памяти бортовой системы управления летательного аппарата исходных данных о динамических параметрах летательного аппарата и опорной точке маршрута.

12. Средствами бортовой системы управления осуществляют глобальное планирование программной траектории движения летательного аппарата для каждого кусочно-постоянного отрезка (полуинтервала) траектории по матричной формуле $y^j(t) = EXPF_j \times ICSI_j$, $j = \overline{1, q+1}$, с подстановкой в результат $t = t - T_{j-1}$, где $y^j(t), j = \overline{1, q+1}$ – функция от времени, описывающая траекторию движения летательного аппарата на j-м кусочно-постоянном отрезке (полуинтервале) траектории; $EXPF_j = e^{FROBA_j \times t}, j = \overline{1, q+1}$ – аналитическая матричная экспонента от матрицы в форме Фробениуса

$$FROBA_j = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -a_{0,j} & -a_{1,j} & \ldots & -a_{n-1,j} \end{bmatrix}, j = \overline{1, q+1},$$

соответствующей j-му кусочно-постоянному отрезку (полуинтервалу) траектории; $a_{0,j}$ … $a_{n-1,j}$ – значения коэффициентов j-го однородного линейного дифференциального уравнения, соответствующего математической модели летательного аппарата на j-м кусочно-постоянном отрезке (полуинтервале) траектории; $ICSI_j = EXPI_j \times ICSI_{j-1}, j = \overline{2, q+1}$ – матрица начальных условий к j-му однородному линейному дифференциальному уравнению, соответствующему математической модели летательного аппарата на j-м кусочно-постоянном отрезке (полуинтервале) траектории, причем $ICSI_1 = EXPARG \times (KERN \times ROUTE^T)$; $EXPI_j = e^{FROBA_j \times INT_j}, j = \overline{1,q}$ – численная матричная экспонента от скалярного произведения матрицы в форме Фробениуса $FROBA_j$, соответствующей j-му кусочно-постоянному отрезку (полуинтервалу) траектории, на длину соответствующего кусочно-постоянного отрезка траектории $INT_j = T_j - T_{j-1}, j = \overline{1,q}$; $EXPARG = e^{FROBA_1 \times T_{LocArg-1}}$ – численная матричная экспонента от скалярного произведения матрицы в форме Фробениуса $FROBA_1$ на значение левой границы отрезка (полуинтервала), в котором задана опорная точка маршрута, взятое с обратным знаком; $T_1, \ldots, T_q$ – моменты времени полета летательного аппарата – точек разрыва траектории, в которых происходит изменение исходных данных о динамических параметрах летательного аппарата.

13. Функции $y^j(t), j = \overline{1,q}$ записывают в память вычислительных средств бортовой системы управления летательного аппарата, они являются результатом предполетного – глобального планирования траектории движения летательного аппарата.

После начала движения летательного аппарата по программной траектории движения средствами бортовой системы управления летательного аппарата при помощи метода пропорционального сближения осуществляют отслеживание в каждый рассматриваемый текущий момент времени t положения и компенсацию с приемлемой точностью ухода центра масс летательного аппарата относительно j-й программной траектории движения $y^j(t)$ при соблюдении условий достижения минимальной методической ошибки управления и исключения «срыва» летательного аппарата с программной траектории.

Новизна аналитико-числового метода планирования траектории: в учете динамических характеристик БЛА кусочно-переменной массы для случая, когда точка сброса груза является опорной точкой маршрута, которая может находиться на любом кусочно-постоянном отрезке или полуинтервале траектории полета БЛА, за исключением первого отрезка; матричной формализации процедуры построения траектории; введении в рассмотрении нового типа матриц – матрицы коэффициентов разложения функции на простейшие дроби в форме Быстрова-Тетерина. Метод не содержит методической погрешности, допускает параллельное выполнение операций с матрицами средствами бортовых вычислителей.

ВЫВОДЫ И РЕКОМЕНДАЦИИ

Разработанные аналитико-числовой метод позволяет средствами бортовых средств баллистико-навигационного обеспечения планировать траекторию движения БЛА одновременно для всех опорных точек маршрута, точки сброса груза и точек разрыва траектории с учетом уменьшения запасов топлива и массы полезной нагрузки. Однако данные методы не позволяют выполнять локальное планирование движения БЛА по маршруту при внезапном воздействии на летательный аппарат факторов внешней среды, что является предметом дальнейших исследований [10-12].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Попов, А.Н.* Разработка и экспериментальная отработка теоретических основ применения комплексов с беспилотными летательными аппаратами вертолетного типа взлетной массой до 500 кг при выполнении поисково-спасательных операций на воде: отчет о НИР (промежуточ.) / Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.; исп.: Попов А.Н. [и др.]. – Саратов, 2017. – 105 с. - № ГР АААА-А17-117101640022-7.
2. *Ковадлин, М.Ш.* Пилотажные комплексы и навигационные системы вертолетов / М.Ш. Ковадлин, И.В. Сергушов и др. – М.: Инновационное машиностроение, 2017. 368 с.
3. *Быстров, Л.Г.* Методика оценки работоспособности элементов бортовых систем управления летательных аппаратов в условиях произвольных входных возмущающих воздействий / *Л.Г. Быстров, А.А. Попов и др.* // Мехатроника, автоматизация, управление. 2012. № 12. С. 56-61.
4. *Попов, А.Н.* Методы планирования траектории движения беспилотного летательного аппарата / А.Н. Попов // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. 2017. Т. 19. № 1 (2). С. 364-370.
5. *Попов, А.Н.* Методика планирования траектории движения беспилотного летательного аппарата с учетом противодействия противника / А.Н. Попов, Д.П. Тетерин // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. 2017. Т. 19. № 1 (2). С. 371-376.
6. *Быстров, Л.Г.* Идентификация линейных динамических систем по измеряемым координатам переменных состояния / Л.Г. Быстров // Мехатроника, автоматизация, управление. 2014. № 1. С. 3-6.
7. *Быстров, Л.Г.* Решение линейных дифференциальных уравнений. Аналитико-числовые методы и алгоритмы. Часть 1 / Л.Г. Быстров, *Г.С.* Говоренко и др. – М.: МГУЛ, 2004. 440 с.
8. *Дьяконов, В.П.* Математическая система Maple V R3 / R4 / R5 / В.П. Дьяконов. – М.: СОЛОН, 1998. 399 с.
9. *Тетерин, Д.П.* Алгоритм приведения *n*-точечных краевых задач для однородных линейных дифференциальных уравнений высших порядков к задаче Коши / Д.П. Тетерин // Вестник Саратовского государственного технического университета. 2009. № 2 (39). С. 11-18.
10. *Тетерин, Д.П.* Методы моделирования линейных стационарных элементов систем управления летательных аппаратов / Д.П. Тетерин // Вестник Саратовского государственного технического университета. 2009. № 4 (42). С. 95-100.
11. *Дрогайцев, В.С.* Методы идентификации динамических характеристик стационарных элементов бортовых систем управления // Л.Г. Быстров, *В.С.* Дрогайцев, *и др.* // Вестник Саратовского государственного технического университета. 2009. № 4 (42). С. 65-71.
12. *Дрогайцев, В.С.* Технология процесса комплексирования автоматизированных средств испытания бортовых систем летательных аппаратов // В.С. Дрогайцев, *Г.С.* Говоренко *и др.* // Информационные технологии в проектировании и производстве. 2004. № 3. С. 53-76.

TRAXER PLANNING ALGORITHM MOVEMENTS OF A FREE FLYING APPARATUS

[1] Saratov State University
[2] «Aviaavtomatika» named after V. Tarasov JSC

A description is given of the pre-flight planning algorithm for the motion path of an unmanned aircraft using the onboard control system, taking into account changes in the dynamic characteristics of the aircraft due to a decrease in fuel reserves and payload mass, as well as flight parameters of the aircraft. The algorithm differs from analogs by increased accuracy and lower computational complexity of the calculation of ballistic-navigation tasks.
Keywords: unmanned aerial vehicles, ballistic-navigation support, trajectory planning, motion trajectory, matrix of coefficients of decomposition of a function into simple fractions.

Inna Batraeva, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Acting Head at the Programming Technology Department. Saratov State University. E-mail: batraevaia@info.sgu.ru
Dmitry Teterin, Doctor of Technical Sciences, First Deputy General Director, «Aviaavtomatika» named after V. Tarasov» Joint-Stock Company. E-mail: tdp@aviaavtomatika.ru