УДК 519.711.3 : 519.722

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-НЕАВТОНОМНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ИНТЕГРАТИВНОЙ АКТИВНОСТИ НЕЙРОПОПУЛЯЦИИ БИЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛЬЮ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

 А.В. Данеев[1], А.В. Лакеев[2], В.А. Русанов[2], П.А. Плеснёв[1]

[1] Иркутский государственный университет путей сообщения, Иркутск, Россия
[2] Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН, Иркутск, Россия

Статья поступила в редакцию 13.02.2021

Для нейроморфных процессов, заданных поведением локальной нейропопуляции (например, процессами, индуцированными интерфейс-платформой “мозг-машина” типа Neuralink), исследуется разрешимость задачи существования дифференциальной реализации этих процессов в классе билинейных нестационарных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка (с запаздыванием) в сепарабельном гильбертовом пространстве. Данная постановка относится к типу обратных задач для аддитивной комбинации нестационарных линейных и билинейных операторов эволюционных уравнений в бесконечномерном гильбертовом пространстве. Метаязыком развиваемой теории служат конструкции тензорных произведений гильбертовых пространств, структуры решеток с ортодополнением, функциональный аппарат нелинейного оператора Релея–Ритца и принцип максимума энтропии. При этом показано, что свойство сублинейности этого оператора, позволяет получить условия для существования таких дифференциальных реализаций; попутно обосновываются метрические условия непрерывности проективизации данного оператора с вычислением фундаментальной группы его компактного образа.
Ключевые слова: обратные задачи нелинейной нейроморфной динамики, тензорный анализ, билинейная неавтономная дифференциальная реализация второго порядка с запаздыванием, энтропийный оператор Релея–Ритца.
DOI: 10.37313/1990-5378-2021-23-2-115-126

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (*проект № 19-01-00301*).

ВВЕДЕНИЕ

Многомерные нейродинамические модели эволюции состояния синапсов, изменения скорости нейроимпульсов и т.п. в локальных популяциях нейронов [1] могут иметь форму систем интегро-дифференциальных уравнений [2]. Для данного дифференциального представления нейроморфных процессов актуальна задача разрешимости таких бесконечных систем. При этом используются различные техники современного функционального анализа, включая теоремы сравнения, монотонные итерационные методы, метод усечения, а также топологические методы фиксированной точки. Другой нейродинамический подход описывает нейропроцессы в терминах нейросетевой протомодели “*черного ящика*” с дальнейшей реализацией [3, с. 21] этих процессов в классе бесконечномерных дифференциальных моделей [4] с запаздыванием и без. В целом можно заключить, что нелинейные неавтономные дифференциальные уравнения в бесконечномерных гильбертовых пространствах весьма продуктивны в теоретико-прикладных задачах математической нейробиологии. При этом факторы нестационарности, полилинейности и запаздывания таких дифференциальных моделей, в том числе высших порядков [5], отражают интегративный процесс перестройки физико-химических взаимосвязей в синергетических комплексах синапсов/рецепторов [6] исследуемых (моделируемых) нейропопуляций.

В контексте второго подхода отметим, что основоположник качественной теории дифференциальной реализации (КТДР) Р. Калман, констатируя, что в теории динамических систем задача реализации играет центральную роль [3, с. 267], сформулировал следующий подход [3, с. 286]: рассматривать задачу реализации как попытку угадать уравнения движения динамической системы по поведению ее *входных* и *выходных* сигналов или как построение физической модели, объясняющей экспериментальные данные типа “*вход–выход*” (протомодель “*черного ящика*”). Настоящий период развития КТДР в бесконечномерной постановке связан с созданием специального математического метаязыка – *энтропийной теории расширений* M_2*- операторов* [4]. Данная теория существенным образом пере-

Данеев Алексей Васильевич, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры «Информационные системы и защита информации». E-mail: daneev@mail.ru
Лакеев Анатолий Валентинович, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник. E-mail: lakeyev@mail.ru
Русанов Вячеслав Анатольевич, доктор физико-математических наук, доцент, старший научный сотрудник. E-mail: v.rusanov@mail.ru
Плеснёв Павел Александрович, аспирант. E-mail: pavel.plesnev@gmail.com

строила и укрепила теоретико-системные основания КТДР и обеспечила гармоничную связь геометрических идей M_2-продолжимости [4] с методами теории апостериорного математического моделирования дифференциальных уравнений высших порядков [5] в бесконечномерных пространствах, причем делая упор на приложения [2, 6], а не на достижение максимальной общности изложения КТДР-результатов.

Последнее обстоятельство не могло не наложить отпечаток на содержание данной работы. А именно, так как во многих задачах математической нейрофизиологии модель реализации дифференциального представления нейроморфных процессов типа "*ответная реакция синапсов на раздражающее воздействие рецепторов*" требует учитывать нелинейную взаимосвязь как от самой ответной реакции и скорости ее протекания, так и от раздражающего воздействия, то ниже основное внимание сосредоточено на исследовании модели дифференциальной реализации, зависящей от *пяти* нестационарных билинейных структур. Первая из них зависит от реакции (как вектор-функции времени), второй билинейный оператор зависит от этой реакции и скорости ее протекания, третий билинейный оператор зависит только от скорости протекания данной реакции и два других учитывают эти переменные в связи с влиянием на них фактора запаздывания нейроимпульсов синапсов и вектор-функции нейросигналов возбуждаемых рецепторов.

Кроме того, КТДР-методы, рассматриваемые в духе бесконечномерной постановки обратных задач математической физики [4], сложнее, интереснее, глубиннее в приложениях и очень важны для понимания основных репрезентативных свойств самих дифференциальных моделей. Их конструкции могут служить отправными точками современного развития общей (аксиоматической) теории динамических систем (в духе [3]), попутно создавая этим конструкциям репутацию весьма полезного математического инструмента в прецизионном апостериорном нелинейном моделировании сложных бесконечномерных динамических моделей.

1. ТЕРМИНОЛОГИЧЕСКИЙ СЛОВАРЬ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Далее $(X,\|\cdot\|_X)$, $(Y,\|\cdot\|_Y)$ – вещественные сепарабельные гильбертовы пространства (т.е. нормы удовлетворяют "условию параллелограмма" [7, с. 162]); при этом ниже используем [7, с. 176] линейную изометрию (сохраняющую норму) $E: Y \to X$ пространств Y и X. Как обычно $L(\mathcal{B}',\mathcal{B}'')$ – банахово пространство (с операторной нормой) всех линейных непрерывных операторов для двух банаховых пространств $\mathcal{B}'$ и $\mathcal{B}''$, $\mathcal{L}(X^2,X)$ – пространство всех непрерывных билинейных отображений из декартового квадрата $X\times X$ в пространство X, ниже активно используем линейную изометрию [7, с. 650] пространств $\mathcal{L}(X^2,X)$ и $L(X,L(X,X))$.

Обозначим через $T := [t_0,t_1]$ отрезок числовой прямой R с мерой Лебега μ, через $\wp_\mu$ – σ-алгебру всех μ-измеримых подмножеств из T, запись $S \underset{\mathrm{mod}\,\mu}{\subseteq} Q$ ($S,Q\in\wp_\mu$) означает $\mu(S\setminus Q)=0$. Сверх того примем, что $AC^1(T,X)$ – множество всех функций $\varphi\colon T\to X$, первая производная которых является абсолютно-непрерывной функцией (относительно меры μ) на интервале T.

Если ниже $(\mathcal{B},\|\cdot\|)$ – банахово пространство, то через $\mathrm{L}_p(T,\mathcal{B})$, $p\in[1,\infty)$ будем обозначать банахово пространство классов μ-эквивалентности интегрируемых по Бохнеру [8] отображений $f: T\to\mathcal{B}$ с нормой $(\int_T \|f(\tau)\|^p\,\mu(d\tau))^{1/p}<\infty$, соответственно через $\mathrm{L}_\infty(T,\mathcal{B})$ – банахово пространство из этих классов с нормой $\operatorname{ess\,sup}_T \|f\|<\infty$. В данном контексте условимся, что

$$\mathbb{L}_2 := \mathrm{L}_2(T,L(X,X))\times \mathrm{L}_2(T,L(X,X))\times \mathrm{L}_2(T,L(Y,X))\times$$
$$\times \mathrm{L}_2(T,\mathcal{L}(X^2,X))\times \mathrm{L}_2(T,\mathcal{L}(X^2,X))\times \mathrm{L}_2(T,\mathcal{L}(X^2,X))\times \mathrm{L}_2(T,\mathcal{L}(X^2,X))\times \mathrm{L}_2(T,\mathcal{L}(X^2,X)),$$
$$\mathbb{L}^* := L(X,X)\times L(X,X)\times L(Y,X)\times \mathcal{L}(X^2,X)\times \mathcal{L}(X^2,X)\times \mathcal{L}(X^2,X)\times \mathcal{L}(X^2,X)\times \mathcal{L}(X^2,X).$$

Далее, считаем, что на временном интервале T фиксировано *a posteriori* поведение исследуемой (моделируемой) локальной нейропопуляции в виде не ограниченного по мощности нелинейного пучка N наблюдаемых нейродинамических процессов в пространстве состояний[1] X, представленных парами (x,u) вектор-функций типа "*реакция, воздействие*", т.е. нейроморфной бихевиористической системой в виде N-"*черного ящика*", или формально:

$$N \subset \{(x,u): x \in AC^1(T,X),\ u \in \mathrm{L}_2(T,Y)\},\ \ \mathrm{Card}\, N \le \exp \aleph_0,$$

где (в терминологии [3]) (x,u) – пара "*траектория (состояние синапсов), управление (воздействие на рецепторы)*", $\aleph_0$ – алеф нуль, $\exp \aleph_0$ – континуум; термин "нелинейный пучок" означает, что для траекторий пучка *a priori* не предполагается наличие *принципа суперпозиции*, – когда зависимость выходных *x*-переменных от входных *u*-воздействий суть *линейная* [3].

Кроме того, примем, что дифференциальная реализация N-системы должна иметь второй порядок[2], т.е. содержать член $\hat{A}\ddot{x}$, где оператор-функция $\hat{A}: T \to L(X,X)$ обладает свойствами:[3]

$$\hat{A} \in \mathrm{L}_\infty(T, L(X,X)),$$
$$\mu\{t \in T:\ \hat{A}(t) = 0 \in L(X,X)\} = 0;$$

при этом нарушение условия *эквивалентности нормальной системе*, а именно:

$$\mu\{t \in T:\ \mathrm{Ker}\,\hat{A}(t) \ne \{0\} \subset X\} \ne 0,$$

необременительно (допустимо); в данном контексте см. ниже замечание 1.

Рассмотрим задачу: для фиксированной пары $(N, \hat{A})$ определить необходимые и достаточные условия, выраженные в терминах нелинейного пучка динамических процессов N и оператор-функции $\hat{A}$, существования упорядоченного набора из восьми оператор-функций

$$(A_1, A_0, B, \mathbb{D}_1, \mathbb{D}_2, \mathbb{D}_3, \mathbb{D}_4, \mathbb{D}_5) \in \mathbb{L}_2,$$

для которого осуществима билинейная дифференциальная реализация (БДР) второго порядка с запаздыванием $\bar{\tau} = \mathrm{const} \ge 0$, имеющая аналитическое представление вида:[4]

$$\begin{gathered}\hat{A}\ddot{x} + A_1\dot{x} + A_0 x = \\ = Bu + \mathbb{D}_1(x,x) + \mathbb{D}_2(x,\dot{x}) + \mathbb{D}_3(\dot{x},\dot{x}) + \\ + \mathbb{D}_4(E(u),y) + \mathbb{D}_5(E(u),\dot{y}),\ \ \forall (x,u) \in N,\end{gathered} \tag{1}$$

$$t \mapsto y(t) := \begin{cases} x(t-\bar{\tau}), \text{ если } t_0 + \bar{\tau} \le t \le t_1; \\ 0 \in X, \text{ если } t_0 \le t < t_0 + \bar{\tau}. \end{cases} \tag{1*}$$

Условимся, что если моделируемые операторы БДР-системы (1)-(1*) предполагается искать в классе *стационарных*, то будем их строить в классе *непрерывных*, и при этом писать

$$(A_1, A_0, B, \mathbb{D}_1, \mathbb{D}_2, \mathbb{D}_3, \mathbb{D}_4, \mathbb{D}_5) \in \mathbb{L}^*.$$

В связи с предложенной математической постановкой разрешимости задачи существования нейроморфной динамической модели отметим, что каждая область математики, как правило, содержит свои ведущие проблемы, которые настолько трудны, что их полное решение даже и не ожидается, но которые стимулируют постоянный поток работ и служат главными вехами на пути прогресса в этой области. В рамках КТДР-исследований такой проблемой является проблема классификации непрерывных бихевиористических систем (в том числе нейродинамических протомоделей типа "*черный ящик*"), рассматриваемых так, как если бы они точно (прецизионно) совпадали с решениями идеализированных дифференциальных моделей, в том числе высших порядков с фактором запаздывания. В наиболее сильной форме она предполагает модельную классификацию таких си-

---

[1] Выбор сепарабельного гильбертова пространства в качестве пространства состояний уравнений динамики исследуемой нейропопуляции обеспечивает интегративный характер нейроморфного моделирования с большим числом переменных [23]. Так, для *счетного* числа нейронов их дифференциальные уравнения второго порядка в гильбертовых пространствах X_i можно свести к *одному* уравнению (второго порядка) в расширенном гильбертовом пространстве $X = \oplus X_i$, $i = 1, 2, \ldots$, где $\oplus$ – прямая сумма пространств [17, с. 54]; см. также ниже пример 5.

[2] Использование в нейродинамике дифференциальных моделей *второго* порядка позволяет моделировать в качестве эндогенного фактора (координат вектора состояния) изменение скорости исследуемых нейроимпульсов.

[3] В случае отсутствия (в контексте математического моделирования нейродинамики) априорной информации об оператор-функции $\hat{A}$ можно считать, что $\hat{A}$ представляет оператор гомотетии с коэффициентом 1.

[4] Равенство в дифференциальном уравнении (1) рассматривается как тождество в пространстве $\mathrm{L}_1(T,X)$.

стем с точностью до соответствующего класса дифференциальных реализаций, в частности, класса БДР-моделей (1)-(1*), в обосновании чего ниже служат КТДР-теоремы 1–2 и их следствия. Данная конструкция может стать отправной точкой в развитии геометрической теории нестационарных полилинейных векторных полей [9], параллельно развивая новый математический метаязык для прецизионного дифференциального моделирования нелинейных бесконечномерных динамических систем.

2. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЙ ПРИЗНАК БДР-МОДЕЛИ: ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ФОРМУЛИРОВКИ

Опишем теперь аналитическую схему решения вопроса о разрешимости (или неразрешимости) БДР-задачи (1)-(1*). Итак, пусть $Z := X \otimes X$ – гильбертово тензорное произведение [10, с. 54] гильбертовых пространств X и X с кросс-нормой $\|\cdot\|_Z$, определяемой скалярным произведением [8] в X. Сверх того, введем новые обозначения:

$$U := X \times X \times Y \times Z \times Z \times Z \times Z \times Z\,,$$

$$\|(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot,\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)\|_U := (\|\cdot\|_X^2 + \|\cdot\|_X^2 + \|\cdot\|_Y^2 + \|\cdot\|_Z^2 + \|\cdot\|_Z^2 + \|\cdot\|_Z^2 + \|\cdot\|_Z^2 + \|\cdot\|_Z^2)^{1/2}\,;$$

$$\mathbf{L}_2 := \mathrm{L}_2(T, L(X,X)) \times \mathrm{L}_2(T, L(X,X)) \times \mathrm{L}_2(T, L(Y,X)) \times$$

$$\times \mathrm{L}_2(T, L(Z,X)) \times \mathrm{L}_2(T, L(Z,X)) \times \mathrm{L}_2(T, L(Z,X)) \times \mathrm{L}_2(T, L(Z,X)) \times \mathrm{L}_2(T, L(Z,X));$$

ясно, что функциональное пространство $\mathbf{L}_2$ (с топологией произведения) линейно гомеоморфно банахову пространству $\mathrm{L}_2(T, L(U,X))$.

Обозначим через π – универсальное билинейное отображение $\pi : X \times X \to X \otimes X$; на языке категорий морфизм π определяет тензорное произведение как универсальный отталкивающий объект [10, с. 40]. Универсальность билинейного отображения π состоит также в том, что

$$\pi : X \times X \to X \otimes X,$$

$$(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2) \mapsto \pi(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2) = \mathrm{x}_1 \otimes \mathrm{x}_2,\ \|\mathrm{x}_1 \otimes \mathrm{x}_2\|_Z = \|\mathrm{x}_1\|_X \|\mathrm{x}_2\|_X\,;$$

данные соотношения важны для аналитического представления нелинейного функционального оператора Релея–Ритца в части конкретизации (в его конструкции) нормы $\|\cdot\|_U$.

Далее считаем, что декартов квадрат $X^2 = X \times X$ наделен нормой $(\|\cdot\|_X^2 + \|\cdot\|_X^2)^{1/2}$. В данной постановке $\pi \in \mathcal{L}(X^2, Z)$ и, с учетом теоремы 2 [7, с. 245], для любого билинейного отображения $\mathcal{D} \in \mathcal{L}(X^2, X)$ всегда найдется линейный непрерывный оператор $\mathrm{D} \in L(Z, X)$ такой, что $\mathcal{D} = \mathrm{D} \circ \pi$, при этом для любой пары $(x,u) \in N$ будут выполняться (согласно (1*)) включения:

$$\pi(x,x),\ \pi(x,\dot{x}),\ \pi(\dot{x},\dot{x}) \in \mathrm{L}_\infty(T,Z),\ \ \pi(E(u),y),\ \pi(E(u),\dot{y})) \in \mathrm{L}_2(T,Z).$$

Данные построения подытоживает следующее утверждение.

Лемма 1. *Для любого набора* $(A_1, A_0, B, \mathbb{D}_1, \mathbb{D}_2, \mathbb{D}_3, \mathbb{D}_4, \mathbb{D}_5) \in \mathbb{L}_2$ *и отображения*

$$F : \mathrm{L}_2(T,X) \times \mathrm{L}_2(T,X) \times \mathrm{L}_2(T,Y) \times$$

$$\times \mathrm{L}_2(T,X^2) \times \mathrm{L}_2(T,X^2) \times \mathrm{L}_2(T,X^2) \times \mathrm{L}_2(T,X^2) \times \mathrm{L}_2(T,X^2) \to \mathrm{L}_1(T,X),$$

$$(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8) \mapsto F(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8) :=$$

$$= A_1 y_1 + A_0 y_2 + B\, y_3 + \mathbb{D}_1 y_4 + \mathbb{D}_2 y_5 + \mathbb{D}_3 y_6 + \mathbb{D}_4 y_7 + \mathbb{D}_5 y_8$$

существуют единственный кортеж оператор-функций

$$(D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6, D_7, D_8) \in \mathbf{L}_2$$

и, соответственно, единственное линейное отображение

$$M : \mathrm{L}_2(T,U) \to \mathrm{L}_1(T,X),$$

имеющее аналитическое представление вида

$$(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7, z_8) \mapsto M(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7, z_8) :=$$

$$= D_1 z_1 + D_2 z_2 + D_3 z_3 + D_4 z_4 + D_5 z_5 + D_6 z_6 + D_7 z_7 + D_8 z_8\,,$$

такое, что выполняется следующее функциональное равенство:

$$(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8) \mapsto F(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8) =$$
$$= M(y_1, y_2, y_3, \pi(y_4), \pi(y_5), \pi(y_6), \pi(y_7), \pi(y_8)),$$

которое, в свою очередь, индуцирует для оператор-функций из конструкций отображений F *и* M *следующие операторные соотношения*:

$$A_1 = D_1,\ A_0 = D_2,\ B = D_3,\ \mathbb{D}_1 = D_4 \circ \pi,\ \mathbb{D}_2 = D_5 \circ \pi,$$
$$\mathbb{D}_3 = D_6 \circ \pi,\ \mathbb{D}_4 = D_7 \circ \pi,\ \mathbb{D}_5 = D_8 \circ \pi.$$

Везде далее (в контексте БДР-задачи (1)-(1*)) примем

$$V_N := \mathrm{Span}\{(\dot{x}, x, u, \pi(x,x),\ \pi(x,\dot{x}),\ \pi(\dot{x},\dot{x}),$$
$$\pi(E(u),y),\ \pi(E(u),\dot{y})) \in \mathrm{L}_2(T,U):\ (x,u) \in N\}.$$

Следующая лемма обобщает бихевиористическое условие (7) [11].

Лемма 2. *Пусть*

$$S := \{t \in T : (g(t), w(t), v(t), q(t), s(t), h(t), \hat{u}(t), \tilde{u}(t)) = 0 \in U\},$$
$$Q := \{t \in T : \dot{g}(t) = 0 \in X\},$$

где $(g, w, v, q, s, h, \hat{u}, \tilde{u}) \in V_N$. *Тогда имеет место* $S \underset{\mathrm{mod}\,\mu}{\subseteq} Q$.

Далее, пусть $(\mathrm{L}_+(T,R), \leq_{\mathrm{L}})$ – положительный конус [12] классов μ-эквивалентности всех вещественных неотрицательных μ-измеримых на интервале T функций с квазиупорядочением $\leq_{\mathrm{L}}$, при котором $\xi' \leq_{\mathrm{L}} \xi''$ в том и только в том случае, если $\xi'(t) \leq \xi''(t)$ μ-почти всюду в T. При этом для заданного подмножества $W \subset \mathrm{L}_+(T,R)$ через $\sup_{\mathrm{L}} W$ обозначим наименьшую верхнюю грань подмножества W, если эта грань существует в конусе $\mathrm{L}_+(T,R)$ в структуре квазиупорядочения $\leq_{\mathrm{L}}$, в частности, легко установить, что имеет место соотношение

$$\sup_{\mathrm{L}}\{\xi', \xi''\} = \xi' \vee \xi'' := 2^{-1}(\xi' + \xi'' + |\xi' - \xi''|).$$

В данной постановке рассмотрим решетку с ортодополнением [17, с. 339] вида:

$$\mathcal{R}(W) := \{\xi \in \mathrm{L}_+(T,R) : \xi \leq_{\mathrm{L}} \sup_{\mathrm{L}} W\}.$$

Тогда $(\mathcal{R}(W), \leq_{\mathrm{L}})$ – решетка с наименьшим $\chi_\varnothing \in \mathrm{L}_+(T,R)$ и наибольшим $\sup_{\mathrm{L}} W \in \mathrm{L}_+(T,R)$ элементами; здесь и далее $\chi_\varnothing$ – "нуль-функция" конуса $\mathrm{L}_+(T,R)$. В контексте теоремы 17 [7, с. 68] и следствия 1 [7, с. 69] несложно извлечь более общее утверждение; ниже $\inf_{\mathrm{L}}$ – наибольшая нижняя $\leq_{\mathrm{L}}$-грань.

Лемма 3. *Решетка* $\mathcal{R}(W)$ *– полная, т.е.*

$$\inf_{\mathrm{L}} V,\ \sup_{\mathrm{L}} V \in \mathcal{R}(W)\ \ \forall V \subseteq \mathcal{R}(W).$$

Пусть $\Psi : V_N \to \mathrm{L}_+(T,R)$ – энтропийный оператор Релея–Ритца [4]:

$$t \mapsto \Psi(\varphi)(t) := \begin{cases} \left\|\hat{A}(t)\dot{g}(t)\right\|_X / \left\|\varphi(t)\right\|_U, \text{ если } \varphi(t) \neq 0 \in U; \\ 0 \in R, \text{ если } \varphi(t) = 0 \in U; \end{cases}$$

где $\varphi := (g, w, v, q,\ s, h,\ \hat{u},\ \tilde{u}) \in V_N$. Ясно, что имеет место равенство

$$\left\|(g(t), w(t), v(t), q(t),\ s(t),\ h(t),\ \hat{u}(t),\ \tilde{u}(t))\right\|_U :=$$
$$= (\|g(t)\|_X^2 + \|w(t)\|_X^2 + \|v(t)\|_Y^2 + \|q(t)\|_Z^2 + \|s(t)\|_Z^2 + \|h(t)\|_Z^2 + \|\hat{u}(t)\|_Z^2 + \|\tilde{u}(t)\|_Z^2)^{1/2},$$

при этом функции

$$(g, w, v) \mapsto \eta_{\mathrm{L}}(g, w, v) := \| g, w, v, 0, \ldots, 0 \|_U^2,$$
$$(q, s, h, \hat{u}, \tilde{u}) \mapsto \eta_{\mathrm{B}}(q, s, h, \hat{u}, \tilde{u}) := \| 0,0,0, q, s, h, \hat{u}, \tilde{u} \|_U^2,$$

назовем, соответственно, линейной и билинейной характеристиками оператора Релея–Ритца.

В силу леммы 2 на интервале времени T выполняется

$$\operatorname{supp}\Psi(\varphi)=\operatorname{supp}\left\|\hat{A}\dot{g}\right\|_X \ (\operatorname{mod}\mu)\,;$$

здесь в определении supp-конструкции носителя функции следуем [7, с. 137] (т.е. носитель определяется с точностью до множества меры нуль).

Энтропийный оператор Ψ удовлетворяет весьма простым (но важным) соотношениям

$$\chi_{\varnothing}\le_{\mathrm{L}}\Psi(\varphi)=\Psi(r\varphi),\quad r\in R^*:=R\setminus\{0\},\ \ \varphi\in V_N;$$

ниже будем различать в обозначениях образ точки $\Psi(\varphi)$ и образ множества $\Psi[\{\varphi\}]$.

Теория оператора Релея–Ритца нуждается в точном функционально-геометрическом языке, что заставляет уделять этому языку особое внимание. Поэтому прежде чем идти дальше, будет полезно ввести дополнительную терминологию. А именно, функциональный оператор Ψ индуцирует отображение $P\Psi:P_N\to\mathrm{L}_+(T,R)$, которое, по сложившейся в теории представлений традиции [10, с. 239], назовем *проективизацией* оператора Релея–Ритца:

$$P\Psi(\gamma):=\Psi[\gamma],\ \gamma\in P_N\ \ (\gamma\subset V_N),$$

где P_N – вещественное проективное пространство, ассоциированное с линейным многообразием V_N (с топологией, индуцированной из пространства $\mathrm{L}_2(T,U)$); т.е. P_N есть множество орбит мультипликативной группы R^*, действующей на $V_N\setminus\{0\}$. В данной геометрической трактовке ключевым моментом являются топологические свойства пространства $P_N,\ \dim P_N<\aleph_0$, разумеется, в первую очередь (в контексте предложения 1), его компактность, в частности, если имеет место $\dim V_N=3$, то компактное 2-многообразие P_N устроено как лист Мёбиуса, к которому по его границе приклеен круг [13, с. 162]. Попутно отметим, что на P_N можно ввести геометрическую структуру *CW*-комплекса [13, с. 140], что, в свою очередь, упрощает рассмотрение вопроса о геометрической реализации многообразия P_N – теорема 9.7 [13, с. 149].

Теорема 1. *Каждое из следующих трех первых условий влечет за собой два других*:

(i) *БДР-задача* (1)-(1*) *разрешима относительно* $(A_1,A_0,B,\mathbb{D}_1,\mathbb{D}_2,\mathbb{D}_3,\mathbb{D}_4,\mathbb{D}_5)\in\mathbb{L}_2$;

(ii) $\exists\theta\in\mathrm{L}_2(T,R):\Psi(\varphi)\le_{\mathrm{L}}\theta,\ \forall\varphi\in V_N$;

(iii) $\exists\sup_{\mathrm{L}}P\Psi[P_N]:\ \sup_{\mathrm{L}}P\Psi[P_N]\in\mathrm{L}_2(T,R)$.

При этом, для выполнения $(A_1,A_0,B,\mathbb{D}_1,\mathbb{D}_2,\mathbb{D}_3,\mathbb{D}_4,\mathbb{D}_5)\in\mathbb{L}^*$ *необходимо чтобы*

(iv) $\mathcal{R}(P\Psi[P_N])\subset\mathrm{L}_\infty(T,R)$.

Замечание 1. Теорему 1 можно рассматривать как начальный этап в изучении проблемы[5], когда пучку управляемых траекторных кривых N от *неявного* дифференциального уравнения высшего порядка требуется сопоставить *явную* нестационарную билинейную дифференциальную систему второго порядка с тем же пучком управляемых траекторных кривых N.

Доказательство. Будем пользоваться идеями работы [4]. Придерживаясь определения 1 [4], введем в рассмотрение конструкцию M_2-оператора $M:\mathrm{L}_2(T,U)\to\mathrm{L}_1(T,X)$ вида

$$\exists(D_1,D_2,D_3,D_4,D_5,D_6,D_7,D_8)\in\mathbf{L}_2:M(g,w,v,q,s,h,\hat{u},\widetilde{u}):=$$
$$=D_1g+D_2w+D_3v+D_4q+D_5s+D_6h+D_7\hat{u}+D_8\widetilde{u}$$
$$\forall(g,w,v,q,s,h,\hat{u},\widetilde{u})\in\mathrm{L}_2(T,U).$$

Остальные детали доказательства с небольшими уточнениями (с учетом приведенных выше лемм 1–3 для решетки $\mathcal{R}(P\Psi[P_N])$) содержит аналитическая схема M_2-продолжимости в форме следствия 2 [4] и теоремы 3 [4] (принцип максимума энтропии).

При этом необходимое условие (iv) для

[5] В частности, данная постановка уместна, когда разрешимую для пары $(N,\ \hat{A}_1)$ БДР-задачу необходимо редуцировать к разрешимой БДР-задаче для пары $(N,\ \hat{A}_2)$ в положении, когда $\mu\{t\in T:\operatorname{Ker}\hat{A}_1(t)\ne 0\in X\}\ne 0$, $\hat{A}_2$ – оператор гомотетии с коэффициентом 1; характер сопутствующих вычислений проиллюстрирован в примерах 1, 2.

$$(A_1, A_0, B, \mathbb{D}_1, \mathbb{D}_2, \mathbb{D}_3, \mathbb{D}_4, \mathbb{D}_5) \in \mathbb{L}^*$$

устанавливается модификацией доказательства теоремы 3 [11]. ■

Замечание 2. Необходимо отметить, что даже в случае $1 < \operatorname{Card} N < \aleph_0$ имеет место положение $\operatorname{Card} P_N = \exp \aleph_0$; но можно показать, что существует (теорема 17 [7, с. 68]) такое счетное множество $G \subset P_N$, что, если в пространстве $\mathrm{L}_+(T,R)$ лежит $\sup_{\mathrm{L}} P\Psi[P_N]$, то вещественную функцию $\zeta := \sup_{\mathrm{L}} P\Psi[P_N]$ осуществляет следующая $\sup$-конструкция:

$$t \mapsto \zeta(t) = \sup\{P\Psi(\gamma)(t) \in R : \gamma \in G\}.$$

Замечание 3. Доказательство теоремы 1 легко модифицировать так, чтобы сформулировать аналог теоремы 3 [12], выражающий в терминах углового расстояния в гильбертовом пространстве условия существования билинейной системы (1), реализующей пучки N_1, N_2, каждый из которых обладает своей БДР-моделью, в том числе, в математической постановке [11], когда моделируемые операторы дифференциальной системы (1) суть стационарные, т.е.

$$(A_1, A_0, B, \mathbb{D}_1, \mathbb{D}_2, \mathbb{D}_3, \mathbb{D}_4, \mathbb{D}_5) \in \mathbb{L}^*,$$

в частности, с оптимальной нормой [14].

В конкретных рассуждениях важен также следующий частный случай:

Следствие 1. *Если* $\dim V_N < \aleph_0$, $\Psi[V_N] \subset \mathrm{L}_2(T,R)$ *и найдется* $p \in [1, \infty)$, *при котором*

$$\Psi(\varphi_1 + \varphi_2) \leq_{\mathrm{L}} p\Psi(\varphi_1) + p\Psi(\varphi_2), \quad (\varphi_1, \varphi_2) \in V_N \times V_N,$$

то БДР-задача (1)-(1*) *разрешима.*

Заметим, что при $p = 1$ данное свойство в (контексте квазиупорядочения $\leq_{\mathrm{L}}$) сродни свойству “сублинейности” [12] функциональных операторов.

3. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ОПЕРАТОРА РЕЛЕЯ–РИТЦА В АНАЛИЗЕ РАЗРЕШИМОСТИ БДР-ЗАДАЧИ

В случае компактности проективного многообразия P_N (т.е. $\dim P_N < \aleph_0$) естественно попытаться связать это свойство с задачей построения решетки $\mathcal{R}(P\Psi[P_N])$ в контексте условий непрерывности проективизации оператора Релея–Ритца (см. также [15]). Ниже при выборе в предложении 1 метрической структуры в конусе $\mathrm{L}_+(T,R)$, прибегли к теоремам 15, 16 [7, сс. 65, 67]; в данной постановке $\mathrm{L}_+(T,R)$ – полное сепарабельное метрическое пространство.

Предложение 1. *Пусть* $\dim P_N < \aleph_0$ *и конус* $\mathrm{L}_+(T,R)$ *наделен топологией, индуцированной сходимостью по мере* μ, *или, что эквивалентно, инвариантной*[6] *метрикой*

$$\rho_T(f_1, f_2) := \int_T |f_1(\tau) - f_2(\tau)|(1 + |f_1(\tau) - f_2(\tau)|)^{-1} \mu(d\tau), \quad f_1, f_2 \in \mathrm{L}_+(T,R).$$

Тогда оператор $P\Psi : P_N \to \mathrm{L}_+(T,R)$ *будет непрерывным, если пучок* N *таков, что*

$$\forall \varphi \in V_N \setminus \{0\} : \operatorname{supp}\|\varphi\|_U = T \ (\mathrm{mod}\ \mu), \tag{2}$$

в частности, если

$$\forall \gamma \in P_N : \operatorname{supp} P\Psi(\gamma) = T \ (\mathrm{mod}\ \mu). \tag{3}$$

Отметим, что предложение 1 является развитием теоремы 3 [16], что подтверждает её методологическую важность в дифференциальном моделировании сложных динамических систем [3–5]. Одним из приложений этого результата является следующее утверждение.

Следствие 2. *Если при выполнении* (2) *или* (3) *оператор* $P\Psi$ *взаимно-однозначный, то* $P\Psi$ *– гомеоморфизм, а фундаментальная группа метрического пространства* $(P\Psi[P_N], \rho_T)$ *изоморфна аддитивной группе целых чисел* $\mathbb{Z}$ *при* $\dim \operatorname{Span} N = 2$ *и группе вычетов* $\mathbb{Z}_2$ *при* $\dim \operatorname{Span} N \geq 3$, *при-*

---

[6] Инвариантность означает $\rho_T(f+q, g+q) = \rho_T(f,g)$, $f, g, q \in \mathrm{L}_+(T,R)$. Вариант неинвариантной неполной метрики, обеспечивающей непрерывность оператора Релея–Ритца при нарушении условия (2) или (3), рассмотрен в [15].

чем, пространство $(P\Psi[P_N],\rho_T)$ *ориентируемо, если размерность линейной оболочки* $\mathrm{Span}\ N$ *четная, и неориентируемо, если эта размерность нечетная*.

Принимая во внимание, что непрерывная вещественная функция на компактном пространстве достигает своих наибольшего и наименьшего значений, приходим к заключению, что при выполнении (2) или (3) и учетом теоремы 5 [7, с. 28], для случая $1 \le \dim P_N < \aleph_0$ и при наличии $\sup_{\mathrm{L}} P\Psi[P_N]$ найдутся такие точки $\gamma', \gamma'' \in P_N$, что будут верны оценки:

$$\rho_T(P\Psi(\gamma'),\chi_\varnothing) = \sup\{\rho_T(P\Psi(\gamma),\chi_\varnothing) : \gamma \in P_N\} \le \rho_T(\sup_{\mathrm{L}} P\Psi[P_N],\chi_\varnothing) < \mu(T),$$

$$\rho_T(P\Psi(\gamma''),\sup_{\mathrm{L}} P\Psi[P_N]) = \inf\{\rho_T(P\Psi(\gamma),\sup_{\mathrm{L}} P\Psi[P_N]) : \gamma \in P_N\} \ge 0.$$

Заметим, что включение $P\Psi(\gamma') \in \mathrm{L}_2(T,R)$ не гарантирует вложение $\mathcal{R}(P\Psi[P_N]) \subset \mathrm{L}_2(T,R)$ (см. пример 1 из [16]). При этом отметим, что $\dim P_N = 0$ приводит к положению

$$\sup_{\mathrm{L}} P\Psi[P_N] = P\Psi[P_N] = \left\|\hat{A}\ddot{x}\right\|_{\mathrm{X}} / (\|\dot{x}\|_X^2 + \|x\|_X^2 + \|u\|_Y^2 + \|x\|_X^4 +$$

$$+ \|x\|_X^2\|\dot{x}\|_X^2 + \|\dot{x}\|_X^4 + \|E(u)\|_X^2\|y\|_X^2 + \|E(u)\|_X^2\|\dot{y}\|_X^2)^{1/2}. \tag{4}$$

В контексте теоремы 1 и предложения 1 можно уточнить условия существования решетки $\mathcal{R}(P\Psi[P_N])$. В качестве отправной точки введем вспомогательную конструкцию: для натурального n обозначим через W_n конечное n^{-1}-плотное подмножество в метрическом пространстве $(P\Psi[P_N],\rho_T)$; подмножество W_n найдется в силу предложения 1. Ниже $\mathrm{Lim}_{\rho_T}\{\xi_n\}$ означает предел последовательности $\{\xi_n\} \subset \mathrm{L}_+(T,R)$ в топологии, индуцированной метрикой ρ_T.

Теорема 2. *Пусть* $\{W_i\}_{i=1,\dots,n}$, $W_i = \{\zeta_1,\dots,\zeta_{k_i}\} \subset P\Psi[P_N]$ *и* $f_n := \xi_1 \vee \ldots \vee \xi_n$, $\xi_i = \zeta_1 \vee \ldots \vee \zeta_{k_i}$, $1 \le i \le n$. *Тогда конус* $\mathrm{L}_+(T,R)$ *содержит решетку* $\mathcal{R}(P\Psi[P_N])$, *если и только если*

$$\rho_T(f_n, f_m) \to 0 \ (n, m \to \infty),$$

причём БДР-разрешимость приобретает вид: *БДР-реализация* (1)-(1*) *существует тогда и только тогда, когда* $\mathrm{Lim}_{\rho_T}\{f_n\} \in \mathrm{L}_2(T,R)$, *что равносильно* $\mathcal{R}(P\Psi[P_N]) \subset \mathrm{L}_2(T,R)$.

С учетом теоремы Радона–Никодима [17, с. 38] получаем

Следствие 3. *Дифференциальная реализация* (1)-(1*) *существует, если и только если функционал* $S \mapsto \int_S (\sup_{\mathrm{L}} P\Psi[P_N](\tau))^2 \mu(d\tau) : \wp_\mu \to R$ *суть абсолютно* μ*-непрерывная мера на* $\wp_\mu$.

В завершении приведем примеры, снимающие возможное представление, что выше особое ударение мы всюду делали исключительно на идейном аспекте каждого понятия, тем самым невольно пренебрегая его рассмотрением с вычислительной точки зрения; всюду ниже считаем, что моделирование осуществляется с нулевым запаздыванием $\bar{\tau} = 0$ (т.е. $y(\cdot) = x(\cdot)$).

Пример 1. Пусть $T = [0,10]$, $Y := X$, $\hat{A}$ – оператор гомотетии [12] с единичным коэффициентом, $A_1 = 0 \in L(X,X)$, $\mathbb{D}_1 = \mathbb{D}_3 = \mathbb{D}_4 = \mathbb{D}_5 = 0 \in \mathcal{L}(X^2,X)$, $e \in X$, $\|e\|_X = 1$,

$$t \mapsto x(t) = (t\sin t)e, \ t \mapsto u(t) = 0 \in \mathrm{L}_2(T,X).$$

Тогда функция $f := \sup_{\mathrm{L}} P\Psi(P_N) = \|\ddot{x}\|_X (\|x\|_X^2 + \|x\|_X^2\|\dot{x}\|_X^2)^{-1/2}$ (см. рис. 1) не принадлежит пространству $\mathrm{L}_2(T,R)$ и, следовательно, согласно теореме 1 и формуле (4), реализация (1) для неуправляемого процесса $N = \{(x,u)\}$ *не существует*.

Пример 2. Изменим постановку примера 1 тем, что

$$t \mapsto u(t) = (t\sin^2 t + 2^{-1}t^2\sin 2t + \cos t)e.$$

Тогда (см. рис. 2) $f := \sup_{\mathrm{L}} P\Psi(P_N) = \|\ddot{x}\|_X (\|x\|_X^2 + \|x\|_X^2\|\dot{x}\|_X^2 + \|u\|_Y^2)^{-1/2} \in \mathrm{L}_2(T,R)$ и значит реализация (1) для управляемого процесса $N = \{(x,u)\}$ *существует*; нетрудно установить, что

$$\ddot{x} + x = 2u - 2\mathbb{D}_2(x,\dot{x}),$$

где $\mathbb{D}_2 = \langle\cdot,\cdot\rangle_X\, e$, $\langle\cdot,\cdot\rangle_X$ – скалярное произведение в X.

Отметим, что для более сложных вариантов задания пары $(t \mapsto x(t), t \mapsto u(t))$ символьные вычисления функции $f^2(\cdot)$ (аналогичной рис. 1, 2) можно проводить средствами компьютерной алгебры в математической физике [18]. В данном контексте анализ разрешимости БДР-задачи примеров 1, 2 можно модифицировать для качественного анализа редукции точных многомерных решений диффузии со степенными нелинейностями к задаче Коши для счетной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с полилинейной структурой.

Следующий пример характеризует факт наличия свойства *нестационарности* БДР-модели, как эндогенного фактора дифференциальной реализации пучка N (см. пункт (iv) теоремы 1).

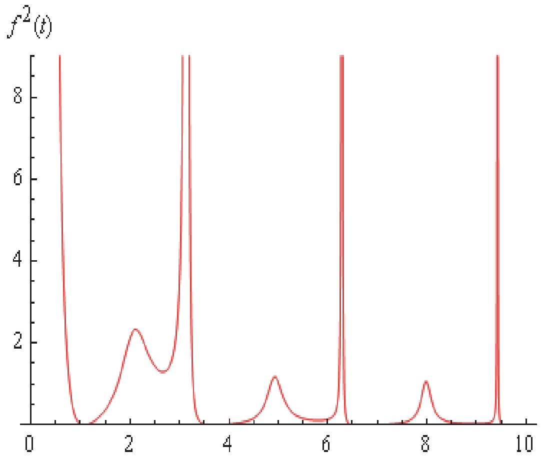

Рис. 1. $f^2(t)=(2\cos t - t\sin t)^2 \times$ $\times((t\sin t)^2 + (t\sin t)^2(\sin t + t\cos t)^2)^{-1}$

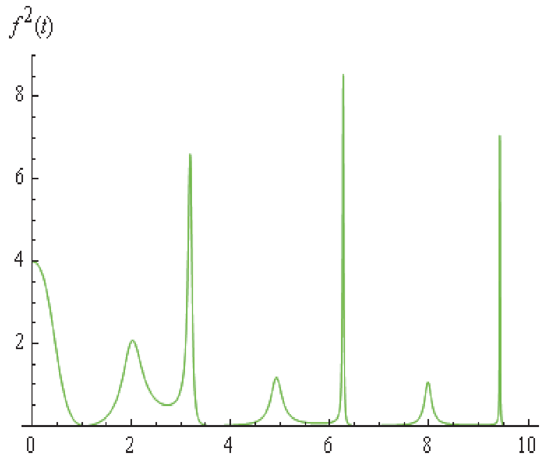

Рис. 2. $f^2(t)=(2\cos t - t\sin t)^2 \times ((t\sin t)^2 +$ $+(t\sin t)^2(\sin t + t\cos t)^2 + (t\sin^2 t + 2^{-1}t^2\sin 2t + \cos t)^2)^{-}$

Пример 3. Пусть $T=[0,1]$ и коэффициент гомотетии оператора $\hat{A}$ равен 5, при этом

$$N=\{(x,u)\},$$

$$t \mapsto x(t)=t^{1,6}e,\ \ t \mapsto u(t)=\chi_T(t)e.$$

Тогда (как несложно установить) функция $f := \sup_{\mathrm{L}} P\Psi(P_N)$ согласно формулы (4) удовлетворяет неравенствам

$$0{,}6t^{-0,4} \le \sup_{\mathrm{L}} P\Psi(P_N) \le 4{,}8t^{-0,4},$$

где второе неравенство гарантирует (в силу пункта (iii) теоремы 1) существование некоторой БДР-модели, реализующей процесс-пучок N, при этом первое неравенство, согласно пункта (iv) теоремы 1, показывает, что данная модель не может быть *стационарной*.

Приведем пример, иллюстрирующий положение, когда свойство *линейности* дифференциальной модели реализации недостаточно для прецизионного построения уравнений динамики пучка N, что важно при моделировании синергетического фактора нейропопуляции.

Пример 4. Пусть $T=[1,2]$, $\hat{A}$ – оператор гомотетии с коэффициентом 1, при этом

$$N=\{(x_1,u_1),(x_2,u_2),(x_3,u_3)\},$$

$$t \mapsto x_1(t)=(t^2+2)e,\ \ t \mapsto u_1(t)=2^{-1}\chi_T(t)e,$$

$$t \mapsto x_2(t)=te,\ \ t \mapsto u_2(t)=\chi_T(t)e,$$

$$t \mapsto x_3(t)=(2-4\sqrt{2})te,\ \ t \mapsto u_3(t)=\chi_T(t)e.$$

Вначале покажем, что динамический пучок N *не может* иметь линейную дифференциальную реализацию. С этой целью достаточно установить, что линейная характеристика η_{L}, отвечающая оператору Релея–Ритца, индуцирует функцию $t \mapsto \eta_{\mathrm{L}}(g,w,v)(t)$ с нулем порядка 2. Характеристическим условием данного положения будет следующая система уравнений (относительно параметров α, β):

$$\| x_1(t)+\alpha x_2(t)+\beta x_3(t)\|_X^2 = ((t^2+2)+\alpha t+\beta(2-4\sqrt{2})t)^2 = 0,$$

$$\| \dot{x}_1(t) + \alpha \dot{x}_2(t) + \beta \dot{x}_3(t) \|_X^2 = (2t + \alpha \chi_T(t) + \beta(2 - 4\sqrt{2})\chi_T(t))^2 = 0,$$
$$\| u_1(t) + \alpha u_2(t) + \beta u_3(t) \|_X^2 = (2^{-1}t + \alpha t + \beta t)^2 = 0,$$

откуда, несложно вычислить, что $\alpha = -1, \beta = 0{,}5$, при этом точкой нуля будет $t = \sqrt{2}$.

Теперь покажем, что БДР-модель (1) для пучка N *существует*. Для этого достаточно установить, что сумма линейной и билинейной характеристик (параметризированных по α, β) оператора Релея–Ритца для пучка N ограничена снизу некоторой функцией вида:

$$t \mapsto r\chi_T(t), r \in (0, \infty).$$

На этом пути легко видеть, что при любых $t \in [1, 2], \alpha, \beta \in R$ будет

$$\eta_L(t,\alpha,\beta) + \eta_B(t,\alpha,\beta) \geq$$
$$\geq \| \dot{x}_1(t) + \alpha \dot{x}_2(t) + \beta \dot{x}_3(t) \|_X^2 + \| u_1(t)\dot{x}_1(t) + \alpha u_2(t)\dot{x}_2(t) + \beta u_3(t)\dot{x}_3(t) \|_X^2 =$$
$$= (2t + \alpha + \beta(2 - 4\sqrt{2}))^2 + (t^2 + \alpha t + \beta(2 - 4\sqrt{2})t)^2 =$$
$$= [(2t + \gamma(\alpha,\beta))^2 + t^2(t + \gamma(\alpha,\beta))^2]\Big|_{\gamma(\alpha,\beta) = \alpha + \beta(2-4\sqrt{2})} \geq$$
$$\geq [(2t + \gamma(\alpha,\beta))^2 + (t + \gamma(\alpha,\beta))^2]\Big|_{\gamma(\alpha,\beta) = \alpha + \beta(2-4\sqrt{2})} =$$
$$= [(t + \lambda(t,\gamma))^2 + \lambda^2(t,\gamma)]\Big|_{\lambda(t,\gamma) = t + \gamma(\alpha,\beta)} \geq$$
$$\geq [(t + \theta(t))^2 + \theta^2(t)]\Big|_{\theta(t) = -t/2} = t^2/2 \geq 0{,}5\chi_T(t).$$

Можно проверить, что БДР-модель (1) для пучка N имеет аналитическое представление:

$$\ddot{x} + x = \mathbb{D}_5(u, \dot{x}),$$

где $\mathbb{D}_5(\cdot,\cdot) = -\langle \cdot,\cdot \rangle_X \, e$.

Пример 5. Конструкция из сноски 1, позволяет построить общую дифференциальную реализацию (с вектором состояний $X \oplus X \oplus X$) для динамических пучков из примеров 2–4.

Непосредственно из примера 4, как его методологическое обобщение, вытекают два важных теоретико-модельных вывода, с аналитической проверки которых по существу должен начинаться любой качественный анализ задачи БДР-моделирования (1)-(1*); при этом позволяющих сократить на базе чисто инженерных идей (основанных на опыте и здравом смысле) разрыв между теорией и практикой. Первый вывод состоит в том, что конечный динамический пучок N может иметь на интервале T интерполяционное представление в классе *полиноминальных* сплайн-функций [19]. Второй вывод выражает следующее утверждение:

Предложение 2. *Пусть динамический пучок* N *удовлетворяет условию*:

$$\exists(g,w,v,q,s,h,\hat{u},\widetilde{u}) \in V_N : \| \hat{A}\dot{g} \|_X \left(\sqrt{\eta_L(g,w,v)} + \chi_{S_{\dot{g}}}\right)^{-1} \notin L_2(T,R), \qquad (5)$$

где $\chi_{S_{\dot{g}}}$ *– характеристическая функция множества* $S_{\dot{g}} = T \setminus \operatorname{supp} \dot{g}$.

Тогда дифференциальная реализация данного пучка не может иметь аналитическое представление (1)-(1*), *в котором* ***все билинейные операторы*** *суть нулевые*.

Условие (5) можно ослабить (конструктивно усилить), сведя его к поиску средствами компьютерной алгебры нулей функции $\eta_L + \eta_B$, параметризированной коэффициентами интерполяционного представления пучка N в классе полиноминальных сплайн-функций; см. также полезные предложения 2.6.1 и 2.6.4 [19, сс. 67, 69] о расположении нулей полиномов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенные выше результаты подтверждают, что перманентно развиваемая КТДР может представлять универсальный язык для междисциплинарного обмена научными результатами в рамках энтропийного анализа. Действительно, она достаточно обща для того, чтобы не вносить своих собственных ограничений в математическое описание процессов апостериорного моделирования нелинейных бесконечномерных динамических систем, и в тоже время, в силу своей строгости, она устраняет возможность весьма распространённых разночтений в толковании такого ключевого понятия теории идентификации систем, как *структурная идентифицируемость*. При этом не позволяя этому понятию окрасится в субъективные тона, а напротив, придав ему полностью математически формализованный смысл [20], обеспечивая устойчивый интерес со стороны тех, кто ставит себе в КТДР не самые узкие цели. В целом можно убедиться, что понимание природы полилинейных моделей, как формы представления уравнений динамики сложных систем (в том числе нейроморфных), способствует прояснению интуитивных представлений об их динамике и мотивировке всего обсуждения. К тому же, не откажем себе в удовольствии заметить, что "билинейный аппарат" КТДР, получивший продвижение выше, доставляет, по меньшей мере, эстетическое удовлетворение; аналитик, преследующий чисто эстетические цели, содействует созиданию метаязыка, более приспособленного к тому, чтобы удовлетворить математические запросы нейромоделирования [21–23].

Для того чтобы пойти дальше, не сложно указать то теоретико-системное направление, которое может составить алгебраическую основу (без чрезмерного нагнетания средств алгебраической геометрии) следующего этапа развития качественной теории дифференциальной реализации высших порядков [5], в том числе, с неполным измерением вектора состояний [24]. А именно, переход в моделируемой нейроморфной динамике от *билинейной* структуры нелинейных связей к *полилинейным*[7] связям. Методологически этот переход состоит в использования геометрического языка тензорных структур пространств Фока [17] и проективных представлений [10] в контексте исследования метрический свойств энтропийного операторов Релея–Ритца [15] средствами компьютерной алгебры в математической физике [18].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Поляков Г.И. О принципах нейронной организации мозга. М.: МГУ, 1965.
2. Brzychczy S., Poznanski R. Mathematical Neuroscience. Academic Press. 2013.
3. Калман Р., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем. М.: Мир, 1971.
4. Rusanov V.A., Banshchikov A.V., Daneev A.V., Lakeyev A.V. Maximum Entropy Principle in the Differential Second-Order Realization of a Nonstationary Bilinear System // Advances in Differential Equations and Control Processes. 2019. Vol. 20. No. 2. P. 223–248.
5. Rusanov V.A., Daneev A.V., Lakeyev A.V., Sizykh V.N. Higher-Order Differential Realization of Polylinear-Controlled Dynamic Processes in a Hilbert Space // Advances in Differential Equations and Control Processes. 2018. Vol. 19. No. 3. P. 263–274.
6. Савельев А.В. Источники вариаций динамических свойств нервной системы на синаптическом уровне в нейрокомпьютинге // Искусственный интеллект. НАН Украины. 2006. № 4. С. 323–338.
7. Канторович Л.В. Акилов Г.П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.
8. Иосида К. Функциональный анализ. М.: Мир, 1967.
9. Rusanov V.A., Daneev A.V., Lakeyev A.V., Linke Yu.É. To Existence of a Nonstationary Quasi-Linear Vector Field Realizing the Expansion of a Control Trajectory Bundle in Hilbert Space // WSEAS Transactions on Systems. 2020. Vol. 19. P. 115–120.
10. Кирилов А.А. Элементы теории представлений. М.: Наука, 1978.
11. Rusanov V.A., Daneev A.V., Lakeev A.V., Linke Yu.É. On the Differential Realization Theory of Nonlinear Dynamic Processes in Hilbert Space // Far East Journal of Mathematical Sciences. 2015. Vol. 97. No. 4. P. 495–532.
12. Эдвардс Р. Функциональный анализ: Теория и приложения. М.: Мир, 1969.
13. Прасолов В.В. Элементы комбинаторной и дифференциальной топологии. М.: МЦНМО, 2014.
14. Русанов В.А., Данеев А.В., Линке Ю.Э. К оптимизации процесса юстировки модели дифференциальной реализации многомерной системы второго порядка // Дифференциальные уравнения. 2019. Т. 55. № 10. С. 1432–1438.
15. Rusanov V.A., Daneev A.V., Lakeyev A.V., Linke Yu.É. On the Theory Differential Realization: Criterions for the Continuity of the Nonlinear Rayleigh–Ritz Operator // International Journal of Functional Analysis, Operator Theory and Applications. 2020. Vol. 12. No. 1. P. 1–22.

[7] Полилинейные дифференциальные уравнения занимают в теории динамических систем особое место, поскольку согласно одной из основных идей нелинейного многомерного анализа является положение, что всякая достаточно гладкая (относительно производных Фреше) функция многих переменных в окрестности каждой своей точки хорошо аппроксимируется полилинейной функцией – формула Тейлора [25, с. 491] для отображений в бесконечномерных банаховых пространствах. Возникающая, таким образом, операция *полилинеаризации* приводит к полилинейным дифференциальным моделям в качестве эффективного прецизионного приближения при исследовании свойств нелинейных дифференциальных уравнений вблизи каких-либо их решений. Именно этот факт дает возможность проводить анализ поведения любых (репрезентативных) нелинейных нейроморфных дифференциальных моделей высших порядков (с запаздыванием и без) высокой размерности на базе *полилинейных структур* динамических уравнений исследуемой нейропопуляции. При этом в перспективе претендуя, в процессе обработки данных от интерфейс-платформы "мозг-машина" типа Neuralink [23], на выявление специальных (типических) динамических свойств этих моделей, отвечающих за когнитивные функции моделируемой нейропопуляции.

16. Русанов В.А., Данеев А.В., Линке Ю.Э. К геометрическим основам дифференциальной реализации динамических процессов в гильбертовом пространстве // Кибернетика и системный анализ. 2017. Т. 53. № 4. С. 71–83.
17. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики: Функциональный анализ. М.: Мир, 1977.
18. Банщиков А.В., Иртегов В.Д., Титоренко Т.Н. Программный комплекс для моделирования в символьном виде механических систем и электрических цепей // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ. №2016618253 от 25.07.2016. Федеральная служба по интеллектуальной собственности (РОСПАТЕНТ).
19. Лоран П.-Ж. Аппроксимация и оптимизация. М.: Мир, 1975.
20. Rusanov V.A., Daneev A.V., Lakeev A.V., Linke Yu.É., Vetrov A.A. System-Theoretical Foundation for Identification of Dynamic Systems // Far East Journal of Mathematical Sciences. 2019. Vol. 116. No. 1. P. 25–68.
21. Савельев А.В. Философия методологии нейромоделирования: смысл и перспективы // Философия науки. 2003. № 1. С. 46–59.
22. Савельев А.В. На пути к общей теории нейросетей. К вопросу о сложности // Нейрокомпьютеры: разработка, применение. 2006. № 4. С. 4–14.
23. Valle G. An Integrated Brain-Machine Interface Platform with Thousands of Channels // J. Med. Internet Res. 2019. Vol. 21. No. 10: e16194. (doi: 10.2196/16194).
24. Русанов В.А., Шарпинский Д.Ю. К теории структурной идентификации нелинейных многомерных систем // Прикладная математика и механика. 2010. Т. 74. Вып. 1. С. 119–132.
25. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976.

ON DIFFERENTIAL-NON-AUTONOMOUS REPRESENTATION INTEGRATIVE ACTIVITY OF NEUROPOPULATION BILINEAR SECOND-ORDER MODEL WITH A DELAY

© 2021 A.V. Daneev[1], A.V. Lakeev[2], V.A. Rusanov[2], P.A. Plesnev[1]

[1] Irkutsk State Transport University, Irkutsk, Russia
[2] Matrosov V.M. Institute for System Dynamics and Control Theory of SB RAS, Irkutsk, Russia

For neuromorphic processes specified by the behavior of a local neuropopulation (for example, processes induced by a brain-machine interface platform of the Neuralink type), we study the solvability of the problem of the existence of a differential realization of these processes in the class of bilinear nonstationary ordinary differential equations of the second order (with delay) in separable Hilbert space. This formulation belongs to the type of inverse problems for an additive combination of nonstationary linear and bilinear operators of evolution equations in an infinite-dimensional Hilbert space. The metalanguage of the theory being developed is the constructions of tensor products of Hilbert spaces, lattice structures with orthocompletion, the functional apparatus of the nonlinear Rayleigh-Ritz operator, and the principle of maximum entropy. It is shown that the property of sublinearity of this operator, allows you to obtain conditions for the existence of such differential realizations; along the way, metric conditions for the continuity of the projectivization of this operator are substantiated with the calculation of the fundamental group of its compact image. This work was financially supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 19-01-00301).
Keywords: inverse problems of nonlinear neuromorphic dynamics, tensor analysis, bilinear non-autonomous differential realization of the second order with delay, the Rayleigh-Ritz entropy operator.
DOI: 10.37313/1990-5378-2021-23-2-115-126

Aleksey Daneev, Doctor of Technical Sciences, Professor, Professor of the Department of Information Systems and Information Security. E-mail: daneev@mail.ru
Anatoly Lakeev, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Leading Researcher.
E-mail: lakeyev@mail.ru
Vyacheslav Rusanov, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Senior Researcher.
E-mail: v.rusanov@mail.ru
Pavel Plesnev, Postgraduate Student.
E-mail: pavel.plesnev@gmail.com