*УДК 517.9 : 62-50*

# ДИССИПАТИВНОСТЬ МНОГОТЕМПОВЫХ СИСТЕМ

© 2020 М.М. Семенова

Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики, г. Самара

Статья поступила в редакцию 30.01.2020

В статье излагается метод определения функции запаса. Исследуется диссипативность многотемповых систем. Приведен пример, иллюстрирующий полученные результаты.

*Ключевые слова:* линейная многотемповая система, функция запаса, диссипативная система относительно функции расхода.

## ВВЕДЕНИЕ

Теория сингулярно возмущенных систем дифференциальных уравнений интенсивно развивается и методы ее активно применяются для решения задач из различных областей естествознания и техники. Это объясняется широким спектром приложений таких систем: гидродинамика, электроэнергетика, радиотехника, динамика полета и др. Сингулярно возмущенные системы могут быть получены естественным путем не только при моделировании, но и при исследовании объектов, которые совершают одновременно медленные и быстрые движения. Движение систем твердых тел представляет собой сложную композицию быстрых и медленных движений.

Данная работа посвящена исследованию диссипативности многотемповых систем относительно функции расхода. Цель работы – найти функцию запаса линейной многотемповой системы.

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим модель линейной многотемповой системы вида:

$$\prod_{k=0}^{i} \varepsilon_k \dot{x}_i = \sum_{j=0}^{n} A_{ij} x_j + B_i u, i = \overline{0,n};$$

$$y = \sum_{j=0}^{n} C_j x_{j,} \qquad (1)$$

где $t \in \mathbb{R}, x_i \in \mathbb{R}^{n_i}, u \in \mathbb{R}^r, y \in \mathbb{R}^p, A_{ij}, B_i, C_j, i,j = \overline{0,n}$ – постоянные матрицы соответствующих размерностей, $\varepsilon_i, i = \overline{1,n}$ – малые положительные параметры, $\varepsilon_0 = 1$; и функция расхода $w(u,y) = y'Qy + 2y'Su + u'Ru$, где $Q,S,R$ – постоянные матрицы, причем $Q,R$ – симметрические, штрих означает транспонирование.

*Семенова Марина Михайловна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики. E-mail: semenova73@bk.ru*

*Определение 1.* Вещественно-значимая функция $w: \mathbb{R}^{n_0+n_1+\dots+n_n} \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ такая, что для любого $t \geq 0$, любого начального состояния $x(0) = x^0$ и любого допустимого управления $u(\cdot)$ выполняется $\int_0^t \left| w\left(\Phi(x^0,s,u), u(s), y(s)\right)\right| ds < +\infty$, называется функцией расхода системы (1).

*Определение 2.* Система (1) называется диссипативной относительно функции расхода $w$, если существует функция $V: \mathbb{R}^{n_0+n_1+\dots+n_n} \to \mathbb{R}^+, V \in C^0$ такая, что для любых $x(0) = x^0$, для любых допустимых управлений $u(\cdot)$ и для любого $t \geq 0$ выполняется неравенство $V(x^1) \leq V(x^0) + \int_0^t w(x(s),u(s),y(s))ds$, где $x^1 = \Phi(x^0,t,u)$. Функция $V$ называется функцией запаса системы (1), а неравенство называется неравенством диссипации.

Пусть для системы (1) выполняются предположения, аналогичные условиям $A_1 - A_4$, приведенные в работе [1]:

Для любого $x(t_0) = x^0$ и любого допустимого $u(\cdot)$ существует единственное решение системы (1). Это решение определено на $[t_0, +\infty)$ и таково, что $y(\cdot)$ – локально-интегрируемая с квадратом функция.

Система (1) глобально достижима из начала координат. Это означает, что для любых $x^1 \in \mathbb{R}^{n_0+n_1+\dots+n_n}, t_1$ существуют $t_0 \leq t_1$ и такие, что $\Phi(x(0), t_1 - t_0, u) = x^1$.

Введем функцию доступного запаса $V_a(x_0) = -inf_{u,T>0} \int_0^T w(u,y)dt$, которая предполагается дифференцируемой по $x$.

Функция расхода $w$ удовлетворяет условию: для любого $y \neq 0$ найдется $u$ такое, что $w(u,y) < 0$.

Собственные значения $\lambda_i, i = \overline{1,n}$ матрицы $A_{nn}$ удовлетворяют неравенству $Re\, \lambda_i(A_{nn}) \leq -2\beta < 0$.

## ПАССИВНОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Для построения функции запаса $\varphi(x) = x'Px, x = (x_0 \quad x_1 \quad \dots \quad x_n)'$ запишем необходимые и достаточные условия диссипативности [2] системы (1) относительно функции расхода $w$:

$$\sum_{l=0}^{n-1} \prod_{k=l+1}^{n} \varepsilon_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_l} \sum_{j=0}^{n} A_{lj} x_j + \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}$$
$$\times \sum_{j=0}^{n} A_{nj} x_j = \prod_{k=0}^{n} \varepsilon_k \left[\left(\sum_{l=0}^{n} x'_l C'_l\right) Q\right.$$
$$\left.\times \left(\sum_{j=0}^{n} C_j x_j\right) - x'F'Fx\right],$$
$$\frac{1}{2}\left[\sum_{l=0}^{n-1} \sum_{k=l+1}^{n} \varepsilon_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_l} B_l + \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} B_n\right] =$$
$$\prod_{k=1}^{n} \varepsilon_k \left[\sum_{l=0}^{n} x'_l C'_l S + x'F'W\right],$$
$$R = W'W.$$

При $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dots = \varepsilon_n = 0$, получим систему

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \sum_{j=0}^{n} A_{nj} x_j = 0, \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} B_n = 0,$$
$$R = W'W.$$

Матрицу $P$ будем искать в виде $P =$

$$\begin{pmatrix} P_{11} & \varepsilon_1 P_{12} & \dots & \prod_{k=1}^{n} \varepsilon_k P_{1,n+1} \\ \varepsilon_1 P'_{12} & \varepsilon_1 P_{22} & \dots & \prod_{k=1}^{n} \varepsilon_k P_{2,n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \prod_{k=1}^{n} \varepsilon_k P'_{1,n+1} & \prod_{k=1}^{n} \varepsilon_k P'_{2,n+1} & \dots & \prod_{k=1}^{n} \varepsilon_k P_{n+1,n+1} \end{pmatrix},$$

где $P_{ij} = P_{ij}^{0,0,\dots,0} + \varepsilon_1 P_{ij}^{0,1,\dots,0} + \cdots$

$$+\varepsilon_n P_{ij}^{0,0,\dots,1} + \varepsilon_1 \varepsilon_2 P_{ij}^{1,1,\dots,0} + \cdots, i, j = \overline{1, n+1}.$$

Полагая, что матрица $W$ – квадратная невырожденная матрица, из второго уравнения, получим $F' = (PB - C'S)W^{-1}$, обозначим $K = W^{-1}$ и подставив $F$ и $W$ в первое уравнение, получим уравнение Лурье

$$PH + H'P - PLP + M = 0,$$
$$H = (h_{ij})_{i=\overline{0,n}, j=\overline{0,n}},$$
$$h_{ij} = \frac{1}{\prod_{k=0}^{i} \varepsilon_k}(B_i KK'S'C_j - A_{ij});$$
$$L = (l_{ij})_{i=\overline{0,n}, j=\overline{0,n}},$$
$$l_{ij} = \frac{1}{\prod_{k=0}^{i} \varepsilon_k \prod_{l=1}^{j} \varepsilon_l} B_i KK'B'_j;$$
$$M = (m_{ij})_{i=\overline{0,n}, j=\overline{0,n}},$$
$$m_{ij} = C'_i(Q - SKK'S')C_j.$$

Обозначим,

$$T = KK', T = T^{0,0,\dots,0} + \varepsilon_1 T^{1,0,\dots,0}$$
$$+\varepsilon_2 T^{0,1,\dots,0} + \dots + \varepsilon_n T^{0,0,\dots,1} + \varepsilon_1 \varepsilon_{2\dots}.$$

Выполняя действия и приравнивая соответствующие блоки матриц, стоящих в левой и правой частях этого уравнения, получим подсистему с $\frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n + 1$ линейно независимыми уравнениями.

$$\sum_{j=1}^{n+1} \left[P_{1j}^{0,0,\dots,0} \left(A_{j-1,k}^{0} - B_{j-1} T^{0,0,\dots,0}\right.\right.$$
$$\left.\left.\times \sum_{j=l}^{n+1} B'_{j-1} \left(P_{lj}^{0,0,\dots,0}\right)'\right)\right] + \sum_{j=l}^{n+1} \left(A_{j-1,0}^{0}\right)'$$
$$\times \left(P_{lj}^{0,0,\dots,0}\right)' + C'_0 (Q - ST^{0,0,\dots,0} S') C_k =$$
$$0, k = \overline{0, n}, l = \overline{1, n+1};$$
$$\sum_{j=2}^{n+1} \left[P_{2j}^{0,0,\dots,0} \left(\left(A_{j-1,k}^{0}\right) - B_{j-1} T^{0,0,\dots,0}\right.\right.$$
$$\left.\left.\times \sum_{j=l}^{n+1} B'_{j-1} \left(P_{lj}^{0,0,\dots,0}\right)'\right)\right] + \sum_{j=l}^{n+1} \left(A_{j-1,1}^{0}\right)'$$
$$\times \left(P_{lj}^{0,0,\dots,0}\right)' + C'_1 (Q - ST^{0,0,\dots,0} S') C_k =$$
$$0, k = \overline{1, n}, l = \overline{2, n+1};$$
$$P_{n+1,n+1}^{0,0,\dots,0} \left(A_{nn}^{0} - B_n T^{0,0,\dots,0} B'_n P_{n+1,n+1}^{0,0,\dots,0}\right)$$
$$+\left(A_{nn}^{0}\right)' P_{n+1,n+1}^{0,0,\dots,0} - B_n T^{0,0,\dots,0} B'_n + C'_n$$
$$\times (Q - ST^{0,0,\dots,0} S') C_n = 0,$$
$$A_{ij}^{0} = B_i T^{0,0,\dots,0} S'C_j - A_{ij}, i, j = \overline{0, n}.$$

Последнее уравнение этой системы – уравнение Лурье, положительно определенное решение которого существует и единственно [3], $P_{n+1,n+1}^{0,0,\dots,0} = L_{n+1,n+1}^{0,0,\dots,0}$. Подставляя эти решения в остальные уравнения, находим положительно определенные решения соответствующих уравнений Лурье $P_{ii}^{0,0,\dots,0} = L_{ii}^{0,0,\dots,0}, i = \overline{1, n}$. Отсюда получаем, $P_{ij}^{0,0,\dots,0} = L_{ij}^{0,0,\dots,0}, i = \overline{1, n}, j = \overline{2, n+1}, j \neq i$.

Следующая подсистема состоит из $(n^2 + 3n + 2)$ линейных уравнений:

$$\sum_{j=1}^{n+1} P_{1j}^{l_1, l_2, \dots, l_n} A_{j-1,k}^{1(k+1)} + \sum_{j=k+1}^{n+1} \left(A_{j-1,0}^{1(1)}\right)'$$
$$\times \left(P_{k+1,j}^{l_1, l_2, \dots, l_n}\right)' = V_{1,k+1}^{l_1, l_2, \dots, l_n}, k = \overline{0, n};$$
$$\sum_{j=2}^{n+1} P_{2j}^{l_1, l_2, \dots, l_n} A_{j-1,k}^{1(k+1)} + \sum_{j=k+1}^{n+1} \left(A_{j-1,1}^{1(2)}\right)'$$
$$\times \left(P_{k+1,j}^{l_1, l_2, \dots, l_n}\right)' = V_{2,k+1}^{l_1, l_2, \dots, l_n}, k = \overline{0, n};$$
$$P_{n+1,n+1}^{l_1, l_2, \dots, l_n} A_{nn}^{1(n+1)} + \left(A_{nn}^{1(n+1)}\right)' P_{n+1,n+1}^{l_1, l_2, \dots, l_n}$$
$$= V_{n+1,n+1}^{l_1, l_2, \dots, l_n}, l_1 + l_2 + \dots + l_n = 1,$$

$l_i \in \{0,1\}$, где матрицы-коэффициенты

$$A_{ij}^{1(j+1)} = A_{ij}^{0} - B_i T^{0,0,\dots,0} \sum_{l=j+1}^{n+1} B'_{l-1}$$
$$\times \left(L_{j+1,l}^{0,0,\dots,0}\right)', A_{ij}^{1(j+1)} = A_{ij}^{0} - B_i T^{0,0,\dots,0}$$
$$\times \sum_{l=j+1}^{n+1} B'_{l-1} \left(L_{j+1,l}^{0,0,\dots,0}\right)', V_{ij}^{l_1 + l_2 + \dots + l_n},$$

$i, j = \overline{0, n}$ – постоянные матрицы. Все уравнения этой подсистемы являются линейными. Требуем, чтобы их решения

$P_{ij}^{1,0,\dots,0} = L_{ij}^{1,0,\dots,0}, \dots, P_{ij}^{0,0,\dots,1} = L_{ij}^{0,0,\dots,1}$,
$i,j = \overline{1,n+1}$ были положительно определенными матрицами.

$k$-ая подсистема состоит из $\left(\frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n + 1\right)(k+1)$ линейных уравнений

$$\sum_{j=1}^{n+1} P_{1j}^{l_1,l_2,\dots,l_n} A_{i-1,k}^{1(k+1)} + \sum_{j=k+1}^{n+1} \left(A_{j-1,0}^{(1)}\right)' \times \left(P_{k+1,j}^{l_1,l_2,\dots,l_n}\right)' = V_{1,k+1}^{l_1,l_2,\dots,l_n}, k = \overline{0,n},$$

где индексы $l_m \geq 0, l_m \in \mathbb{Z}, \sum_{m=1}^{n} l_m = k$, матрицы $V_{ij}^{l_1,l_2,\dots,l_n}$ – постоянные матрицы. Из этой системы однозначно определяются положительно определенные матрицы-решения $P_{ij}^{l_1,l_2,\dots,l_n} = L_{ij}^{l_1,l_2,\dots,l_n}$. Элементы положительно определенной матрицы $P$ могут быть найдены как асимптотические разложения по малым параметрам $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$. Условием положительной определенности матрицы $P$ является положительная определенность ее главных блоков, т.е. блоков $L_{ii}^{l_1,l_2,\dots,l_n}, i = \overline{1,n+1}$, следовательно, функция запаса $\varphi(x)$ системы (1) найдена приближенно. Погрешность такого вычисления равна $O\left(\prod_{i=1}^{n} \varepsilon_i^{l_i}\right), l_i \geq 0, l_i \in \mathbb{Z}, \sum_{i=1}^{n} l_i = k+1$.

*Пример.* Рассмотрим систему, описываемую уравнениями: $\dot{x} = x + y + u$,
$\varepsilon\dot{y} = -y + u, z = x + y$.

Эта система диссипативна относительно функции расхода $w = x^2 + y^2$ с функцией запаса

$$\varphi(x,y) = \left(\frac{1}{2} + \cdots\right)x^2 + \left(-\varepsilon + \frac{\sqrt{2}}{2}\varepsilon^2 + \cdots\right)xy + \left(\left(1+\sqrt{2}\right)\varepsilon + \frac{2+3\sqrt{2}}{7}\varepsilon^2 + \cdots\right)y^2.$$

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведено исследование диссипативности многотемповых систем относительно функции расхода. Найдена функция запаса линейной многотемповой системы. Приведен пример, иллюстрирующий полученные результаты.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Полушин И.Г., Фрадков А.Л., Хилл Д.Д.* Пассивность и пассификация нелинейных систем// Автоматика и телемеханика. 2000. № 3. С. 10 – 11.
2. *Семенова М.М.* Алгебраический критерий диссипативности сингулярно возмущенных систем// Обозрение прикладной и промышленной математики. 2001. Т.8. Вып. 1. С. 408 –409.
3. Устойчивость адаптивных систем. М.: Мир. 1989. 263 с.

## DISSIPABILITY OF MULTITEMPO SYSTEMS



Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics, Samara

A method of discovery of stock function is applied to study of multitempo linear systems. Dissipability of multiparameter linear systems is investigated. The application of the method is illustrated on example.
*Keywords:* linear multitempo systems, stock function, dissipative system relatively of expense function.

*Marina Semenova, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor at the Higher Mathematics Department.*
*E-mail: semenova73@bk.ru*