

## ДЕКОМПОЗИЦИЯ МНОГОТЕМПОВЫХ МОДЕЛЕЙ УПРАВЛЯЕМЫХ И НАБЛЮДАЕМЫХ СИСТЕМ

© 2020 М.М. Семенова

Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики, г. Самара

Статья поступила в редакцию 30.01.2020

В статье излагается метод декомпозиции многотемповой модели управляемой и наблюдаемой системы, линейной по быстрым переменным, основанный на теории интегральных многообразий быстрых и медленных движений. Исследуются управляемость и наблюдаемость системы вблизи начала координат. Приведен пример, иллюстрирующий полученные результаты.

*Ключевые слова:* декомпозиция многотемповых систем, интегральное многообразие, управляемость, наблюдаемость, асимптотические разложения.

### ВВЕДЕНИЕ

В связи с интенсивным развитием авиации, химической промышленности, нелинейной механики и других областей науки и техники возникла потребность в использовании математических моделей высокой размерности, описываемых системами дифференциальных уравнений, которые естественным образом возникают при моделировании и анализе объектов различной природы, способных одновременно совершать быстрые и медленные движения. В теории автоматического управления модели, описываемые системами сингулярно возмущенных уравнений возникают практически всегда. Примерами могут служить гироскопические, электромеханические и другие системы.

Данная работа посвящена изучению свойств управляемости и наблюдаемости сингулярно возмущенной системы. Исследование производится на основе метода декомпозиции математических моделей, отображающих свойства систем. Декомпозиция является одним из основных приемов для изучения сложных систем и состоит в расщеплении исходной задачи на ряд независимых задач меньшей размерности. Декомпозиция сингулярно возмущенных систем подразумевает частотное разделение движений на быстрые и медленные.

*Цель работы:*

- Понижение размерности задачи управляемости и наблюдаемости многотемповой системы, линейной по быстрым переменным так, чтобы модель меньшей размерности с большой степенью точности отражала все свойства исходной системы.

- Получение достаточных условий управляемости и наблюдаемости сингулярно возмущенных систем.

*Семенова Марина Михайловна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики. E-mail: semenova73@bk.ru*

### РАСЩЕПЛЯЮЩЕЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

Рассмотрим модель многотемповой системы вида:

$$\begin{aligned} \prod_{k=0}^i \varepsilon_k \dot{x}_i &= f_i(x_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) + \\ &+ \sum_{j=1}^n A_{ij}(x_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) x_j + B_i(x_0, \varepsilon_1, \dots, \\ &\varepsilon_n) u, i = \overline{0, n}, \\ w &= \phi(x_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) + \sum_{j=1}^n a_{ij}(x_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) x_j, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $x_i \in X_i \subset \mathbb{R}^{n_i}$  – переменные состояния, соответствующие различным темпам движения,  $x_0$  – медленная переменная,  $x_n$  – самая быстрая переменная,  $u \in U \subset \mathbb{R}^r$  – управляющие воздействия,  $w \in V \subset \mathbb{R}^p$  – измеряемая координата,  $f_i \in \mathbb{R}^{n_i}, i = \overline{0, n}, \phi \in \mathbb{R}^p$  – векторные функции,  $A_{ij}, B_i, a_{ij}$  – матричные функции соответствующих размерностей,  $i = \overline{0, n}, j = \overline{1, n}; \varepsilon_l$  – малые положительные параметры,  $\varepsilon_l \in (0, \varepsilon_l^0], l = \overline{1, n}, \varepsilon_0 = 1, t \in \mathbb{R}$ .

Пусть для системы (1) выполняются условия [1]:

1) Собственные значения

$$\lambda_i = \lambda_i(x_0), i = \overline{1, n_n} \text{ матрицы } A_{nn}(x_0, 0, \dots, 0)$$

удовлетворяют неравенству  $\operatorname{Re} \lambda_i \leq -2\beta_1 < 0$ .

2) Собственные значения

$$\lambda_i = \lambda_i(x_0), i = \overline{1, n_{n-1}} \text{ матрицы } A_{n-1, n-1}(x_0, 0, \dots, 0)$$

удовлетворяют неравенству  $\operatorname{Re} \lambda_i \leq -2\beta_2 < 0$ .

...

n) Собственные значения

$$\lambda_i = \lambda_i(x_0), i = \overline{1, n_1} \text{ матрицы } A_{11}(x_0, 0, \dots, 0)$$

удовлетворяют неравенству  $\operatorname{Re} \lambda_i \leq -2\beta_n < 0$ .

n+1) Функции

$$f_i, A_{ij}, i, j = \overline{0, n}, A_{nn}^{-1}(x_0, 0, \dots, 0), \\ A_{n-1, n-1}^{-1}(x_0, 0, \dots, 0), \dots, A_{11}^{-1}(x_0, 0, \dots, 0)$$

имеют достаточное число равномерно непрерывных и ограниченных частных производных по всем переменным при  $\varepsilon_i \in (0, \varepsilon_i^0], t \in \mathbb{R}$ .

Используя метод декомпозиции [2] и асимптотические разложения медленных интегральных многообразий [3], произведем гладкую замену переменных:

$$x_0 = v_0 + \sum_{j=1}^n \prod_{k=1}^j \varepsilon_k H_0^j, x_i = v_i + h_i + \sum_{j=i+1}^n \prod_{k=i+1}^j \varepsilon_k H_i^j, i = \overline{1, n-1}, \quad (2)$$

$$x_n = v_n + h_n,$$

где  $h_n = h_n(x_0, \dots, x_{n-1}, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ ,

$$H_0^1 = H_0^1(v_0, v_1, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n), h_1 = h_1(v_0 + \varepsilon_1 H_0^1, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n), H_i^2 = H_i^2(v_0 + \varepsilon_1 H_0^1, v_1 + h_1, v_2, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n), h_2 = h_2(v_0 + \varepsilon_1 H_0^1 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 H_0^2, v_1 + h_1 + \varepsilon_2 H_1^2, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n), i = \overline{0, 1}; H_i^j = H_i^j(v_0 + \sum_{l=1}^{j-1} \prod_{k=1}^l \varepsilon_k H_0^l, v_1 + h_1 + \sum_{l=2}^{j-1} \prod_{k=2}^l \varepsilon_k H_1^l, \dots, v_{j-1} + h_{j-1}, v_j, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n), j = \overline{3, n}, i = \overline{0, j-1}; h_i = h_i(v_0 + \sum_{l=1}^i \prod_{k=1}^l \varepsilon_k H_0^l, v_1 + h_1 + \sum_{l=2}^i \prod_{k=2}^l \varepsilon_k H_1^l, \dots, v_{i-1} + h_{i-1} + \varepsilon_i \times H_{i-1}^i, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n), i = \overline{3, n-1}.$$

После такой замены получим систему «блочного-треугольного» вида:

$$\dot{v}_0 = f_0(v_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) + A_{01}(v_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)h_1(v_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) + A_{02}(v_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \times h_2(v_0, h_1(v_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n), \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) + \dots + A_{0, n-1}(v_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)h_{n-1}(v_0, h_1(v_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n), h_2(v_0, h_1(v_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n), \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n), \dots, h_{n-2}, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) + A_{0n}(v_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)h_n(v_0, h_1, h_2, \dots, h_{n-1}, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) + \widetilde{B}_0(v_0, \varepsilon_1 H_0^1, \dots, \prod_{k=1}^n \varepsilon_k H_0^n, \varepsilon_1, \dots, \prod_{k=1}^n \varepsilon_k H_0^n, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)u, \quad (3)$$

$$\varepsilon_1 \dot{v}_1 = \widetilde{A}_{11}(v_0, \varepsilon_1 H_0^1, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)v_1 + \widetilde{A}_{1n}(v_0, \varepsilon_1 H_0^1, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)(h_n(v_0 + \varepsilon_1 H_0^1, v_1 + h_1, h_2, \dots, h_{n-1}, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) - h_n(v_0 + \varepsilon_1 H_0^1, h_1, h_2, \dots, h_{n-1}, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)) + \widetilde{B}_1(v_0, \varepsilon_1 H_0^1, \dots, \prod_{k=1}^n \varepsilon_k H_0^n, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)u, \dots \prod_{k=1}^i \varepsilon_k \dot{v}_i = \widetilde{A}_{ii}(v_0, \varepsilon_1 H_0^1, \dots, \prod_{k=1}^i \varepsilon_k H_0^i, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)v_i + \widetilde{A}_{in}(v_0, \varepsilon_1 H_0^1, \dots, \prod_{k=1}^i \varepsilon_k H_0^i, \times H_0^i, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)(h_n(v_0 + \sum_{j=1}^i \prod_{k=1}^j \varepsilon_k H_0^j, v_1 + h_1 + \sum_{j=2}^i \prod_{k=2}^j \varepsilon_k H_1^j, \dots, v_i + h_i, h_{i+1}, \dots, h_{n-1}, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) - h_n(v_0 + \sum_{j=1}^i \prod_{k=1}^j \varepsilon_k H_0^j, \times H_0^j, v_1 + h_1 + \sum_{j=2}^i \prod_{k=2}^j \varepsilon_k H_1^j, \dots, h_i,$$

$$h_{i+1}, \dots, h_{n-1}, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)) + \widetilde{B}_i(v_0, \varepsilon_1 H_0^1, \dots, \prod_{k=1}^n \varepsilon_k H_0^n, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)u,$$

...

$$\prod_{k=1}^n \varepsilon_k \dot{v}_n = \widetilde{A}_{nn}(v_0, \varepsilon_1 H_0^1, \dots, \prod_{k=1}^n \varepsilon_k H_0^n, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)v_n + \widetilde{B}_n(v_0, \varepsilon_1 H_0^1, \dots, \prod_{k=1}^n \varepsilon_k H_0^n, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)u,$$

$$w = \phi_1(v_0, v_1, \dots, v_n, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n).$$

Здесь

$$\widetilde{A}_{11}(v_0 + \varepsilon_1 H_0^1, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = A_{11}(v_0 + \varepsilon_1 H_0^1, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) - \varepsilon_1 \frac{\partial h_1}{\partial y_0^{(1)}} A_{01}(v_0 + \varepsilon_1 H_0^1, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n), y_0^{(1)} = v_0 + \varepsilon_1 H_0^1; \widetilde{A}_{ii}(v_0 + \sum_{j=1}^i \prod_{k=1}^j \varepsilon_k H_0^j, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = A_{ii}(v_0 + \sum_{j=1}^i \prod_{k=1}^j \varepsilon_k H_0^j, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) - \sum_{l=0}^{i-1} \prod_{k=l+1}^i \varepsilon_k \frac{\partial h_i}{\partial y_l^{(i)}} A_{li}(v_0 + \sum_{j=1}^i \prod_{k=1}^j \varepsilon_k \times H_0^j, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n), i = \overline{2, n-1}, y_0^{(m)} = v_0 + \sum_{j=1}^m \prod_{k=1}^j \varepsilon_k H_0^j, m = \overline{1, n-1}, y_1^{(p)} = v_1 + h_1(v_0 + \varepsilon_1 H_0^1, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) + \sum_{j=2}^p \prod_{k=2}^j \varepsilon_k H_1^j, p = \overline{2, n-1}, y_{q-1}^{(q)} = v_{q-1} + h_{q-1} + \varepsilon_q H_{q-1}^q, q = \overline{2, n}; \widetilde{B}_n(v_0, \varepsilon_1 H_0^1, \dots, \prod_{k=1}^n \varepsilon_k H_0^n, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = B_n(v_0 + \sum_{j=1}^n \prod_{k=1}^j \varepsilon_k H_0^j, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) - \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{k=l+1}^n \varepsilon_k \frac{\partial h_n}{\partial x_l} B_l(v_0 + \sum_{j=1}^n \prod_{k=1}^j \varepsilon_k \times H_0^j, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n), \widetilde{B}_i(v_0, \varepsilon_1 H_0^1, \dots, \prod_{k=1}^n \varepsilon_k \times H_0^n, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = B_i(v_0 + \sum_{j=1}^n \prod_{k=1}^j \varepsilon_k \cdot H_0^j, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) - \frac{\partial H_i^n}{\partial v_n} \widetilde{B}_n(v_0 + \sum_{j=1}^n \prod_{k=1}^j \varepsilon_k \times H_0^j, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n), i = \overline{0, n-1}; \phi_1 = \phi(v_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) + \sum_{k=1}^n a_{ik}(v_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)(v_k + h_k + \sum_{i=k+1}^n \prod_{p=k+1}^i \varepsilon_p H_k^i, k = \overline{1, n-1}.$$

Функции  $h_i, H_i^j$  можно искать как асимптотические разложения:

$$h_1(y_0^{(1)}, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = \sum_{k \geq 0} \varepsilon_1^k h_{1k}(y_0^{(1)}, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n); h_i(y_0^{(i)}, \dots, y_{i-1}^{(i)}, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = \sum_{k \geq 0} \varepsilon_i^k h_{ik}(y_0^{(i)}, \dots, y_{i-1}^{(i)}, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{i-1}, \varepsilon_{i+1}, \dots, \varepsilon_n); H_0^1(v_0, v_1, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = \sum_{k \geq 0} \varepsilon_1^k H_{0k}^1(v_0, v_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n); H_i^j(y_0^{(j)},$$

$$\begin{aligned} \dots, y_{j-1}^{(j)}, v_j, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) &= \sum_{k \geq 0} \varepsilon_j^k H_{ik}^j(y_0^{(j)}, \\ \dots, y_{j-1}^{(j)}, v_j, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{j-1}, \varepsilon_{j+1}, \dots, \varepsilon_n), \\ i &= \overline{0, j-1}, \end{aligned}$$

из соответствующих уравнений:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 \frac{\partial h_1}{\partial y_0^{(1)}} (f_0(v_0 + \varepsilon_1 H_0^1, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) + \\ \sum_{j=1}^{n-1} A_{0j} (v_0 + \varepsilon_1 H_0^1, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) h_j(v_0 + \\ \sum_{l=1}^j \prod_{k=1}^l \varepsilon_k H_0^l, v_1 + h_1 + \sum_{l=2}^j \prod_{k=2}^l \varepsilon_k \\ \times H_1^l, \dots, v_{j-1} + h_{j-1} + \varepsilon_{j-1} H_{j-1}^j, \varepsilon_1, \dots, \\ \varepsilon_n) + A_{0n} (v_0 + \varepsilon_1 H_0^1, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) h_n(v_0 + \\ \varepsilon_1 H_0^1, h_1, h_2, \dots, h_{n-1}, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = f_1(v_0 + \\ \varepsilon_1 H_0^1, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) + \sum_{j=1}^{n-1} A_{1j} (v_0 + \varepsilon_1 H_0^1, \\ \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) h_j(v_0 + \sum_{l=1}^j \prod_{k=1}^l \varepsilon_k H_0^l, v_1 + \\ h_1 + \sum_{l=2}^j \prod_{k=2}^l \varepsilon_k H_1^l, \dots, v_{j-1} + h_{j-1} + \\ \varepsilon_{j-1} H_{j-1}^j, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) + A_{1n} (v_0 + \varepsilon_1 H_0^1, \varepsilon_1, \\ \dots, \varepsilon_n) h_n(v_0 + \varepsilon_1 H_0^1, h_1, h_2, \dots, h_{n-1}, \varepsilon_1, \\ \dots, \varepsilon_n); \\ \sum_{l=0}^{i-1} \prod_{k=l+1}^i \varepsilon_k \frac{\partial h_i}{\partial y_l^{(i)}} [f_i(v_0 + \sum_{j=1}^i \prod_{k=1}^j \varepsilon_k \\ \times H_0^j, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) + \sum_{j=1}^{n-1} A_{lj} (v_0 + \\ \sum_{k=1}^j \prod_{k=1}^j \varepsilon_k H_0^j, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) h_j(v_0 + \\ \sum_{l=1}^j \prod_{k=1}^l \varepsilon_k H_0^l, v_1 + h_1 + \sum_{l=2}^j \prod_{k=2}^l \varepsilon_k \\ \times H_1^l, \dots, v_{j-1} + h_{j-1} + \varepsilon_{j-1} H_{j-1}^j, \varepsilon_1, \dots, \\ \varepsilon_n) + A_{ln} (v_0 + \sum_{j=1}^i \prod_{k=1}^j \varepsilon_k H_0^j, \varepsilon_1, \dots, \\ \varepsilon_n) h_n(v_0 + \sum_{j=1}^i \prod_{k=1}^j \varepsilon_k H_0^j, v_1 + h_1 + \\ \sum_{l=2}^j \prod_{k=2}^l \varepsilon_k H_1^l, \dots, v_{j-1} + h_{j-1} + \varepsilon_{j-1} \\ \times H_{j-1}^j, h_j, \dots, h_{n-1}, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)] = f_i(v_0 + \\ \sum_{j=1}^i \prod_{k=1}^j \varepsilon_k H_0^j, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) + \\ \sum_{j=1}^{n-1} A_{ij} (v_0 + \sum_{k=1}^j \prod_{k=1}^j \varepsilon_k H_0^j, \varepsilon_1, \dots, \\ \varepsilon_n) h_j(v_0 + \sum_{l=1}^j \prod_{k=1}^l \varepsilon_k H_0^l, v_1 + h_1 + \\ \sum_{l=2}^j \prod_{k=2}^l \varepsilon_k H_1^l, \dots, v_{j-1} + h_{j-1} + \varepsilon_{j-1} \\ \times H_{j-1}^j, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) + A_{in} (v_0 + \\ \sum_{j=1}^i \prod_{k=1}^j \varepsilon_k H_0^j, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) h_n(v_0 + \\ \sum_{j=1}^i \prod_{k=1}^j \varepsilon_k H_0^j, v_1 + h_1 + \sum_{l=2}^j \prod_{k=2}^l \varepsilon_k \\ \times H_1^l, \dots, v_{j-1} + h_{j-1} + \varepsilon_{j-1} H_{j-1}^j, h_j, \dots, \\ h_{n-1}, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n), i = \overline{2, n-1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 \frac{\partial H_0^1}{\partial v_0} [f_0(v_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) + A_{01} (v_0, \varepsilon_1, \dots, \\ \varepsilon_n) h_1(v_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) + A_{02} (v_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \\ \times h_2(v_0, h_1(v_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n), \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) + \dots \\ + A_{0, n-1} (v_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) h_{n-1} (v_0, h_1(v_0, \varepsilon_1, \\ \dots, \varepsilon_n) h_2(v_0, h_1, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n), \dots, h_{n-2}, \varepsilon_1, \dots, \\ \varepsilon_n) + A_{0n} (v_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) h_n(v_0, h_1, h_2, \dots, \\ h_{n-1}, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)] + \frac{\partial H_0^1}{\partial v_1} [\widetilde{A}_{11} (v_0 + \varepsilon_1 H_0^1, \\ \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) v_1 + \widetilde{A}_{1n} (v_0 + \varepsilon_1 H_0^1, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \\ \times \{h_n(v_0 + \varepsilon_1 H_0^1, v_1 + h_1(v_0 + \varepsilon_1 H_0^1, \varepsilon_1, \\ \dots, \varepsilon_n) h_2(v_0 + \varepsilon_1 H_0^1 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 H_0^2, v_1 + h_1 \\ + \varepsilon_2 H_1^2, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n), \dots, h_{n-1}(v_0 + \\ \sum_{j=1}^{n-1} \prod_{k=1}^j \varepsilon_k H_0^j, v_1 + h_1 + \sum_{j=1}^{n-1} \prod_{k=1}^j \varepsilon_k \\ \times H_1^j, \dots, v_{n-2} + h_{n-2} + \varepsilon_{n-1} H_{n-2}^{n-1}, \varepsilon_1, \dots, \\ \varepsilon_n), \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) - h_n(v_0 + \varepsilon_1 H_0^1, h_1(v_0 + \\ \varepsilon_1 H_0^1, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) h_2(v_0 + \varepsilon_1 H_0^1 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 H_0^2, \\ v_1 + h_1 + \varepsilon_2 H_1^2, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n), \dots, h_{n-1}(v_0 + \\ \sum_{j=1}^{n-1} \prod_{k=1}^j \varepsilon_k H_0^j, v_1 + h_1 + \sum_{j=2}^{n-1} \prod_{k=2}^j \varepsilon_k \\ \times H_1^j, \dots, v_{n-2} + h_{n-2} + \varepsilon_{n-1} H_{n-2}^{n-1}, \varepsilon_1, \dots, \\ \varepsilon_n), \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)\} = f_0(v_0 + \varepsilon_1 H_0^1, \varepsilon_1, \dots, \\ \varepsilon_n) - f_0(v_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) + \sum_{j=1}^n [A_{0j} (v_0 + \\ \varepsilon_1 H_0^1, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) - A_{0j} (v_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)] \\ \times h_j(v_0 + \sum_{l=1}^j \prod_{k=1}^l \varepsilon_k H_0^l, v_1 + h_1 + \\ \sum_{l=2}^j \prod_{k=2}^l \varepsilon_k H_1^l, \dots, v_{j-1} + h_{j-1} + \varepsilon_{j-1} \\ \times H_{j-1}^j, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n), \\ \dots \\ \sum_{m=0}^{j-1} \prod_{k=m+1}^j \varepsilon_k \frac{\partial H_1^j}{\partial y_m^{(j)}} [f_m(v_0 + \\ \sum_{l=1}^{j-1} \prod_{k=1}^l \varepsilon_k H_0^l, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) + \\ \sum_{p=1}^n A_{mp} (v_0 + \sum_{l=1}^{j-1} \prod_{k=1}^l \varepsilon_k H_0^l, \varepsilon_1, \dots, \\ \varepsilon_n) h_p(v_0 + \sum_{l=1}^{j-1} \prod_{k=1}^l \varepsilon_k H_0^l, v_1 + h_1 + \\ \sum_{l=2}^j \prod_{k=2}^l \varepsilon_k H_1^l, \dots, v_{p-1} + h_{p-1} + \varepsilon_{p-1} \\ \times H_{p-1}^p, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)] + \frac{\partial H_1^j}{\partial v_j} \{\widetilde{A}_{jj} (v_0 + \\ \sum_{l=1}^j \prod_{k=1}^l \varepsilon_k H_0^l, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) v_j + \widetilde{A}_{jn} (v_0 + \\ \sum_{l=1}^j \prod_{k=1}^l \varepsilon_k H_0^l, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \widetilde{A}_{jn} (v_0 + \\ \sum_{l=1}^j \prod_{k=1}^l \varepsilon_k H_0^l, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) [h_n(v_0 + \\ \sum_{l=1}^j \prod_{k=1}^l \varepsilon_k H_0^l, v_1 + h_1 + \sum_{l=2}^j \prod_{k=2}^l \varepsilon_k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times H_1^l, \dots, v_i + h_i, h_{i+1}, \dots, h_{n-1}, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \\ & - h_n(v_0 + \sum_{l=1}^j \prod_{k=1}^l \varepsilon_k H_0^l, v_1 + h_1 + \\ & \sum_{l=2}^j \prod_{k=2}^l \varepsilon_k H_1^l, \dots, h_i, h_{i+1}, \dots, h_{n-1}, \varepsilon_1, \\ & \dots, \varepsilon_n)) = f_i(v_0 + \sum_{l=1}^j \prod_{k=1}^l \varepsilon_k H_0^l, \varepsilon_1, \\ & \dots, \varepsilon_n) - f_i(v_0 + \sum_{l=1}^{j-1} \prod_{k=1}^l \varepsilon_k H_0^l, \varepsilon_1, \dots, \\ & \varepsilon_n) + \sum_{p=1}^n [A_{ip}(v_0 + \sum_{l=1}^j \prod_{k=1}^l \varepsilon_k H_0^l, \varepsilon_1, \\ & \dots, \varepsilon_n) h_p(v_0 + \sum_{l=1}^j \prod_{k=1}^l \varepsilon_k H_0^l, v_1 + h_1 \\ & + \sum_{l=2}^j \prod_{k=2}^l \varepsilon_k H_1^l, \dots, v_{p-1} + h_{p-1} + \varepsilon_{p-1} \\ & \times H_{p-1}^p, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) - A_{ip}(v_0 + \\ & \sum_{l=1}^{j-1} \prod_{k=1}^l \varepsilon_k H_0^l, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) h_p(v_0 + \\ & \sum_{l=1}^j \prod_{k=1}^l \varepsilon_k H_0^l, v_1 + h_1 + \sum_{l=2}^j \prod_{k=2}^l \varepsilon_k \\ & \times H_1^l, \dots, v_{p-1} + h_{p-1}, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)], \\ & i = \overline{0, j-1}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \dots \\ & \sum_{m=0}^{n-1} \prod_{k=m+1}^n \varepsilon_k \frac{\partial H_m^n}{\partial y_m} [f_m(v_0 + \\ & \sum_{l=1}^{n-1} \prod_{k=1}^l \varepsilon_k H_0^l, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) + \\ & \sum_{p=1}^n A_{mp}(v_0 + \sum_{l=1}^{n-1} \prod_{k=1}^l \varepsilon_k H_0^l, \varepsilon_1, \dots, \\ & \varepsilon_n) h_n(v_0 + \sum_{l=1}^{n-1} \prod_{k=1}^l \varepsilon_k H_0^l, v_1 + h_1 + \\ & \sum_{l=2}^{n-1} \prod_{k=2}^l \varepsilon_k H_1^l, \dots, v_{n-1} + h_{n-1}, \varepsilon_1, \dots, \\ & \varepsilon_n)] + \frac{\partial H_n^n}{\partial v_n} \widetilde{A}_{nn}(v_0 + \sum_{l=1}^n \prod_{k=1}^l \varepsilon_k H_0^l, \varepsilon_1, \\ & \dots, \varepsilon_n) v_n = f_i(v_0 + \sum_{l=1}^n \prod_{k=1}^l \varepsilon_k H_0^l, \varepsilon_1, \\ & \dots, \varepsilon_n) - f_i(v_0 + \sum_{l=1}^{n-1} \prod_{k=1}^l \varepsilon_k H_0^l, \varepsilon_1, \dots, \\ & \varepsilon_n) + \sum_{p=1}^n [A_{ip}(v_0 + \sum_{l=1}^n \prod_{k=1}^l \varepsilon_k H_0^l, \\ & \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) h_p(v_0 + \sum_{l=1}^n \prod_{k=1}^l \varepsilon_k H_0^l, v_1 + \\ & h_1 + \sum_{l=2}^n \prod_{k=2}^l \varepsilon_k H_1^l, \dots, v_{p-1} + h_{p-1} + \\ & \varepsilon_{p-1} H_{p-1}^p, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) - A_{ip}(v_0 + \\ & \sum_{l=1}^{n-1} \prod_{k=1}^l \varepsilon_k H_0^l, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) h_p(v_0 + \\ & \sum_{l=1}^n \prod_{k=1}^l \varepsilon_k H_0^l, v_1 + h_1 + \sum_{l=2}^n \prod_{k=2}^l \varepsilon_k \\ & \times H_1^l, \dots, v_{p-1} + h_{p-1}, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)], \\ & i = \overline{0, n-1}. \end{aligned}$$

## УПРАВЛЯЕМОСТЬ И НАБЛЮДАЕМОСТЬ

Исследуем управляемость и наблюдаемость [4] блочно-треугольной системы (3). Линеаризуем систему (3), т.е. приведем ее к виду  $\dot{v} = Lv + Bu, w = Cv$ . Элементы матриц

$$\begin{aligned} L &= (l_{ij})|_{v_k=0, k=\overline{0, n}, u=0}, \\ B &= (b_i)|_{v_k=0, k=\overline{0, n}, u=0}, i, j = \overline{1, n}, \end{aligned}$$

$$C = (c_{ij})|_{v_k=0, k=\overline{0, n}, l = \overline{1, p}, j = \overline{1, n}}$$

есть частные производные по переменным  $v_j$  правых частей уравнений системы (3). Используя критерий Калмана получим, что если линеаризованная система для (3) является вполне управляемой и вполне наблюдаемой, то блочно-треугольная система (3) является локально вполне управляемой и локально вполне наблюдаемой вблизи начала координат. Так как система (3) получена из системы (1) с помощью обратимой замены переменных, то исходная система (1) локально вполне управляема и локально вполне наблюдаема вблизи начала координат.

**Пример.** В качестве простого примера рассмотрим модель системы математических маятников, подвешенных к несущему телу  $P$ , перемещающемуся горизонтально с ускорением  $u$  [5]:

$$\begin{aligned} \varepsilon \ddot{x}_i + a_i \dot{x}_i + c_i \sin x_i &= b_i u, \quad i = \overline{1, n}, \\ p &= \sum_{i=1}^n d_i x_i, \end{aligned}$$

где  $a_i, b_i, c_i, d_i$  – коэффициенты, отличные от нуля,  $x_i$  – угол отклонения маятника от вертикали,  $u$  – скалярное управление, переводящее систему из начального положения в начало координат за минимальное время,  $|u| \leq 1$ .

Перепишем эту систему в виде

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= y_i, \\ \varepsilon \dot{y}_i &= -c_i \sin x_i - a_i y_i + b_i u, \quad i = \overline{1, n}, \\ p &= \sum_{i=1}^n d_i x_i. \end{aligned}$$

С помощью замены переменной

$$\begin{aligned} y_i &= z_i - \frac{c_i}{a_i} \sin x_i - \varepsilon \frac{c_i^2}{2a_i^3} \sin 2x_i - \varepsilon^2 \\ & \times \frac{c_i^3}{A_i^3} (3 \cos^2 x_i - 1) \sin x_i + O(\varepsilon^3), \\ x_i &= v_i - \varepsilon \frac{z_i}{a_i} - 2\varepsilon^2 \frac{c_i}{a_i^3} z_i \cos v_i + O(\varepsilon^3), \end{aligned}$$

$i = \overline{1, n}$ , получим систему блочно-треугольного вида

$$\begin{aligned} \dot{v}_i &= -\frac{c_i}{a_i} \sin v_i - \varepsilon \frac{c_i^2}{2a_i^3} \sin 2v_i - \varepsilon^2 \frac{c_i^3}{a_i^3} \\ & \times (3 \cos^2 v_i - 1) \sin v_i - (\frac{b_i}{a_i} + 2\varepsilon \frac{b_i c_i}{a_i^3} \\ & \times \cos v_i) u + O(\varepsilon^3), \quad i = \overline{1, n}; \\ \varepsilon \dot{z}_j &= (-a_j + \varepsilon \frac{c_j}{a_j} \cos v_j + \varepsilon^2 \frac{c_j^2}{a_j^3} \cos 2v_j) \\ & \times z_j + b_j u + O(\varepsilon^3), \quad j = \overline{1, n}; \\ p &= \sum_{k=1}^n d_k (v_k - \varepsilon \frac{z_k}{a_k} (1 - \varepsilon \frac{2c_k}{a_k^3} \cos v_k)) \\ & + O(\varepsilon^3). \end{aligned}$$

Система нулевого приближения

$$\begin{aligned} \dot{v}_i &= -\frac{c_i}{a_i} \sin v_i - \frac{b_i}{a_i} u, \quad i = \overline{1, n}; \\ \varepsilon \dot{z}_j &= -a_j z_j + b_j u, \quad j = \overline{1, n}; \end{aligned}$$

локально вполне управляема вблизи начала координат, значит, блочно-треугольная система локально вполне управляема вблизи начала координат. Система первого приближения

$$\begin{aligned}\dot{v}_i &= -\frac{c_i}{a_i} \sin v_i - \frac{\varepsilon c_i^2}{2a_i^3} \sin 2v_i - \left(\frac{b_i}{a_i} + \varepsilon \frac{2c_i}{a_i^3}\right) \\ &\times b_i \cos v_i) u, i = \overline{1, n}; \\ \varepsilon \dot{z}_j &= (-a_j + \varepsilon \frac{c_j}{a_j} \cos v_j) z_j + b_j u, \\ j &= \overline{1, n}; p = \sum_{k=1}^n d_k \left(v_k - \varepsilon \frac{z_k}{a_k}\right),\end{aligned}$$

локально вполне наблюдаема вблизи начала координат, значит блочно-треугольная система локально вполне наблюдаема вблизи начала координат. Так как блочно-треугольная система получена из данной системы с помощью обратимой замены переменных, то исходная система локально вполне управляема и локально вполне наблюдаема вблизи начала координат.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Получены достаточные условия управляемости и наблюдаемости многотемповых систем,

линейных по быстрым переменным. Приведен пример системы математических маятников, иллюстрирующий полученные результаты.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Семенова М.М. Декомпозиция многотемповых моделей управляемых систем // Вестник Самарского государственного университета. 2002. Т. 4. № 26. С. 13–22.
2. Воропаева Н.В., Соболев В.А. Конструктивный метод расщепления нелинейных сингулярно возмущенных дифференциальных систем // Дифференциальные уравнения. Т. 31. 1995. №4. С. 569–578.
3. Стрыгин В.В., Соболев В.А. Разделение движений методом интегральных многообразий. М.: Наука, 1988. 256 с.
4. Семенова М.М. Управляемость и наблюдаемость многотемповых систем // В кн.: Воропаева Н.В., Соболев В.А. Геометрическая декомпозиция сингулярно возмущенных систем. М.: Физматлит. 2009. 256 с. С. 153 – 172.
5. Богаевский В.Н., Повзнер А.Я. Алгебраические методы в нелинейной теории возмущений. М.: Наука. 1987. 256 с.

### DECOMPOSITION OF MULTIRATE MODELS OF CONTROLLABLE AND OBSERVABLE SYSTEMS

© 2020 M.M. Semenova

Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics, Samara

A method of integral manifold is applied to study of multitempo linear on fast variables systems. The use of this method permits us to solve a problem of decomposition of multirate controllable and observable systems. Local controllability and local observability of these systems is investigated. The application of the method is illustrated on example.

**Keywords:** the decomposition of multirate models, integral manifold, controllability, observability, asymptotic expansions.