

УДК 62-97/98

## МОДЕЛИРОВАНИЕ МНОГОФАЗНЫХ СИНХРОННЫХ МАШИН В РАЗЛИЧНЫХ СИСТЕМАХ КООРДИНАТ

© 2020 А.В. Данеев<sup>1</sup>, Р.А. Данеев<sup>2</sup>, В.Н. Сизых<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Иркутский государственный университет путей сообщения

<sup>2</sup>Восточно-Сибирский институт МВД России, г. Иркутск

Статья поступила в редакцию 10.03.2020

В промышленности решение многих проблем напрямую связано с разработкой и исследованием синхронных машин (СМ), которые работают на выпрямительную (несимметричную) нагрузку. При этом возникают вопросы, связанные с выбором рациональных форм представления моделей и рекомендациями по их практическому применению для исследования различных режимов работы СМ. Анализ переходных процессов в СМ может быть выполнен по математическим моделям, полученным в различных системах координат. В работе представлен метод моделирования в приведенных фазных координатах (ФК), позволяющий получить результаты, удовлетворяющие по точности вычислений расчету в ФК, но с существенно меньшими вычислительными затратами.

**Ключевые слова:** синхронные машины, переходные процессы, фазные координаты, магнитоэлектрический генератор, математическая модель.

DOI: 10.37313/1990-5378-2020-22-4-104-115

### Введение

В настоящее время все больше внимания уделяется решению задач математического моделирования синхронных машин (СМ) [1]. При этом возникают вопросы, связанные с выбором рациональных форм представления моделей и рекомендациями по их практическому применению для исследования различных режимов работы СМ. В известной литературе [2, 3] эти вопросы, как правило, рассматриваются недостаточно полно. То же самое можно отнести к расчету электромагнитных переходных процессов широко применяемых в мехатронных и робототехнических системах высоко моментных СМ с высококоэрцитивными постоянными магнитами.

В статье на примере шестифазного магнитоэлектрического генератора (МЭГ) проведен сравнительный анализ переходных процессов в СМ по математическим моделям (ММ), полученным в различных системах координат. Такие модели могут быть составлены на основе уравнений с периодическими коэффициентами, записанных относительно мгновенных значений переменных. Непреобразованные уравнения позволяют достаточно просто учесть все виды несимметрии фаз и нагрузки. Кроме того, увеличение числа фаз (а, следовательно, и числа дифференциальных уравнений) не усложняет расчет электромагнитных переходных процессов на ЭВМ.

Следует отметить, что решение периодических систем на ЭВМ приводит к большим затратам машинного времени. Поэтому на практике применяют различные методы преобразования координат, позволяющие избавиться от периодических коэффициентов.

При моделировании трехфазных СМ наибольшее распространение получило преобразование к вращающимся осям  $d$ ,  $q$ ,  $0$  [4]. Однако, если для трехфазных СМ переход к системе с постоянными коэффициентами не вызывает существенных затруднений, то иначе дело обстоит с приведением исходных уравнений шестифазной СМ.

В работе [5] на основе матрицы симметричных составляющих получены обобщенные на случай многофазной СМ линейные преобразования. При этом для обмотки СМ с четным числом фаз элементы матрицы преобразования являются мнимыми величинами.

В то же время в [6] определено вещественное преобразование к системе уравнений с постоянными коэффициентами за счет приведения соответствующих фаз статорной обмотки СМ к различным координатным осям ( $d$ ,  $q$  и  $2\alpha$ ,  $2\beta$ ).

Данеев Алексей Васильевич, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры ИрГУПС.

E-mail: daneev@mail.ru

Данеев Роман Алексеевич, кандидат технических наук,

доцент ВСИ МВД России. E-mail: romasun@mail.ru

Сизых Виктор Николаевич, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры ИрГУПС.

E-mail: sizykh\_vn@mail.ru

В то же время в [6] определено вещественное преобразование к системе уравнений с постоянными коэффициентами за счет приведения соответствующих фаз статорной обмотки СМ к различным координатным осям ( $d$ ,  $q$  и  $2\alpha$ ,  $2\beta$ ).

В работе [7] предлагается рассматривать шестифазную СМ как две трехфазных системы, магнитные оси фаз которых сдвинуты в пространстве на произвольный угол  $\theta$ . Известная матрица преобразования Парка-Горева для второй трехфазной системы запишется в этом случае с учетом угла  $\theta$ .

Таким образом, отсутствие единого подхода к математическому описанию шестифазной СМ уравнениями с постоянными коэффициентами приводит к необходимости разработок новых методов математического моделирования СМ. Один из таких методов предложен в работе [8] и может быть назван методом моделирования в приведенных фазных координатах.

Цель настоящей статьи – показать, что данный метод с существенно меньшими вычислительными затратами позволяет получить результаты, удовлетворяющие по точности вычислений моделированию в фазных координатах (ФК), и не имеет ограничений метода во вращающихся осях  $d$ ,  $q$ ,  $0$  при исследовании несимметричных режимов работы шестифазного МЭГ.

### 1. Математическая модель МЭГ в фазных координатах

Рассматриваемый в статье шестифазный МЭГ представляет собой СМ с возбуждением от высококоэрцитивных постоянных магнитов (ПМ) из сплава редкоземельных элементов с кобальтом (РЗМ - магнитов), расположенных на явнополюсном роторе коллекторного типа [9]. Шестифазная обмотка статора соединена в звезду с выведенной геометрической нейтралью. Магнитные оси фаз обмотки сдвинуты в пространстве на угол  $\pi/3$ . Нагрузка генератора в рассматриваемом случае имеет активно-индуктивный характер (рис.1).

При выводе уравнений переходных процессов МЭГ кроме традиционных допущений [10], принятых в практике математического моделирования СМ обычного исполнения, делаются допущения, учитывающие специфику контура ПМ, а именно:

- магнитная система считается ненасыщенной из-за малого насыщения магнитной цепи (ярма и зубцов статора, магнитомягких полюсов ротора) в рабочем диапазоне изменения нагрузок, а соответствующие параметры генератора неизменными;
- ПМ заменяется одновитковым безынерционным контуром с включенным в него источником тока  $I'_M$ .

Последнее допущение предполагает синусоидальность изменения электродвижущей силы (э.д.с.), создаваемых рабочим потоком ПМ в обмотке статора. Это позволяет с достаточной точностью применить метод разложения поля генератора по продольной оси  $d$  и поперечной оси  $q$ , и определять параметры МЭГ обычным классическим способом [11].

На рис.2 индексами  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $c_1$ ,  $a_2$ ,  $b_2$ ,  $c_2$ ,  $\vartheta d$ ,  $\vartheta q$  и  $t$  соответственно обозначены условно выбранные электрически связанные «обмотки» статора, эквивалентные демпферные контуры и фиктивная обмотка ПМ.

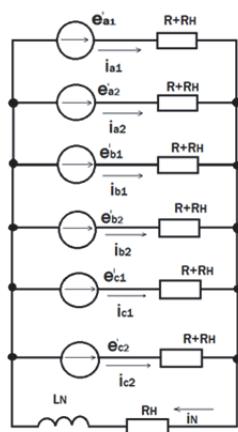


Рис. 1. Схема замещения МЭГ с «нулевым проводом»

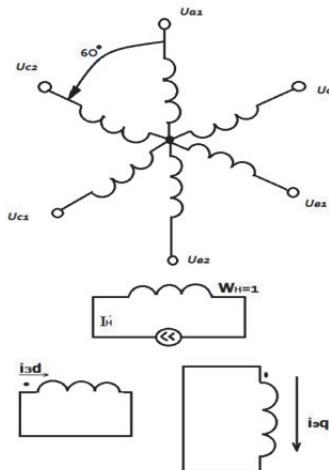


Рис. 2. Схема соединений «обмоток» МЭГ

С учетом принятых допущений система матричных уравнений, составленная на основе метода мгновенных значений [4], имеет вид:

$$-\frac{d\Psi}{dt} = Ri + u, \quad (1)$$

$$\Psi = \Psi^* + \Psi_M, \quad (2)$$

$$\Psi^* = Li, \Psi_L = L_H i, \quad (3)$$

$$u = \frac{d\Psi_i}{dt} + R_H i, \quad (4)$$

где

$$i = [i_{a_1} i_{b_1} i_{c_1} i_{a_2} i_{b_2} i_{c_2} : i_{\partial_a} i_{\partial_q}]^T = [i^{*T} i_{\partial}^T]^T,$$

$$R = \text{diag}(R, R, R, R, R, R : R_{\partial a} R_{\partial q}) = \text{diag}(R^*, R_{\partial}),$$

$$\Psi^* = [\Psi_{a_1}^* \Psi_{b_1}^* \Psi_{c_1}^* \Psi_{a_2}^* \Psi_{b_2}^* \Psi_{c_2}^* : \Psi_{\partial_a} \Psi_{\partial_q}]^T = [\Psi_{12}^{*T} \Psi_{\partial}^T]^T,$$

$$L_H = \text{diag}(L_H, L_H, L_H : L_H, L_H, L_H : 0, 0) = \text{diag}(L_H^1, L_H^2, 0),$$

$$R_H = \text{diag}(R_H, R_H, R_H, R_H, R_H, R_H : 0, 0) = \text{diag}(R_H^*, 0),$$

$$u = [u_{a_1} u_{b_1} u_{c_1} u_{a_2} u_{b_2} u_{c_2} : 0 0]^T = [u^{*T} 0]^T,$$

$$L = \begin{bmatrix} L_c^1 & M_c^{12} & M_{cp}^1 \\ M_c^{21} & L_c^2 & M_{cp}^2 \\ M_{pc}^1 & M_{pc}^2 & L_p \end{bmatrix}.$$

Здесь  $i^{*T}$ ,  $u^{*T}$ ,  $\Psi_{12}^{*T}$  - соответственно векторы мгновенных значений токов, напряжений и потокосцеплений в фазах «обмоток»;

$i_{\partial}^T$ ,  $\Psi_{\partial}^T$  - векторы мгновенных значений токов и потокосцеплений демпферных контуров;

$$R^* = \text{diag}(R, R, R, R, R, R), \quad R_{\partial} = \text{diag}(R_{\partial a}, R_{\partial q})$$

$R_H^* = \text{diag}(R_H, R_H, R_H, R_H, R_H, R_H)$  - матрицы сопротивлений фаз, демпферных контуров и нагрузки;

$L_H^1, L_H^2$  - матрицы индуктивностей нагрузки соответствующих «обмоток» статора;

$\Psi_M = [\Psi_{Ma_1} \Psi_{Mb_1} \Psi_{Mc_1} \Psi_{Ma_2} \Psi_{Mb_2} \Psi_{Mc_2}]^T = \Psi_{Mb} [cos \gamma : cos(\gamma - \frac{2\pi}{3}) : cos(\gamma + \frac{2\pi}{3}) : cos(\gamma - \frac{\pi}{3}) : cos \gamma : cos(\gamma + \frac{\pi}{3})]^T$  - вектор потокосцеплений статорных контуров с контуром ПМ;

$\Psi_{M0} = M_{Md} \cdot I'_M$  - амплитудное значение потокосцепления ПМ;

$M_{Md}$  - амплитудное значение гармонической составляющей взаимоиндуктивностей статорных «обмоток» с контуром ПМ;

$$L_c^i = \begin{bmatrix} L_{a_i} & M_{a_i b_i} & M_{a_i c_i} \\ M_{b_i a_i} & L_{b_i} & M_{b_i c_i} \\ M_{c_i a_i} & M_{c_i b_i} & L_{c_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_0^i + l_2 \cos 2\gamma_i & m_0^i + l_2 \cos(2\gamma_i - \frac{2\pi}{3}) & m_0^i + l_2 \cos(2\gamma_i + \frac{2\pi}{3}) \\ m_0^i + l_2 \cos(2\gamma_i - \frac{2\pi}{3}) & l_0^i + l_2 \cos(2\gamma_i + \frac{2\pi}{3}) & m_0^i + l_2 \cos 2\gamma_i \\ m_0^i + l_2 \cos(2\gamma_i + \frac{2\pi}{3}) & m_0^i + l_2 \cos 2\gamma_i & l_0^i + l_2 \cos(2\gamma_i - \frac{2\pi}{3}) \end{bmatrix}$$

- матрица индуктивностей и взаимоиндуктивностей  $i$ -ой статорной «обмотки»;

$$\begin{aligned} M_c^{12} &= \begin{bmatrix} M_{a_1 a_2} & M_{a_1 b_2} & M_{a_1 c_2} \\ M_{b_1 a_2} & M_{b_1 b_2} & M_{b_1 c_2} \\ M_{c_1 a_2} & M_{c_1 b_2} & M_{c_1 c_2} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} m_0^{12} + l_2 \cos(2\gamma - \frac{\pi}{3}) & p_0^{12} - l_2 \cos 2\gamma & m_0^{12} + l_2 \cos(2\gamma + \frac{\pi}{3}) \\ m_0^{12} - l_2 \cos 2\gamma & m_0^{12} + l_2 \cos(2\gamma + \frac{\pi}{3}) & p_0^{12} + l_2 \cos(2\gamma - \frac{\pi}{3}) \\ p_0^{12} + l_2 \cos(2\gamma + \frac{\pi}{3}) & m_0^{12} + l_2 \cos(2\gamma - \frac{\pi}{3}) & m_0^{12} - l_2 \cos 2\gamma \end{bmatrix}; \\ M_c^{21} &= M_c^{12}{}^T; \end{aligned}$$

$M_c^{12}$  - матрица взаимоиндуктивностей между первой и второй трехфазными «обмотками»;

$$M_{cp}^i = \begin{bmatrix} M_{a_i \exists d} & M_{a_i \exists q} \\ M_{b_i \exists d} & M_{b_i \exists q} \\ M_{c_i \exists d} & M_{c_i \exists q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{a \exists d} \cos \gamma_i & M_{a \exists q} \sin \gamma_i \\ M_{a \exists d} \cos(\gamma_i - \frac{2\pi}{3}) & M_{a \exists q} \sin(\gamma_i - \frac{2\pi}{3}) \\ M_{a \exists d} \cos(\gamma_i + \frac{2\pi}{3}) & M_{a \exists q} \sin(\gamma_i + \frac{2\pi}{3}) \end{bmatrix};$$

$$M_{pc}^i = M_{cp}^i{}^T;$$

$M_{cp}^i$  - матрица взаимоиндуктивностей между  $i$ -й «обмоткой» статора и демпферными контурами;

$$L_p = \begin{bmatrix} L_{\exists d} & 0 \\ 0 & L_{\exists q} \end{bmatrix} - матрица собственных индуктивностей демпферных контуров;$$

$i = 1, 2$  - индекс, указывающий на принадлежность к первой или второй условно выбранный «обмоткам» генератора (рис.2);

$$\gamma_i = \begin{cases} \gamma, & \text{при } i = 1; \\ \gamma - \frac{\pi}{3}, & \text{при } i = 2; \end{cases}$$

$\gamma_i = \omega t + \gamma_0$  - угол между продольной осью ротора и магнитной осью фазы  $a_1$ ;

$$L_{md} = \frac{L_{ad}}{3}; L_{mq} = \frac{L_{aq}}{3}; l_2 = \frac{L_{md} - L_{mq}}{2};$$

$$l_0 = \frac{L_{md} + L_{mq}}{2}; l_0^1 = l_0^2 = l_0 + L_s; m_0^{12} = \frac{1}{2} l_0^1;$$

$$P_0^{12} = -l_0^1; m_0^1 = -\frac{1}{2} l_0^1.$$

$i = 1, 2$  - индекс, указывающий на принадлежность к первой или второй условно выбранный «обмоткам» генератора (рис.2);

$$\gamma_i = \begin{cases} \gamma & , \text{при } i = 1; \\ \gamma - \frac{\pi}{3} & , \text{при } i = 2; \end{cases}$$

$\gamma = \omega t + \gamma_0$  - угол между продольной осью ротора и магнитной осью фазы  $\alpha_1$ ;

$$L_{md} = \frac{L_{ad}}{3}; L_{mq} = \frac{L_{aq}}{3}; l_2 = \frac{L_{md} + L_{mq}}{2};$$

$$l_0 = \frac{L_{md} + L_{mq}}{2}; l_0^1 = l_0^2 = l_0 + L_s; m_0^{12} = \frac{1}{2} l_0^1;$$

$$p_0^{12} = -l_0^1; m_0^1 = -\frac{1}{2} l_0^1.$$

Коэффициенты  $L_s, L_{ad}, L_{aq}, L_{md}, L_{mq}, l_0, l_2, M_{ad}, M_{aq}$  имеют общепринятый смысл [10].

Коэффициенты магнитных связей статорных «обмоток» МЭГ могут быть определены по формуле

$$m_0^{kj} = (l_0 + L_s) \cdot \cos \varphi_{kj}, \quad (5)$$

где  $\varphi_{kj}$  - угол между  $k$ -й и  $j$ -й фазами соответствующих «обмоток». Заметим, что формула (5) справедлива только при моделировании переходных процессов МЭГ, так как в такой машине поток рассеивания  $\Phi_s$  замыкается в силу большого магнитного сопротивления ПМ по пути основного потока  $\Phi_\delta$ .

Система уравнений (1) - (4) может быть приведена к виду

$$\frac{di}{dt} = A(t)i + L_0(t), \quad (6)$$

$$\text{где } A(t) = -(L + L_H)^{-1}(R + R_H + \frac{dL}{dt}),$$

$$L_0(t) = -(L + L_H)^{-1} \frac{d\Psi_M}{dt},$$

Уравнения, описывающие переходные процессы МЭГ с «нулевым проводом» могут быть представлены в следующем виде

$$\frac{di}{dt} = A(t)i + L_1(t); \quad (7)$$

$$i_N = K^T i; \quad (8)$$

$$U_N = L_N K^T \frac{di}{dt} + R_N i_N, \quad (9)$$

где  $K = [111111]^T$  - подматрица контурной матрицы [12];

$$A_1(t) = -(L + L_H + KL_H K^T)^{-1}(R + R_H + KR_H K^T + \frac{dL}{dt});$$

$$L_1(t) = -(L + L_H + KL_H K^T)^{-1} \frac{d\Psi_M}{dt};$$

$i_N, U_N$  - ток и напряжение в геометрической нейтрали;

$L_H, R_H$  - индуктивность и активное сопротивление «нулевого провода».

Матричные уравнения (7) - (9) представляют математическую модель МЭГ в фазных координатах с выведенной нейтралью, разрешенную относительно токов.

Известно, что преобразование к системе с постоянными коэффициентами может быть выполнено с помощью линейного преобразования

$$i = V(t)y, V(t+T) = V(t), \quad (10)$$

существование которого было доказано А.М. Ляпуновым.

## 2. Математическая модель МЭГ в осях $d, q, 0$

При рассмотрении шестифазной обмотки СМ как двух трехфазных магнитно независимых «обмоток» матрица преобразования  $V(t)$  имеет вид [7]:

$$V(t) = \begin{bmatrix} V_1(t) & 0 \\ 0 & V_2(t) \end{bmatrix},$$

$$V_i(t) = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos\gamma_i & \sin\gamma_i & 1/\sqrt{2} \\ \cos(\gamma_i - \frac{2\pi}{3}) & \sin(\gamma_i - \frac{2\pi}{3}) & 1/\sqrt{2} \\ \cos(\gamma_i + \frac{2\pi}{3}) & \sin(\gamma_i + \frac{2\pi}{3}) & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Преобразованные уравнения шестифазного МЭГ в осях  $d, q, 0$  записываются в следующем виде

$$\frac{di_d}{dt} = \frac{D_1 L_{3d} - D_2 M_{a3d}}{\Delta_1}, \quad (11)$$

$$\frac{di_q}{dt} = \frac{Q_1 L_{3q} - Q_2 M_{a3q}}{\Delta_2}, \quad (12)$$

$$\frac{di_{3d}}{dt} = \frac{D_2 (L_H + L_d) - \frac{3}{2} D_1 M_{a3d}}{\Delta_1}, \quad (13)$$

$$\frac{di_{3q}}{dt} = \frac{Q_2 (L_H + L_q) - \frac{3}{2} Q_1 M_{a3q}}{\Delta_2}, \quad (14)$$

$$U_d = R_H i_d + L_H \omega i_d + L_H \frac{di_d}{dt}, \quad (15)$$

$$U_q = R_H i_q - L_H \omega i_d + L_H \frac{di_q}{dt}, \quad (16)$$

$$i_{d_2} = i_{d_2} = i_d / 2;$$

$$U_{d_2} = U_{d_1} = U_d / 2;$$

$$U_H = U_{H_1} + U_{H_2};$$

$$U_{H_{1,2}} = \sqrt{0.125(U_d^2 + U_q^2)}, \quad (17)$$

$$i_H = i_{H_1} + i_{H_2}$$

$$i_{H_{1,2}} = \sqrt{0.125(i_d^2 + i_q^2)}, \quad (18)$$

где  $D_1 = -(R + R_H)i_d - \omega(L_H + L_q)i_q - \omega M_{a3q}i_{3q}$ ;

$D_2 = -R_{3d}i_{3d}$ ;  $Q_2 = -R_{3q}i_{3q}$ ;  $\Delta_1 = (L_H + L_d)i_{3d} - \frac{3}{2}M_{a3d}^2$ ;

$\Delta_2 = (L_H + L_q)L_{3q} - \frac{3}{2}M_{a3q}$ ;  $L_d = L_{ad} + L_s$ ;  $L_q = L_{aq} + L_s$ ;

$$Q_1 = -(R + R_H)i_d - \omega(L_H + L_d)i_d + \omega M_{a3d}i_{3d} + \\ + \omega M_{md}I_M^2.$$

Уравнения (11) - (18) соответствуют представлению шестифазной СМ эквивалентной трехфазной машиной с «расщепленной» обмоткой.

## 3. Математическая модель МЭГ в приведенных фазных координатах

Следует отметить, что область применения ММ в координатной системе Парка-Горева ограничивается исследованием симметричных режимов работы МЭГ. В случае общей несимметрии фаз и при несимметричной нагрузке генератора более предпочтительной является ММ, полученная методом приведенных фазных координат (ФК). Алгоритм вычислений данным методом сводится к следующему:

1. Аналитическим путем определяются матрицы преобразования и постоянных коэффициентов приведенной системы [8];

$$B = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} A(\tau) d\tau, \quad (19)$$

$$V(t) = E + \int_0^t [A(\tau) - B] d\tau, \quad (20)$$

где  $E$  - единичная матрица»

2 Решается на ЭВМ система уравнений с постоянными коэффициентами

$$\frac{dy}{dt} = By + U \quad (21)$$

с начальными условиями

$$y_0 = V(0)^{-1}i_0,$$

$$U = V^{-1}(t)e_1(t).$$

3 По формуле (10) вычисляются переменные состояния непреобразованной системы уравнений (6).

Матрица периодических коэффициентов  $A(t)$  и вектор преобразованных э.д.с. могут быть представлены в виде

$$A(t) = [a_{ij}(t)], i = 1,2,3; j = 1,2,3$$

$$e_1(t) = \sqrt{2}E_\phi\omega[sin\gamma : sin(\gamma - \frac{2\pi}{3}) : sin(\gamma + \frac{2\pi}{3}) : sin(\gamma - \frac{\pi}{3}) : sin\gamma : sin(\gamma + \frac{\pi}{3})]^T,$$

$$\text{где } E_\phi = \Psi_M(h_0 - h_1 + \gamma_0 - \gamma_1 - \frac{3}{2}(h_2 + \gamma_2))$$

$$a_{11} = C_1\beta_{12}^{-1}, a_{12} = -C_1\beta_{22}^{-1},$$

$$a_{13} = C_1(\beta_{22}^{-1}M_{CP}^2L_p^{-1} - \beta_{12}^{-1}M_{CP}^1L_p^{-1}),$$

$$a_{21} = C_2\beta_{11}^{-1}, a_{22} = -C_2\beta_{21}^{-1},$$

$$a_{23} = C_2(\beta_{21}^{-1}M_{CP}^2L_p^{-1} - \beta_{12}^{-1}M_{CP}^1L_p^{-1}),$$

$$a_{31} = L_p^{-1}(M_{CP}^{1T}a_{11} + M_{CP}^2a_{21}),$$

$$a_{32} = L_p^{-1}(M_{CP}^{1T}a_{12} + M_{CP}^2a_{22}),$$

$$a_{33} = L_p^{-1}(E - M_{CP}^{1T}a_{13} - M_{CP}^2a_{23}),$$

$$C_1 = (\beta_{12}^{-1}\beta_{11} - \beta_{22}^{-1}\beta_{21})^{-1}, C_2 = (\beta_{11}^{-1}\beta_{12} - \beta_{21}^{-1}\beta_{22})^{-1},$$

$$\beta_{11} = L_C^1 + L_H^1 - M_{CP}^1L_p^{-1}M_{CP}^{1T},$$

$$\beta_{12} = M_C^{12} - M_{CP}^1L_p^{-1}M_{CP}^2, \beta_{21} = \beta_{12}^T,$$

$$\beta_{22} = L_C^1 + L_H^1 - M_{CP}^2L_p^{-1}M_{CP}^{2T}.$$

Матрица  $A(t)$  вычислялась аналитическим методом блочных матриц, то есть матричным аналогом метода исключения Гаусса.

Матрица постоянных коэффициентов и матрица преобразования имеют следующий вид

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{21} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{33} \end{bmatrix},$$

где

$$B_{11} = B_{22} \begin{bmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_2 & \alpha_0 & \alpha_1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_0 \end{bmatrix},$$

$$B_{21} = B_{21}^T \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_0 & \beta_2 \\ \beta_2 & \beta_1 & \beta_0 \\ \beta_0 & \beta_2 & \beta_1 \end{bmatrix}, B_{33} = \begin{bmatrix} \omega_0 & \omega_1 \\ \omega_2 & \omega_3 \end{bmatrix},$$

$$V(t) = [V_{lm}(t)], l=1,\dots,8; m=1,\dots,8,$$

где  $V_{11} = \frac{1}{2\omega}(\alpha_4 + \alpha_3 \sin 2\gamma - \alpha_4 \cos 2\gamma) + 1$ ,

$$V_{12} = \frac{1}{2\omega}\left(\frac{\alpha_4}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\alpha_3 + \alpha_3 \sin\left(2\gamma - \frac{2\pi}{3}\right) - \alpha_4 \cos\left(2\gamma - \frac{2\pi}{3}\right)\right),$$

$$V_{13} = \frac{1}{2\omega}\left(\frac{\alpha_4}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\alpha_3 + \alpha_3 \sin\left(2\gamma - \frac{2\pi}{3}\right) - \alpha_4 \cos\left(2\gamma + \frac{2\pi}{3}\right)\right),$$

$$V_{14} = \frac{1}{2\omega}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\beta_3 + \frac{\beta_4}{2} + \beta_3 \sin\left(2\gamma - \frac{\pi}{3}\right) - \beta_4 \cos\left(2\gamma - \frac{\pi}{3}\right)\right),$$

$$V_{15} = \frac{1}{2\omega}(-\beta_4 - \beta_3 \sin 2\gamma + \beta_4 \cos 2\gamma),$$

$$V_{16} = \frac{1}{2\omega}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\beta_3 + \frac{1}{2}\beta_4 + \beta_3 \sin\left(2\gamma + \frac{\pi}{3}\right) - \beta_4 \cos\left(2\gamma + \frac{\pi}{3}\right)\right),$$

$$V_{17} = \frac{1}{\omega}(x_0 - x_0 \cos \gamma + x_1 \sin \gamma),$$

$$V_{18} = \frac{1}{\omega}(x_3 - x_3 \cos \gamma + x_2 \sin \gamma),$$

$$V_{21} = V_{12}, V_{22} = 1 + V_{13},$$

$$V_{23} = \frac{1}{2\omega}(-\alpha_4 - \alpha_3 \sin 2\gamma + \alpha_4 \cos 2\gamma),$$

$$V_{24} = V_{15}, V_{25} = V_{16}, V_{26} = V_{14},$$

$$V_{27} = \frac{1}{\omega}\left(\frac{1}{2}x_0 + \frac{\sqrt{3}}{2}x_1 - x_0 \cos\left(\gamma - \frac{2\pi}{3}\right) - x_1 \sin\left(\gamma - \frac{2\pi}{3}\right)\right),$$

$$V_{28} = \frac{1}{\omega}\left(-\frac{1}{2}x_3 + \frac{\sqrt{3}}{2}x_2 - x_3 \cos\left(\gamma - \frac{2\pi}{3}\right) - x_2 \sin\left(\gamma - \frac{2\pi}{3}\right)\right),$$

$$V_{31} = V_{13}, V_{32} = V_{23}, V_{33} = 1 + V_{12},$$

$$V_{34} = V_{16}, V_{35} = V_{14}, V_{36} = V_{15},$$

$$V_{37} = \frac{1}{\omega}\left(-\frac{1}{2}x_0 - \frac{\sqrt{3}}{2}x_1 - x_0 \cos\left(\gamma + \frac{2\pi}{3}\right) - x_1 \sin\left(\gamma + \frac{2\pi}{3}\right)\right),$$

$$V_{38} = \frac{1}{\omega}\left(-\frac{1}{2}x_3 - \frac{\sqrt{3}}{2}x_2 - x_3 \cos\left(\gamma + \frac{2\pi}{3}\right) + x_2 \sin\left(\gamma + \frac{2\pi}{3}\right)\right),$$

$$V_{41} = V_{14}, V_{42} = V_{15}, V_{43} = V_{16}, V_{44} = V_{33}, V_{45} = V_{13}, V_{46} = V_{23},$$

$$V_{47} = \frac{1}{\omega}\left(\frac{1}{2}x_0 + \frac{\sqrt{3}}{2}x_1 - x_0 \cos\left(\gamma - \frac{\pi}{3}\right) - x_1 \sin\left(\gamma - \frac{\pi}{3}\right)\right),$$

$$V_{48} = \frac{1}{\omega}\left(\frac{1}{2}x_3 + \frac{\sqrt{3}}{2}x_2 - x_3 \cos\left(\gamma - \frac{\pi}{3}\right) + x_2 \sin\left(\gamma - \frac{\pi}{3}\right)\right),$$

$$V_{51} = V_{15}, V_{52} = V_{16}, V_{53} = V_{14}, V_{54} = V_{13}, V_{55} = V_{11}, V_{56} = V_{12},$$

$$V_{57} = \frac{1}{\omega}(-x_0 - x_0 \cos \gamma - x_1 \sin \gamma),$$

$$V_{58} = \frac{1}{\omega}(-x_3 + x_3 \cos \gamma - x_2 \sin \gamma),$$

$$V_{61} = V_{16}, V_{62} = V_{14}, V_{63} = V_{15}, V_{64} = V_{23}, V_{65} = V_{12}, V_{66} = V_{22},$$

$$V_{67} = \frac{1}{\omega}\left(\frac{1}{2}x_0 - \frac{\sqrt{3}}{2}x_1 - x_0 \cos\left(\gamma + \frac{\pi}{3}\right) + x_1 \sin\left(\gamma + \frac{\pi}{3}\right)\right),$$

$$V_{68} = \frac{1}{\omega} \left( \frac{1}{2} x_3 - \frac{\sqrt{3}}{2} x_2 - x_3 \cos \left( \gamma + \frac{\pi}{3} \right) + x_2 \sin \left( \gamma + \frac{\pi}{3} \right) \right),$$

$$V_{71} = V_{17}, V_{72} = V_{27}, V_{73} = V_{37}, V_{74} = V_{47}, V_{75} = V_{57}, V_{76} = V_{67},$$

$$V_{77} = 1, V_{78} = 0, V_{81} = V_{18}, V_{82} = V_{28}, V_{83} = V_{38},$$

$$V_{84} = V_{48}, V_{85} = V_{58},$$

$$V_{86} = V_{68}, V_{87} = 0, V_{88} = 1,$$

В матрицах  $A(t)$ ,  $B$ ,  $V(t)$  коэффициенты  $h_0$ ,  $h_1$ ,  $\gamma_0$ ,  $\gamma_1$ ,  $h_2$ ,  $\gamma_2$ ,  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\beta_0$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ ,  $\omega_0$ ,  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\omega_3$ ,  $\alpha_3$ ,  $\alpha_4$ ,  $\beta_3$ ,  $\beta_4$ ,  $x_0$ ,  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  зависят от параметров МЭГ и нагрузки.

Уравнения (10), (21) представляют собой ММ МЭГ в приведенных ФК.

#### 4. Результаты моделирования

На основе выше полученных ММ МЭГ в ФК, приведенных ФК и в осях  $d$ ,  $q$ , 0 произведен на ЭВМ расчет в физических единицах электромагнитных переходных процессов. График переходных процессов фазных токов при номинальной нагрузке показан на рис.3. Расчетные данные в параметры генератора следующие [14]: мощность-  $S_H = 18 \text{ кВА}$ ; частота вращения-  $n = 8000 \text{ об/мин}$ ; частота э.д.с. –  $f = 1066 \text{ Гц}$ ; действующие значения фазных токов и напряжений -  $I_{\varphi_0} = 100 \text{ А}$ ,  $E_{\varphi_0} = 28.5 \text{ В}$ ; индуктивные параметры обмотки -  $L_s = 1.6 \cdot 10^{-6} \text{ Гн}$ ,  $L_{ad} = 2.2 \cdot 10^{-6} \text{ Гн}$ ,  $L_{aq} = 2.5 \cdot 10^{-6} \text{ Гн}$ ; коэффициент мощности -  $\cos \varphi = 0.8$ .

При математическом описании переходных процессов МЭГ демпфирующие свойства ПМ и биметаллической обоймы не учитывались.

ММ в ФК была составлена двумя способами: с численным и аналитическим вычислением матрицы периодических коэффициентов  $A(t)$ . Затраты машинного времени при моделировании на ЭВМ в ФК с шагом интегрирования  $10^{-6}$  секунды на 3 периода изменения э.д.с. оставили 17 минут.

По результатам моделирования в ФК можно определить действующие значения токов и напряжений. Для этого достаточно согласно ГОСТ 19705-81 построить огибающую переходных процессов по амплитудным значениям фазных переменных и уменьшить ее значение в  $\sqrt{2}$  раз. Однако такой переход можно выполнить непосредственно в модели по формулам

$$I = \sqrt{0.5 k_1 (\sum_{j=1}^2 (i_{aj}^2 + i_{bj}^2 + i_{cj}^2))}, \quad (22)$$

$$U = \sqrt{0.5 k_1 (\sum_{j=1}^2 (u_{aj}^2 + u_{bj}^2 + u_{cj}^2))}. \quad (23)$$

Действительно, для установившегося симметричного режима работы МЭГ

$$i_{aj} = I_m \sin(\gamma_i - \varphi),$$

$$i_{bj} = I_m \sin(\gamma_i - \varphi - \frac{2\pi}{3}),$$

$$i_{cj} = I_m \sin(\gamma_i - \varphi + \frac{2\pi}{3}),$$

где  $j=1,2$

$$\gamma_i = \begin{cases} \gamma, & \text{при } j = 1; \\ \gamma - \frac{\pi}{3}, & \text{при } j = 2; \end{cases}$$

$\gamma$  – угол между фазными токами и напряжениями при активно-индуктивной нагрузке генератора.

$$\text{Так как } \sum_{j=1}^2 (i_{aj}^2 + i_{bj}^2 + i_{cj}^2) = \frac{1}{k_1} I_m^2, \quad (24)$$

то для того, чтобы выполнить соотношения

$$I = I_m / \sqrt{2}, U = U_m / \sqrt{2}, \text{ необходимо домножить обе части тождества (24) на коэффициент } k_1,$$

учитывающий равенство амплитуды изображающего вектора фазных токов и напряжений амплитуде тока и напряжения одной фазы.

Из выражений (10), (20) можно записать

$$i = y + f_1(t).$$

В предложении, что  $f_1(t)$  – вектор, элементы которого являются малыми периодически изменяющимися величинами, имеют место следующие приближенные формулы:

$$I = \sqrt{0.5 k_1 (\sum_{i=1}^2 (i_{ai}^2 + i_{bi}^2 + i_{ci}^2))}, \quad (25)$$

$$U = \sqrt{0.5 k_1 (\sum_{i=1}^2 (u_{ai}^2 + u_{bi}^2 + u_{ci}^2))}, \quad (26)$$

где

$$U_{ai} = L_H \frac{dy_{ai}}{dt} + R_H y_{ai},$$

$$U_{bi} = L_H \frac{dy_{bi}}{dt} + R_H y_{bi},$$

$$U_{ci} = L_H \frac{dy_{ci}}{dt} + R_H y_{ci}; i = 1, 2.$$

Уравнения (25), (26) позволяют аналогично известному преобразованию Парка-Горева определить действующие значения фазных токов и напряжений в приведенных ФК, не прибегая к обратному переходу (10) к фазным переменным состояния при исследовании симметричных режимов работы МЭГ.

Графики переходных процессов для действующего значения напряжения при номинальной нагрузке при моделировании в ФК, в приведенных ФК и в осях  $d, q, 0$  изображены на рис.4.

Из рисунка видно, что результаты расчета в приведенных ФК и в осях  $d, q, 0$  незначительно отличаются от результатов моделирования в ФК. Относительная погрешность вычислений не превышает 0.5% по сравнению с результатом моделирования в ФК.

Длительность переходных процессов исследуемого МЭГ составляет 0.36 мс., что примерно в 3 раза меньше периода изменения частоты э.д.с. Небольшая длительность переходных процессов в значительной степени определяется малыми индуктивностями обмотки статора, что является отличительной особенностью переходных процессов в ЭМ с ПМ.

В целях сравнения моделей по параметрическим возмущениям исследовались различные режимы работы МЭГ. По результатам расчета в различных системах координат построена внешняя характеристика генератора (рис. 5). Из рис.5 следует, что результаты моделирования в ФК, приведенных ФК и осях  $d, q, 0$  при увеличении нагрузки от нуля до четырех номиналов (4Н) практически совпадают. В диапазоне изменения нагрузки от 10% до 150% падение напряжения  $\Delta U_1$  составило 5.4 В, что позволяет сделать вывод о жесткости внешней характеристики МЭГ. На рис.5 рабочий диапазон определяется точками пересечения внешней характеристики генератора с вольт-амперными характеристиками нагрузки  $U_{H1} = f(I_{H1})$  и  $U_{H2} = f(I_{H2})$ . Цифровое моделирование показывает, что при решении уравнений МЭГ в приведенных ФК, затраты машинного времени сокращаются в 13-14 раз по сравнению с временем счета в ФК. Погрешность вычислений в приведенных ФК по сравнению с результатом моделирования в ФК не превышает 0.1%.

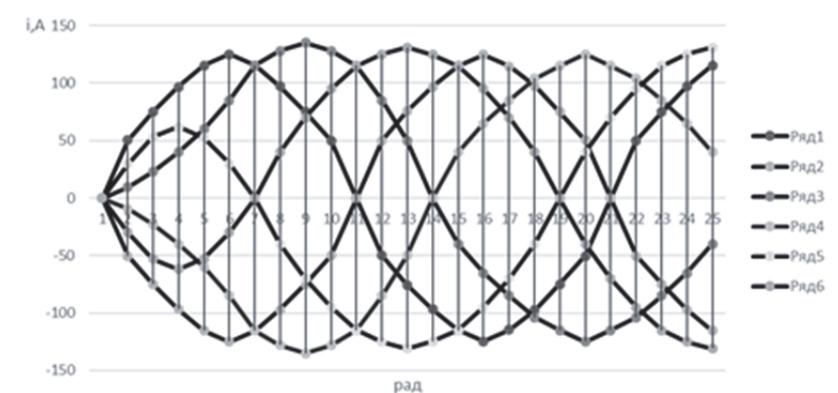


Рис. 3. Переходные процессы фазных токов при номинальной нагрузке

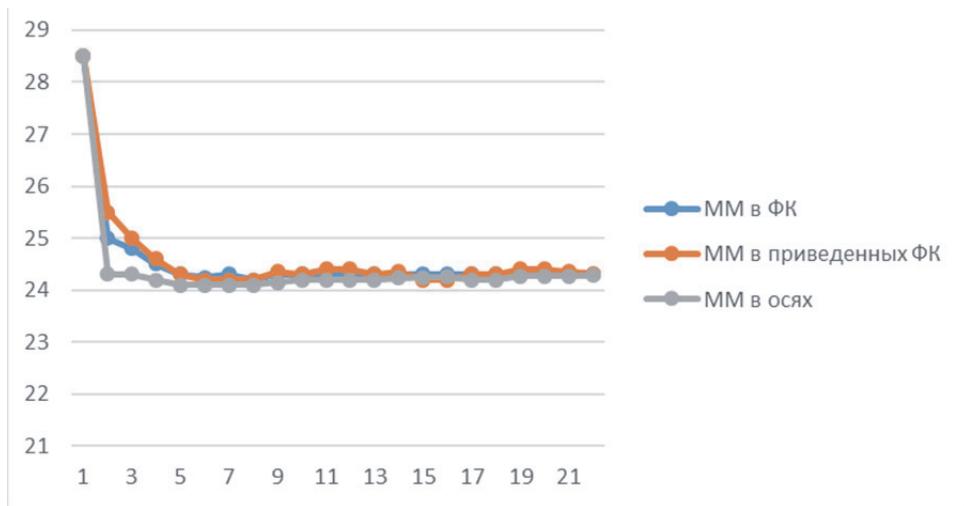


Рис. 4. Переходные процессы для действующего значения напряжения при номинальной нагрузке

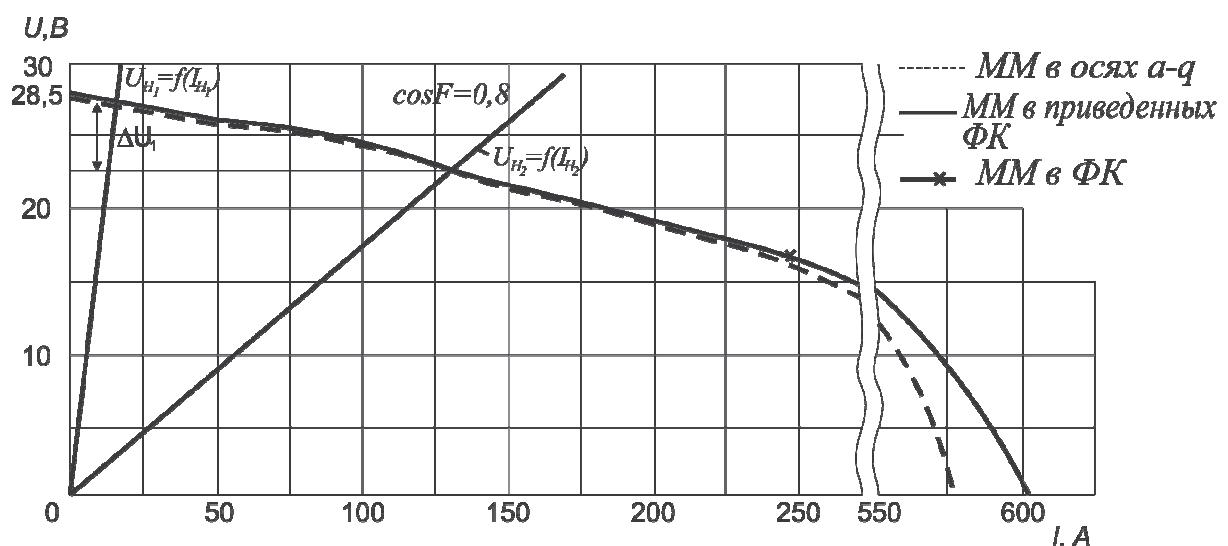


Рис. 5. Внешняя характеристика генератора

### Заключение

Обобщая изложенное можно сказать, что при использовании симметричных режимов работы МЭГ целесообразно использовать ММ в приведенных ФК и ММ в осях  $d, q, 0$ . Результат моделирования получается в действующих значениях фазных токов и напряжений. В то же время при использовании несимметричных режимов работы МЭГ с выведенной геометрической нейтралью учет несимметрии фаз и нагрузки осуществляется с помощью уравнений (7) - (9), описывающих переходные процессы в «нулевом проводе». Результат моделирования получается в мгновенных значениях фазных токов и напряжений. При исследовании несимметричных режимов работы МЭГ без «нулевого провода» для учета нулевых составляющих фазных токов и напряжений уравнения (6) должны быть преобразованы к фазным линейным уравнениям (15). Ряд близких и смежных вопросов моделирования объектов различной природы рассмотрен в работах [16-25].

Таким образом, метод моделирования в приведенных ФК позволяет получить результаты, удовлетворяющие по точности вычислений расчету в ФК, но с существенно меньшими вычислительными затратами. В то же время данный метод не имеет ограничений метода во вращающихся осях  $d, q, 0$  при исследовании несимметричных режимов работы МЭГ.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сипайлова Г.А., Лоос А.В. Математическое моделирование электрических машин. М.: Высшая школа, 1980. 175 с.
2. Веретенников Л.П. Исследование процессов в судовых электроэнергетических системах. Теория и методы. Л.: Судостроение, 1975. 375 с.
3. Андерсон П., Фуад А. Управление энергосистемами и устойчивость. М.: Энергия, 1980. 568 с.
4. Горев А.А. Переходные процессы синхронной машины. М.-Л.: Госэнергоиздат, 1950. 551 с.
5. Арешян Г.Л. Вопросы преобразования дифференциальных уравнений многофазных электрических машин // Известия АН СССР. Энергетика и транспорт. 1982. № 5. С. 52-62.
6. Глебов И.А. Системы возбуждения синхронных генераторов с управляемыми преобразователями. М.-Л.: Издательство АН СССР, 1960. 328 с.
7. Страхов С.В., Сегал Б.И. Уравнения синхронной машины с двумя трехфазными обмотками на статоре // Известия ВУЗов СССР. Электромеханика. 1981. № 6. С. 623-628.
8. Сизых В.Н. Преобразование периодических систем к системам с постоянными коэффициентами на основе теории Флоке-Ляпунова // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2010. №4 (28). С. 128-132.
9. Ледовский А.Н. Электрические машины с высококоэрцитивными постоянными магнитами. М.: Энергоатомиздат, 1985. 168 с.
10. Важнов А.И. Переходные процессы в машинах переменного тока. Л.: Энергия, 1980. 312 с.
11. Галтеев Ф.Ф., Коробченко В.П. Исследование переходных процессов в синхронных магнитоэлектрических генераторах // Устройства электропитания и электропривода малой мощности. Том 2. М.: Энергия, 1970. С. 18-25.
12. Ильин В.Н. Машинное проектирование электронных схем. М.: Энергия, 1972. 279 с.
13. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. М.-Л.: ГИТГЛ, 1950. 471 с.
14. Алексеев И.И., Зайчин Б.С., Клейман М.Г., Старовойтова Н.П. Особенности электромагнитного расчета генераторов с редкоземельными постоянными магнитами // Электричество. 1985. № 11. С.27-30.
15. Резниченко В.Ю., Курилин С.П. Особенности дифференциальных уравнений несимметричные электрических машин переменного тока. М.: Электричество, 1983. С.42-44.
16. Сизых В.Н., Мухонад А.Ю. Ассоциативный автомат адаптивного управления технологическими процессами на основе нейронных сетей // Научный вестник Новосибирского государственного технического университета. 2014. № 1 (54). С. 34-45.
17. Сизых В.Н. Итерационно-релаксационный метод аналитического конструирования оптимальных регуляторов // Автоматика и телемеханика. 2005. № 6. С. 47-58.
18. Мухонад Ю.Ф., Пашков Н.Н., Сизых В.Н. Адаптивный подход к нейронному управлению одним классом абсолютно устойчивых систем // Фундаментальные исследования. 2011. № 8-1. С. 139-147.
19. Данеев А.В., Русанов В.А., Русанов М.В., Сизых В.Н. К апостериорному моделированию нестационарных гиперболических систем // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. 2018. Т. 20. № 1 (81). С. 106-113.
20. Сизых В.Н. Итерационно-релаксационный метод приближенно-оптимального синтеза регуляторов // Доклады Академии наук. 2000. Т. 371. № 5. С. 574.
21. Агеев А.М., Сизых В.Н. Синтез оптимальных регуляторов системы управления самолетом через решение обратной задачи АКОР // Научный вестник Новосибирского государственного технического университета. 2014. № 3 (56). С. 7-22.
22. Данеев А.В., Русанов В.А. Об одном классе сильных дифференциальных моделей над счетным множеством динамических процессов конечного характера // Известия высших учебных заведений. Математика. - 2000. № 2. - С. 32-40.
23. Rusanov V.A., Antonova L.V., Daneev A.V. Inverse problem of nonlinear systems analysis: a behavioral approach // Advances in Differential Equations and Control Processes. - 2012. Т. 10. № 2. - Р. 69-88.
24. Данеев А.В., Лакеев А.В., Русанов В.А., Русанов М.В. К теории реализации сильных дифференциальных моделей. I // Сибирский журнал индустриальной математики. - 2005. Т. 8. № 1 (21). - С. 53-63.
25. Данеев А.В., Русанов В.А., Шарпинский Д.Ю. Нестационарная реализация Калмана-Месаровича в конструкциях оператора Релея-Ритца // Кибернетика и системный анализ. - 2007. № 1. - С. 82-91.

## MODELING OF MULTI-PHASE SYNCHRONOUS MACHINES IN VARIOUS COORDINATE SYSTEMS

© 2020 A.V. Daneev<sup>1</sup>, R.A. Daneev<sup>2</sup>, V.N. Sizykh<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Irkutsk State Transport University

<sup>2</sup> East-Siberian Institute of the Ministry of Internal Affairs of Russia, Irkutsk

In industry, the solution to many problems is directly related to the development and research of synchronous machines (SM), which operate on a rectifying (asymmetric) load. This raises questions related to the selection of rational forms of representation of models and recommendations for their practical application for the study of various modes of operation of SM. Analysis of transients in the SM can be performed using mathematical models obtained in various coordinate systems. The paper presents a modeling method in reduced phase coordinates (FC), which allows one to obtain results that satisfy the calculation accuracy in FC in terms of accuracy of calculations, but with significantly lower computational costs.

**Key words:** synchronous machines, transients, phase coordinates, magnetoelectric generator, mathematical model.

DOI: 10.37313/1990-5378-2020-22-4-104-115

Aleksey Daneev, Doctor of Technical Sciences, Professor, Professor, Department of IrGUPS. E-mail: daneev@mail.ru  
Roman Daneev, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the All-Russian Ministry of Internal Affairs of

Russia. E-mail: romasun@mail.ru

Victor Sizykh, Doctor of Technical Sciences, Professor, Professor, Department of IrGUPS. E-mail: sizykh\_vn@mail.ru