

УДК 621.318.134

**АНАЛИЗ ФИЗИЧЕСКИХ И МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ
НАПРЯЖЕННЫХ МАГНИТОАНИЗОТРОПНЫХ СТРУКТУР**

© 2020 А.Е. Дубинин, А.А. Дубинин, Ф.Р. Ахмадуллин

Самарский государственный университет путей сообщения

Статья поступила в редакцию 29.05.2020

Рассматривается анализ физических и математических моделей напряженных магнитоанизотропных структур (НМАС), в котором физические модели представлены в виде ферромагнитной прямоугольной пластины или четверти кольцевого элемента (ЧЭ) в электромагнитном поле при силовом воздействии. Их математические модели описываются системами дифференциальных уравнений теорий электромагнитного поля, ферромагнетизма и упругости в декартовых, цилиндрических и сферических координатах. Показано, что наиболее полно отражается картина в НМАС в сферических полярных координатах, что подтверждено экспериментально.

Ключевые слова: напряженная магнитоанизотропная структура, физические модели, математические модели.

DOI: 10.37313/1990-5378-2020-22-4-86-91

В настоящее время напряженные магнитоанизотропные структуры (НМАС) находят широкое применение не только в устройствах сбора и обработки информации, но и в качестве многофункциональных устройств (МФУ): преобразователях силы, момента и перемещения; модуляторах, ключах и переключателях; регулируемых линиях задержки; акселерометрах и др. [1-7].

В связи с этим возникает актуальная задача оценки эффективности существующих физических и математических моделей НМАС при разработке различных МФУ.

Принципиальная базовая схема управляемых и управляемых НМАС этих устройств выполнена из двух кольцевых ферромагнитных элементов ЧЭ1 и КЭ3 (чувствительного и компенсационного, рис. 1) по дифференциально-трансформаторной резонансной схеме (обмотки возбуждения 5, 8 соединены последовательно-согласно и к генератору 2, а обмотки измерительные 4, 9 соединены последовательно-встречно и через конденсатор 6 с регистратором 7 и обмотки управления 10).

Математическая реализация такой кольцевой физической модели НМАС в трехмерном

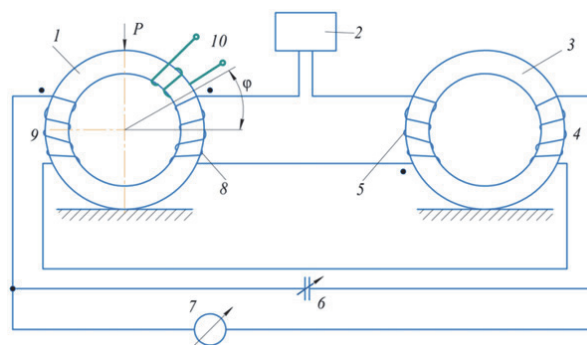


Рис. 1. Принципиальная базовая схема НМАС

пространстве вызывает непреодолимые трудности из-за сложности распределения электромагнитного и силового полей в кольцевом ЧЭ. Для упрощения обобщенной физической модели кольцевого ЧЭ его управляемая и управляемая НМАС была представлена в двумерном пространстве в виде прямоугольной пластины из ферромагнитного материала, равной сечению кольцевого элемента, при силовом воздействии в электромагнитном поле (рис. 2) [1-3].

При этом вводятся следующие допущения [1, 2]:

1. Магнитное поле ЧЭ изменяется по синусоидальному закону;
2. Магнитное поле равномерное и имеет нормальную составляющую магнитной индукции B_z ;
3. Комплексная магнитная проницаемость ЧЭ для заданного цикла перемагничивания постоянна;
4. Плотность токов по толщине пластины не изменяется;
5. Тангенциальные составляющие напряженности электрического поля E_a и E_b на границах пла-

Дубинин Александр Ефимович, доктор технических наук, профессор кафедры автоматки, телемеханики и связи на железнодорожном транспорте. E-mail: ats@samgups.ru

Дубинин Александр Александрович, инженер кафедры автоматки, телемеханики и связи на железнодорожном транспорте. E-mail: ats@samgups.ru

Ахмадуллин Фанис Ринатович, кандидат технических наук, доцент кафедры автоматки, телемеханики и связи на железнодорожном транспорте.

E-mail: fanis83ar@mail.ru

стины постоянны; 6. Поля, идущие в обход пластины, относятся к полям рассеивания; 7. Среда пластины изменяется под действием силы; 8. Механические напряжения в пластине имеют нормальную составляющую σ и действуют в нормальной к пластине плоскости.

При введенных допущениях обобщенная физическая модель неуправляемой НМАС ЧЭ описывается системой дифференциальных уравнений теорий электромагнитного поля, ферромагнетизма и упругости в декартовых координатах [1-3].

$$\begin{cases} \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial y} = \gamma_x \underline{E}_x; & (1) \\ -\frac{\partial \underline{H}_z}{\partial x} = \gamma_y \underline{E}_y; & (2) \\ \frac{\partial \underline{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \underline{E}_x}{\partial y} = j\omega \underline{\mu}_\sigma \underline{H}_z; & (3) \\ \frac{\partial \underline{B}_z}{\partial x} - \frac{1}{\underline{H}_z} \cdot \frac{\partial \underline{B}_z}{\partial x} \cdot \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial x} \cdot \sigma_z = \underline{\mu}_\sigma; & (4) \\ E \frac{dw}{dz} = \frac{dP(t)}{dS} = \sigma_z, & (5) \end{cases}$$

где γ_x и γ_y – удельные электрические проводимости по x и y ; \underline{E}_x , \underline{E}_y , \underline{H}_z – комплексы действующих значений напряженностей электрического и магнитного полей на поверхности пластины по осям x , y , z ; ω – круговая частота поля; w – деформация НМАС; S – площадь сечения пластины; $\underline{\mu}_\sigma = \underline{\mu}_H - \Delta \underline{\mu}$ – магнитная проницаемость под действием σ [1-7]; $\underline{\mu}_H$ – начальная магнитная проницаемость; $\Delta \underline{\mu}$ – изменение магнитной проницаемости.

Граничные условия имеют вид:

$$\underline{H}_z(x, y) = \begin{cases} \underline{H}_z(y) \text{ при } x = \pm a; \\ \underline{H}_a \text{ при } x = \pm a; y = 0; \\ 0 \text{ при } x = \pm b. \end{cases} \quad (6)$$

$$\underline{H}_z(y, x) = \begin{cases} \underline{H}_z(x) \text{ при } y = \pm b; \\ \underline{H}_a \text{ при } x = \pm b; x = 0; \\ 0 \text{ при } x = \pm a. \end{cases} \quad (7)$$

где $l=2a$, $t=2b$ – толщина и ширина пластины; c – длина пластины; σ – нормальные механические напряжения в пластине при действии силы P на поверхности S .

Решение дифференциальных уравнений (1-5) с условиями (6-7) осуществляется в результате анализа магнитного и электрического состояний напряженной магнитоанизотропной структуры (НМАС) ЧЭ с учетом уравнения

(5) закона упругости. В результате определены электрические и магнитные параметры НМАС и характеристики преобразователей [1-3]. Разработана физическая модель управляемых НМАС для магнитоанизотропных ключевых элементов (МКЛ) (рис. 2), выполненных по дифференциально-трансформаторной схеме [1-3].

Обобщенная физическая модель управляемой НМАС также представлена в виде ферромагнитной пластины в электромагнитных полях возбуждения и управления при статическом силовом воздействии (рис. 2) при вышеназванных допущениях [1-3].

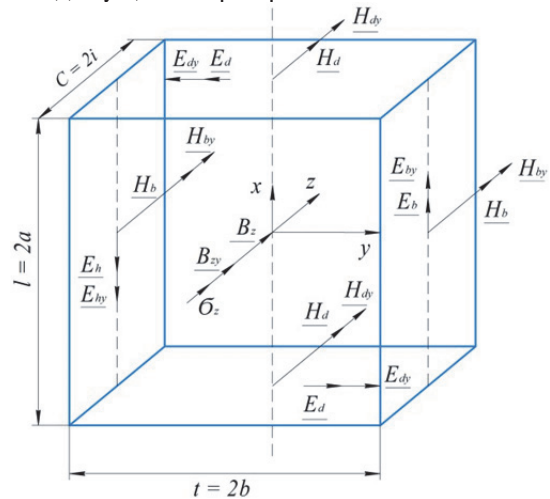


Рис. 2. Обобщенная физическая модель неуправляемой при $\underline{E}_y=0$ и $\underline{H}_y=0$ и управляемой при $\underline{E}_y \neq 0$ и $\underline{H}_y \neq 0$ НМАС

Физическая модель на рис. 2 с учетом принятых допущений в двухмерном пространстве при одновременном воздействии силового поля и полей возбуждения и управления описывается следующими дифференциальными уравнениями в декартовых координатах для МКЛ [3].

$$\frac{\partial(\underline{H}_z + \underline{H}_{zy})}{\partial y} = \gamma_x (\underline{E}_x + \underline{E}_{xy}); \quad (8)$$

$$\frac{\partial(\underline{H}_z + \underline{H}_{zy})}{\partial x} = \gamma_y (\underline{E}_y + \underline{E}_{yy}); \quad (9)$$

$$\frac{\partial(\underline{E}_y + \underline{E}_{yy})}{\partial x} - \frac{\partial(\underline{E}_x + \underline{E}_{xy})}{\partial y} = j(\omega \underline{\mu}_{\sigma z} \underline{H}_z + \omega \underline{\mu}_{\sigma zy} \underline{H}_{zy}); \quad (10)$$

$$\left(\frac{\partial \underline{B}_z}{\partial x} + \frac{\partial \underline{B}_{zy}}{\partial x} \right) - \frac{1}{(\underline{B}_z + \underline{B}_{zy})^2} \cdot \left(\frac{\partial \underline{B}_z}{\partial x} + \frac{\partial \underline{B}_{zy}}{\partial x} \right) \cdot \left(\frac{\partial(\underline{H}_z + \underline{H}_{zy})}{\partial x} \right) \sigma_z = \underline{\mu}_{\sigma z}; \quad (11)$$

$$E \frac{dv}{dz} = \sigma_z,$$

где γ_x и γ_y – электрические проводимости по x и y ; \underline{E}_x , \underline{E}_y , \underline{E}_{xy} , \underline{E}_{yy} – напряженности электрических полей от возбуждения и управления по осям x , y ; \underline{B}_z , \underline{B}_{zy} – магнитные индукции обмоток возбуждения и управления; ω , ω_y – круговые частоты полей возбуждения и управления; σ_z – нормальные механические напряжения в НМАС; $\underline{\mu}_{\sigma z}$ – магнитная проницаемость от механических напряжений σ_z ; E – модуль упругости; v – деформация точки структуры по оси z .

Граничные условия при этом имеют вид:

$$\underline{H}_z(x, y) = \begin{cases} \underline{H}_z(y) & \text{при } x = \pm a; \\ \underline{H}_a & \text{при } x = \pm a; y = 0; \\ 0 & \text{при } x = \pm b. \end{cases}$$

$$\underline{H}_{zy}(x, y) = \begin{cases} \underline{H}_{zy}(y) & \text{при } x = \pm a; \\ \underline{H}_a & \text{при } x = \pm a; y = 0; \\ 0 & \text{при } x = \pm b. \end{cases} \quad (12)$$

$$\underline{H}_z(x, y) = \begin{cases} \underline{H}_z(y) & \text{при } x = \pm b; \\ \underline{H}_b & \text{при } x = \pm b; x = 0; \\ 0 & \text{при } x = \pm a. \end{cases}$$

$$\underline{H}_{zy}(x, y) = \begin{cases} \underline{H}_{zy}(y) & \text{при } x = \pm b; \\ \underline{H}_b & \text{при } x = \pm b; x = 0; \\ 0 & \text{при } x = \pm a. \end{cases} \quad (13)$$

$$\underline{H}_{zy}(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < t_1; \\ \underline{H}_{z \max} & \text{при } t_1 < t < t_2; \\ 0 & \text{при } t > t_2. \end{cases}$$

$$\underline{H}_{zy}(y) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < t_1; \\ \underline{H}_{z \max} & \text{при } t_1 < t < t_2; \\ 0 & \text{при } t > t_2. \end{cases} \quad (14)$$

где a и b – размеры пластины; t – время срабатывания МКЛ; t_1 и t_2 – время включения и выключения МКЛ.

Решение уравнения ферромагнетизма (11) известна в литературе и его решение имеет вид [1-3]:

$$\mu_k - \mu_y = \mu_n - \Delta\mu_\sigma + \Delta\mu_y - \mu_n + \Delta\mu_\sigma = \Delta\mu_y,$$

где μ_y и μ_k – магнитные проницаемости управляемого и компенсационного элементов; $\Delta\mu_\sigma$ – изменение проницаемости.

Решение матмодели (8-11) с условиями (12-14) осуществляется так же как и предыдущей и позволяет определить электрические и магнитные параметры управляемой НМАС и определить выходную характеристику МКЛ [1-3].

Рассмотренные физические и математические модели НМАС устройств контроля не полностью отражают суть процессов, происходящих в НМАС кольцевых ЧЭ, так как рассматриваются в двумерном пространстве.

Поэтому была разработана физическая модель НМАС в виде реальной кольцевой структуры [4-7].

Обобщенная физическая модель неуправляемой и управляемой НМАС ЧЭ сжатия и растяжения представлена на рис. 3 в виде четверти ферромагнитного кольца, сечение которого ориентированно в сферической системе полярных координат таким образом, чтобы вектор нормальных напряжений σ совпадал с направлением магнитного поля \underline{H}_c , а вектор касательных напря-

жений τ был с ним перпендикулярен, где P – сила воздействия на кольцо, направленная по радиусу ЧЭ под прямым углом к полю \underline{H}_c ; $a = r_n - r_b$; r_n и r_b – наружный и внутренний радиусы кольца; a – толщина кольца; b – ширина кольца; r_0 – средний радиус элемента; ϕ – угол между осью симметрии сечения и радиусом r_b ; E_r и E_ϕ – напряженности электрического поля на гранях сечения; B_c – максимальная магнитная индукция внешнего магнитного поля; \underline{H}_c – напряженность магнитного поля перпендикулярная сечению кольца; i – ток в обмотке возбуждения; i_b – вихревой ток; i_y – ток управления; θ – угол между осью симметрии сечения и радиусом r_n по длине кольца в рад.

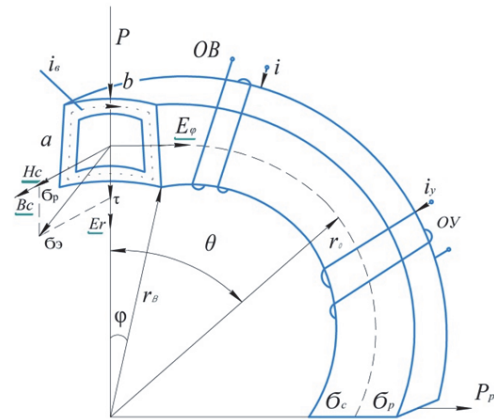


Рис. 3. Физическая модель НМАС обобщенная при $i_y=0$ и $i_y \neq 0$, $\tau=0$ и $\tau \neq 0$

Математическая модель неуправляемой НМАС ферромагнитного ЧЭ описывается уравнениями теории электромагнитного поля, ферромагнетизма и упругости. Решение этой модели в трехмерном пространстве связано с большими трудностями. Поэтому задача также была сведена к двумерной и решена в полярных цилиндрических координатах при принятых выше допущениях [4].

При одновременном воздействии силового поля (без учета касательных напряжений) и электромагнитного поля возбуждения состояние НМАС ЧЭ описывается дифференциальными уравнениями в полярных цилиндрических координатах.

$$\begin{cases} \frac{\partial H_c}{\partial r} = \delta_\phi = \gamma_\phi E_\phi; & (15) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{\partial H_c}{\partial \phi} = \delta_r = \gamma_r E_r; & (16) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial E_r}{\partial r} - \frac{\partial E_\phi}{\partial \phi} = -\frac{\partial B_c}{\partial t} = -j\omega \mu_\sigma \underline{H}_c; & (17) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial B_c}{\partial H_c} - \frac{1}{B^2} \cdot \frac{\partial B_c}{\partial H_c} \cdot \frac{\partial H_c}{\partial \sigma} = \frac{\mu}{\sigma}; & (18) \end{cases}$$

$$\begin{cases} E \frac{dw_r}{dr} = \sigma_r, & (19) \end{cases}$$

где γ_r и γ_ϕ – удельные электрические проводимости по направлениям; \underline{E}_r , \underline{E}_ϕ , \underline{H}_c – комплексы действующих значений напряженностей электрического и магнитного полей по поверхности сечения кольца по переменным r , ϕ и c ; $c = 2\pi r_0 = \text{const}$ – длина кольца; μ_σ – магнитная проницаемость под действием механического напряжения σ ; w_r – перемещение точки структуры по радиусу r ; E – модуль упругости.

Граничные условия при этом имеют вид (рис. 3)

$$\begin{cases} \underline{H}_c(r, \varphi) = \underline{H}_c(r) \text{ при } r = r_0 \pm \frac{a}{2}; \varphi = 0; r_a \leq r \leq r_b; & (20) \\ \underline{H}_c(\varphi, r) = \underline{H}_c(\varphi) \text{ при } -\arcsin \frac{b}{2r_a} \leq \varphi \leq \arcsin \frac{b}{2r_b}. & (21) \end{cases}$$

При малых углах ϕ имеем $b \approx L = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r_0 d\varphi$.

$$\begin{cases} \underline{H}_c(r, \varphi) = 0 \text{ при } \varphi = \pm \arcsin \frac{b}{2r_a}; \\ \underline{H}_c(\varphi, r) = 0 \text{ при } r = r_0 \pm \frac{a}{2}. \end{cases} \quad (22)$$

Совместное решение уравнений теории ферромагнетизма (18) и упругости (19) в литературе позволяет при радиальном сжатии кольца определить магнитную проницаемость НМАС [1, 2]:

$$\mu_\sigma = \mu_H - \Delta\mu = \mu_H - \frac{0,563\lambda_s a_s \mu_H r_0 P}{\pi B^2 a b^2}, \quad (23)$$

где μ_H – начальная магнитная проницаемость; $\Delta\mu$ – изменение магнитной проницаемости от P .

Совместное решение системы уравнений электромагнитного поля (15-17) с условиями (20-22) позволяет определить напряженности магнитного поля \underline{H}_c и электрического поля \underline{E}_r и \underline{E}_ϕ , параметры НМАС и далее преобразователя [1-7].

Рассмотренные физическая и математическая модели, как и предыдущие не отражают полную картину силового поля в ЧЭ, так как задача по существу решена в двухмерной плоскости.

В реальных кольцевых ЧЭ имеет место сложная картина распределения механических напряжений, когда одновременно возникают различного вида напряжения сжатия σ_s , растяжения σ_p и сдвиговые (касательные) напряжения τ , которые не учитываются предыдущими моделями (рис. 3).

Общее выражение для определения нормальных механических напряжений сжатия и растяжения в кольцевом ЧЭ под действием силы нажатия P записывается [1, 2, 5]:

$$\sigma_{HB} = \frac{0,5P}{b\alpha} \left[\pm 3,82 \frac{r_0}{\alpha} \mp \left(6 \frac{r_0}{\alpha} \mp 1 \right) \cos\theta \right], \quad (24)$$

где верхние знаки относятся к наружной поверхности кольцевого ЧЭ, а нижние знаки – к внутренней поверхности ЧЭ.

При $\theta=0$ наружная поверхность ЧЭ сжимается под действием σ_s , а внутренняя растягивается под σ_p (см. рис. 3). При $\theta=\pi/2$ картина меняется на обратную: наружная поверхность растяги-

вается под σ_p , а внутренняя – сжимается под σ_s . Картина распределения напряжений повторяется для каждой четверти кольца.

Используя обобщенную физическую модель ЧЭ на рис. 3, определяются максимальные напряжения сжатия σ_s при $\theta=0$ и растяжения σ_p при $\theta=\pi/2$ согласно выражений (24) и

$$\sigma_s = \frac{1,1 P r_0}{b\alpha^2}; \quad \sigma_p = \frac{1,91 P r_0}{b\alpha^2}. \quad (25)$$

Учитывая 3-ю гипотезу прочности для ЧЭ $\sigma_s = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$ и максимальные касательные напряжения $\tau = (\sigma_p - \sigma_s)/2$ определяются эквивалентные механические напряжения при работе ЧЭ на сжатие и растяжение [5-7]:

$$\begin{aligned} \sigma_{\Sigma c} &= \sqrt{2\sigma_s^2 + \sigma_p^2 - 2\sigma_s\sigma_p}; \\ \sigma_{\Sigma p} &= \sqrt{2\sigma_p^2 + \sigma_s^2 - 2\sigma_p\sigma_s}. \end{aligned} \quad (26)$$

Подстановка выражений (25) в формулы (26) и (23) позволяет получить:

$$\sigma_{\Sigma c} = \frac{1,36 P r_0}{b\alpha^2}; \quad \sigma_{\Sigma p} = \frac{2,1 P r_0}{b\alpha^2}, \quad (27)$$

и определить магнитную проницаемость НМАС [1, 2]:

$$\mu_{\Sigma p} = \mu_H \pm \Delta\mu, \quad (28)$$

где (-) – при сжатии элемента; (+) – при растяжении элемента; μ_H – начальная магнитная проницаемость элементов 1 и 3 (рис. 1); $\Delta\mu$ – изменение магнитной проницаемости.

При принятых выше допущениях и предположениях при одновременном воздействии силового поля сжатия или растяжения и поля возбуждения состояние соответствующего неуравновешенного ферромагнитного ЧЭ описывается дифференциальными уравнениями в сферических полярных координатах [5]:

$$\begin{cases} \frac{\partial \underline{H}_c}{\partial r} = \gamma_\phi \underline{E}_\phi; & (29) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{\partial \underline{H}_c}{\partial \varphi} = \gamma_r \underline{E}_r; & (30) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \underline{E}_r}{\partial r} - \frac{\partial \underline{E}_\phi}{\partial \varphi} = -\frac{\partial B_c}{\partial t} = -j\omega \underline{\mu}_\sigma \underline{H}_c; & (31) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial B_c}{\partial \underline{H}_c} \mp \frac{1}{B^2} \cdot \frac{\partial B_c}{\partial \underline{H}_c} \cdot \left(\frac{\partial \underline{H}_c}{\partial \sigma_p} + \frac{\partial \underline{H}_c}{\partial \sigma_s} + \frac{\partial \underline{H}_c}{\partial \tau} \right) = \underline{\mu}_{\Sigma s}; & (32) \end{cases}$$

$$\begin{cases} E \left(\frac{dw_r}{dr} + \frac{dw_\phi}{d\varphi} + \frac{dw_\theta}{d\theta} \right) = \sigma_s, & (33) \end{cases}$$

где σ_s – соответствующие эквивалентные напряжения кольцевых ЧЭ; γ_r и γ_ϕ – удельные электрические проводимости по направлениям; \underline{E}_r , \underline{E}_ϕ , \underline{H}_c – комплексы действующих значений напряженностей электрического и магнитного полей по поверхности сечения кольца по переменным

r, ϕ и θ ; c – длина кольца; r_0 – средний радиус элемента; ω – круговая частота; μ_{σ_3} – магнитная проницаемость от механического напряжения σ_3 ; w_r, w_ϕ и w_θ – перемещение точек структуры по радиусу r , углам ϕ и θ ; E – модуль упругости; θ – угол в радианах.

Граничные условия при этом имеют вид (рис. 3):

$$\underline{H}_c(r, \varphi) = \underline{H}_c(r) \text{ при } r = r_0 \pm \frac{a}{2}; \varphi = 0; r_b \leq r \leq r_n; \quad (34)$$

$$\underline{H}_c(\varphi, r) = \underline{H}_c(\varphi) \text{ при } -\arcsin \frac{b}{2r_b} \leq \varphi \leq \arcsin \frac{b}{2r_b}; \quad (35)$$

При малых углах ϕ имеем $b \approx L = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r_0 d\varphi$.

$$\begin{cases} \underline{H}_c(r, \varphi) = 0 \text{ при } \varphi = \pm \arcsin \frac{b}{2r_b}; \\ \underline{H}_c(\varphi, r) = 0 \text{ при } r = r_0 \pm \frac{a}{2}. \end{cases} \quad (36)$$

$$c = \int_0^\theta r_0 d\theta = r_0 \theta, 0 \leq \theta \leq 2\pi. \quad (37)$$

Уравнение ферромагнетизма (32) для НМАС решается исходя из энергетических соотношений ферромагнетика и результат его представлен в литературе [1, 2] в виде выражений (23) и (28).

Уравнение теории упругости (33) рассмотрено с учетом 3-ей гипотезы прочности и его решение приведено в виде формул (26) и (27).

Решение уравнений (29-33) с условиями (34-37) позволили определить электрические и магнитные параметры объемной неуправляемой НМАС и далее всего МФУ [5, 6].

На рис. 3 представлена обобщенная физическая модель управляемой НМАС.

При принятых выше допущениях и предположениях при одновременном воздействии силового поля сжатия и электромагнитных полей возбуждения и управления состояние управляемого ферромагнитного ЧЭ1 описывается дифференциальными уравнениями в сферических полярных координатах [7]:

$$\frac{\partial(\underline{H}_c + \underline{H}_{cy})}{\partial r} = \gamma_\varphi (E_\varphi + E_{\varphi y}); \quad (38)$$

$$-\frac{\partial(\underline{H}_c + \underline{H}_{cy})}{\partial \varphi} = \gamma_r (E_r + E_{ry}); \quad (39)$$

$$\frac{\partial(E_r + E_{ry})}{\partial r} - \frac{\partial(E_\varphi + E_{\varphi y})}{\partial \varphi} = -\frac{\partial(\underline{B}_c + \underline{B}_{cy})}{\partial t} = -j\omega(\mu + \mu_y)(H_c + H_{cy}); \quad (40)$$

$$\frac{\partial \underline{B}_{cy}}{\partial H_{cy}} + \frac{\partial \underline{B}_c}{\partial H_c} - \left(\frac{1}{H_c} \cdot \frac{\partial \underline{B}_c}{\partial H_c} \cdot \frac{\partial H_c}{\partial \sigma_{3c}} \right) \sigma_{3c} = (\mu_y + \mu); \quad (41)$$

$$E \left(\frac{dw_r}{dr} + \frac{dw_\varphi}{d\varphi} + \frac{dw_\theta}{d\theta} \right) = \sigma_{3c}. \quad (42)$$

где σ_{3c} – эквивалентные напряжения сжатия кольцевых ЧЭ; γ_r и γ_φ – удельные электрические проводимости по направлениям r и ϕ ; $\underline{E}_r, \underline{E}_\phi, \underline{E}_{ry}$ и $\underline{E}_{\varphi y}$ – комплексы действующих значений напряженностей электрических полей от обмоток возбуждения и управления по направлениям r и ϕ ; $\underline{B}_c, \underline{H}_c, \underline{B}_{cy}$ и \underline{H}_{cy} – комплексы действующих значений магнитных индукций и напряженно-

стей магнитного поля возбуждения и управления по направлению θ ; ω – круговая частота; μ – магнитная проницаемость от эквивалентных механического напряжения сжатия; w_r, w_ϕ и w_θ – перемещение точек структуры по радиусу r и углам ϕ и θ ; r_0 и c – средний радиус и длина кольцевого ЧЭ; μ_y – магнитная проницаемость от обмотки управления.

Граничные условия при этом имеют вид (рис. 3):

$$\underline{H}_c(r, \varphi) + \underline{H}_{cy}(r, \varphi) = \underline{H}_c(r) + \underline{H}_{cy}(r), \quad (43)$$

при $r = r_0 = \frac{a}{2}; \varphi = 0; r_b \leq r \leq r_n;$

$$\underline{H}_c(\varphi, r) + \underline{H}_{cy}(\varphi, r) = \underline{H}_c(\varphi) + \underline{H}_{cy}(\varphi), \quad (44)$$

при $-\arcsin \frac{b}{2r_b} \leq \varphi \leq \arcsin \frac{b}{2r_b};$

При малых углах ϕ имеем $b \approx L = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r_0 d\varphi$.

$$\begin{cases} \underline{H}_c(r, \varphi) + \underline{H}_{cy}(r, \varphi) = 0 \text{ при } \varphi = \pm \arcsin \frac{b}{2r_b}; \\ \underline{H}_c(\varphi, r) + \underline{H}_{cy}(\varphi, r) = 0 \text{ при } r = r_0 \pm \frac{a}{2}. \end{cases} \quad (45)$$

$$c = \int_0^\theta r_0 d\theta = r_0 \theta, 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Для компенсационного ферромагнитного ЧЭ3 в уравнениях (38-42) и граничных условиях (43-45) поле управления равняется нулю (рис. 1).

Уравнение ферромагнетизма (40) для напряженной магнитоанизатропной структуры НМАС управляемого ЧЭ1 и компенсационного ЧЭ3 (рис. 1) решено исходя из энергетических соотношений в литературе и выражение (28) принимает вид [1, 3, 7]:

$$\mu_k - \mu_y = \mu_n - \Delta\mu + \Delta\mu_y - \mu_n + \Delta\mu = \Delta\mu_y, \quad (46)$$

где $\Delta\mu = \frac{1.02 \lambda_s \alpha_s^2 \mu_n^2 r_0 P}{\pi B^2 b a^2}$ – изменение магнит-

ной проницаемости НМАС, созданное эквивалентным механическим напряжением сжатия σ_{3c} усилия P ; λ_s – изотропная магнитострикция материала элементов; α_s – коэффициент намагниченности материала; μ_n – начальная магнитная проницаемость элементов 1 и 3; r_0 – средний радиус элемента; a и b – толщина и ширина элемента; μ_y и μ_k – магнитные проницаемости управляемого 1 и компенсационного 3 элементов (рис. 1).

Уравнение теории упругости (42) рассмотрено с учетом 3-ей гипотезы прочности и его решение представлено в виде формул (25) и (27).

Решение уравнений (38-40) с условиями (43-45) электромагнитного поля с учетом уравнений ферромагнетизма (41) и теории упругости (42) позволили рассчитать электрические и маг-

нитные параметры НМАС и всего МФУ, которые представлены в литературе [7].

Рассмотренные модели НМАС были реализованы на опытных образцах МФУ и широко представлены в литературе [1-7], что позволило дать экспериментальную оценку этим моделям.

Анализ моделей НМАС показал, что все они могут использоваться для расчета МФУ. Однако, наиболее сложной для практического применения является трехмерная модель НМАС в виде ферромагнитной пластины в декартовых координатах, так как она не полно отображает физические процессы в ней. Погрешность таких моделей НМАС достаточно велика и составляет до 25% [1, 2]. Модели НМАС в виде ферромагнитного кольца в полярных цилиндрических координатах в трехмерном пространстве полнее и точнее отображают физические процессы в ЧЭ, но анализ по существу сводится к двумерной модели. Погрешность таких моделей при практической реализации может достигать до 15% [4].

Наиболее полную реальную картину физических явлений в НМАС отображают физическая и математическая модели НМАС в трехмерном пространстве в виде ферромагнитной кольцевой структуры в электромагнитном поле при силовом воздействии в полярных сферических координатах. Точность таких моделей гораздо выше и составляет до 10% [5].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дубинин А.Е. Магнитоанизатропные устройства автоматизированных систем / А.Е. Дубинин, А.Л. Кислицын. Ульяновск : УлГТУ, 2004. – 372с.
2. Дубинин А.Е. Магнитоанизатропные преобразователи силы. М.: Энергоатомиздат, 1991. – 112 с.
3. Дубинин А.Е., Капитуров Р.Е., Дубинин А.А. Исследование магнитоанизатропных ключевых элементов для системы контроля тягового электродвигателя // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. 2010. Т. 12. № 4. – С. 51-58.
4. Дубинин А.Е., Зорина А.В., Дубинин А.А. Математическая модель устройств на базе напряженных магнитоанизатропных структур // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. 2013. Т. 15. № 4. – С. 65-70.
5. Дубинин А.Е., Дубинин А.А. Математическая модель напряженных магнитоанизатропных структур устройства телеметрического контроля тягового электродвигателя // Вестник транспорта Поволжья. – Самара: СамГУПС. 2013. № 1 (37). С. 34-43.
6. Дубинин А.Е., Дубинин А.А., Цаплин Н.Н. Математическая модель напряженной магнитоанизатропной структуры устройства телеметрии силового воздействия // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. 2016. Т. 18. № 4. – С. 139-142.
7. Дубинин А.Е., Пугачев Я.Н., Ахмадуллин Ф.Р. Математическая модель магнитоанизатропных ключевых элементов // Вестник транспорта Поволжья. – Самара: СамГУПС. 2019. № 2(74). С. 60-68.

ANALYSIS OF PHYSICAL AND MATHEMATICAL MODELS OF STRESSED MAGNETOANISOTROPIC STRUCTURES

© 2020 A. E. Dubinin, A. A. Dubinin, F. R. Akhmadullin

Samara State Transport University

The analysis of physical and mathematical models of stressed magnetoanisotropic structures (NMAS) is considered, in which physical models are presented in the form of a ferromagnetic rectangular plate or a quarter of a ring element (SE) in an electromagnetic field under force. Their mathematical models are described by systems of differential equations of theories of electromagnetic fields, ferromagnetism and elasticity in Cartesian, cylindrical and spherical coordinates. It is shown that the picture in NMAS in spherical polar coordinates is most fully reflected, which is confirmed experimentally.

Keywords: intense magnetoanisotropic structure, physical models, mathematical models.

DOI: 10.37313/1990-5378-2020-22-4-86-91

Alexander Dubinin, Doctor of Technics, Professor, Professor of the Department «Automation, Telemechanics and Communication in railway Transport». E-mail: ats@samgups.ru

Alexander Dubinin, Engineer of the Department «Automation, Telemechanics and Communication in Railway Transport». E-mail: ats@samgups.ru

Fanis Akhmadullin, Candidate of Technics, Associate Professor of the Department «Automation, Telemechanics and Communication in Railway Transport».

E-mail: fanis83ar@mail.ru