

# ИЗВЕСТИЯ САМАРСКОГО НАУЧНОГО ЦЕНТРА РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

IZVESTIYA OF SAMARA SCIENTIFIC CENTER  
OF THE RUSSIAN ACADEMY OF SCIENCES

[www.ssc.smr.ru](http://www.ssc.smr.ru)



Издательство  
Самарского федерального исследовательского центра  
Российской академии наук

# Известия Самарского научного центра Российской академии наук

Том 25, № 3(113), 2023

Основан в 1999 г. Выходит 6 раз в год. ISSN: 1990-5378

Учредитель: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки

Самарский федеральный исследовательский центр Российской академии наук

Журнал зарегистрирован в Роскомнадзоре, свидетельство ПИ № ФС77-61347 от 07.04.2015

*Главный редактор*

Ф.В. Гречников

*Заместители главного редактора*

Я.А. Ерисов, А.В. Васильев

*Ответственный секретарь*

В.О. Соколов

Редакционный совет

С.Н. Шевченко, академик РАН, доктор сельскохозяйственных наук (председатель совета);

Ф.В. Гречников, академик РАН, доктор технических наук;

А.И. Рудской, академик РАН, доктор технических наук;

О.М. Буранок, доктор педагогических наук, доктор филологических наук;

А.Н. Пашкуров, доктор филологических наук;

Г.А. Баталова, академик РАН, доктор сельскохозяйственных наук;

Г.С. Розенберг, член-корреспондент РАН, доктор биологических наук;

Ю.П. Аншаков, доктор исторических наук;

Г.П. Аншаков, член-корреспондент РАН, доктор технических наук;

К.В. Никифоров, доктор исторических наук;

В.П. Шорин, академик РАН, доктор технических наук

Редакционная коллегия

*Машиностроение, информационные технологии и телекоммуникации:*

Н.Ф. Аверкиев, Д.В. Антипов, Г.П. Аншаков, Р.Н. Ахметов, В.И. Батищев, А.С. Бугаев,

Ю.Н. Горелов, А.Ф. Денисенко, А.М. Дмитриев, Ю.С. Клочков, Н.В. Носов, Г.В. Смирнов,

С.В. Смирнов, В.А. Соколов, Б.В. Соколов, В.А. Сойфер, А.Х. Султанов, А.И. Хаймович,

В.Г. Халин, В.И. Хищенко, Е.В. Шахматов, В.Г. Шуваев, Е.А. Щепаккина, А.В. Юрков, С.И. Ярьсько

*Выпускающий редактор*

С.С. Мещеряков

Адрес редакции: 443001, г. Самара, Студенческий пер., 3а  
Самарский федеральный исследовательский центр Российской академии наук

Тел. +7(846) 340-06-20. И.о. зав. редакцией: Н.Ю. Кузнецова  
электронная версия – [www.ssc.smr.ru/izvestiya.shtml](http://www.ssc.smr.ru/izvestiya.shtml)

Самара

Издательство Самарского федерального исследовательского центра Российской академии наук

---

© Федеральное государственное  
бюджетное учреждение науки  
Самарский федеральный  
исследовательский центр  
Российской академии наук, 2023

## СОДЕРЖАНИЕ

Номер 3, 2023

### МАШИНОСТРОЕНИЕ И МАШИНОВЕДЕНИЕ

<b>К определению напряженно-деформированного состояния при инкрементальном формообразовании</b> <i>И.Н. Петров</i>	5
<b>Исследование процесса формообразования поперечного гофра сильфона с минимальной разнотолщиной</b> <i>Д.В. Антипов, А.А. Шаров, А.С. Масленникова</i>	10
<b>Разработка модели совершенствования системы контроля качества частиц порошка красящего пигмента</b> <i>Т.И. Комаров, В.С. Пузырева, А.В. Чабаненко</i>	16
<b>Оценка рисков и потенциальных отказов при проектировании процесса изготовления гибких колес волновых зубчатых передач на основе методики PFMEA</b> <i>Д.В. Назаров, Д.В. Антипов, О.В. Ломовской</i>	26
<b>Разработка и применение имитационной модели цеха компаундирования автомобильных бензинов</b> <i>Е.С. Головина, И.Н. Хаймович</i>	35
<b>Визуализация статико-динамического процесса уплотнения порошковой композиции в металлической оболочке</b> <i>В.А. Глушечков, Р. де Алваренга, И.А. Беляева</i>	43
<b>Оптимизация системы обеспечения запасными частями производственных подразделений аэропортовой сети</b> <i>И.В. Кольцов, В.А. Романенко</i>	50
<b>Разработка методики по оценке напряжённо-деформированного состояния изделий с учётом технологической наследственности</b> <i>Д.В. Евдокимов, А.А. Алексенцев, А.С. Букатый, Р.М. Ахтамьянов, Д.А. Бычков</i>	57
<b>Воздушное канальное охлаждение одновиткового индуктора для магнитно-импульсной обработки металлов</b> <i>В.Н. Самохвалов, Д.Г. Черников, Р.Ю. Юсупов</i>	64
<b>Расчётное прогнозирование технологических остаточных деформаций при изготовлении деталей, подвергаемых упрочнению поверхностным пластическим деформированием</b> <i>А.С. Букатый, Д.В. Евдокимов, Д.А. Бычков, Марван Шуджаури, А.С. Сараев</i>	72
<b>К вопросу о переходе предприятий промышленности к замкнутому производственному циклу</b> <i>О.В. Минулина</i>	77
<b>Вероятностный расчетно-статистический инструментарий оценки влияния технологического процесса производства на стабильность основных характеристик автомобильного генератора</b> <i>А.С. Саксонов, В.Н. Козловский, К. В. Киреев</i>	84

<b>Концептуальная модель цифрового завода производственного предприятия аэрокосмической отрасли</b> <i>И.С. Ткаченко, Д.В. Антипов, А.В. Куприянов, В.Г. Смелов, В.В. Кокарева</i>	90
<b>Термодинамическая модель ледового воротника в гидротехническом строительстве</b> <i>Д.А. Шарпов, Ю.С. Клочков</i>	107
<hr/>	
<b>ИНФОРМАТИКА, ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА И УПРАВЛЕНИЕ</b>	
<b>Метод последовательных приближений, основанный на локальной аппроксимации множества достижимости, для дискретных задач оптимального управления</b> <i>В.А. Батурин, А.В. Данеев, В.Н. Сизых</i>	114
<b>Моделирование и сравнение результатов точного аналитического решения краевой задачи течения в тонком слое с экспериментальными данными</b> <i>Е.А. Яновская</i>	130
<b>К выбору математической модели для корректного решения краевой задачи течения тонкого слоя пластического материала при сжатии образца в виде кругового сектора</b> <i>Е. А. Яновская</i>	140

## CONTENTS

Number 3, 2023

### MECHANICAL ENGINEERING, MACHINE SCIENCE

<b>To Determine the Stress-Strain State during Incremental Forming</b> <i>I.N. Petrov</i>	5
<b>Investigation of the Process of Forming the Transversal Corrugation of Bellows with Minimum Difference in Thickness</b> <i>D.V. Antipov, A.A. Sharov, A.S. Maslennikova</i>	10
<b>Development of a Model for Improving the Quality Control System of Coloring Pigment Powder Particles</b> <i>T.I. Komarov, V.S. Puzyreva, A.V. Chabanenko</i>	16
<b>Assessment of Risks and Potential Failures in the Design of the Manufacturing Process of Flexible Wave Gear Wheels Based on the PFMEA Methodology</b> <i>D.V. Nazarov, D.V. Antipov, O.V. Lomovskoy</i>	26
<b>Development and Application of a Simulation Model for a Compounding Process for Motor Gasolines</b> <i>E.S. Golovina, I.N. Khaimovich</i>	35
<b>Visualization of the Static-Dynamic Process Of Compaction of a Powder Composition in a Metal Shell</b> <i>V.A. Glouschenkov, R. De Alvarenga, I.A. Belyaeva</i>	43
<b>Optimization of Spare Parts Supply System for Production Divisions of Airport Network</b> <i>I.V. Koltsov, V.A. Romanenko</i>	50
<b>Development of the Method on the Stress-Strain State Assessment of Products Taking into Account Technological Heredity</b> <i>D.V. Evdokimov, A.A. Aleksencev, A.S. Bukaty, R.M. Ahtamjanov, D.A. Bychkov</i>	57
<b>Air Channel Cooling of One-Turn Inductor for Electromagnetic Metal Forming</b> <i>V.N. Samokhvalov, D.G. Chernikov, R.Yu. Yusupov</i>	64
<b>Technological Residual Deformations Calculating for Aviation Parts Subjected to Shot Peeneng Strengthening</b> <i>A.S. Bukaty, D.V. Evdokimov, D.A. Bychkov, Shudjairi Marwan, A.S. Saraev</i>	72
<b>Methodology for Assessing Resource-Saving Production Systems in a Circular Economy</b> <i>O.V. Minulina</i>	77
<b>Probabilistic Calculation and Statistical Tool for Assessing the Influence of a Technological Process on the Stability of the Main Electrical Characteristics of a Vehicle Generator</b> <i>A.S. Saxonov, V.N. Kozlovsky, K.V. Kireev</i>	84

<b>Conceptual Model of the Digital Plant of Manufacturing Enterprises in the Aerospace Industry</b> <i>I.S. Tkachenko, D.V. Antipov, A.V. Kupriyanov, V.G. Smelov, V.V. Kokareva</i>	90
<b>Thermodynamic Model of Ice Collar for Hydrotechnical Construction</b> <i>D.A. Sharapov, Yu.S. Klochkov</i>	107
<hr/>	
<b>INFORMATICS, COMPUTER SCIENCE AND CONTROL</b>	
<b>Successive Approximation Method Based on Local Approximation of the Reachable Set for Discrete Optimal Control Problems</b> <i>V.A. Baturin, A.V. Daneev, V.N. Sizykh</i>	114
<b>Simulation and Comparison of the Results of the Exact Analytical Solution of the Boundary Problem of a Flow in a Thin Layer with Experimental Data</b> <i>E. A. Yanovskaya</i>	130
<b>On the Choice of a Mathematical Model for the Correct Solution of the Boundary Value Problem of the Flow of a Thin Layer of Plastic Material under Compression of a Sample in the Form of a Circular Sector</b> <i>E. A. Yanovskaya</i>	140

УДК 621.7.04

**К ОПРЕДЕЛЕНИЮ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ  
ПРИ ИНКРЕМЕНТАЛЬНОМ ФОРМООБРАЗОВАНИИ**© 2023 И.Н. Петров<sup>1,2</sup><sup>1</sup> Самарский национальный исследовательский университет  
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Россия<sup>2</sup> Самарский федеральный исследовательский центр Российской академии наук, г. Самара, Россия

Статья поступила в редакцию 29.03.2023

В данной статье на основании проведенных экспериментальных исследований определена схема напряженно-деформированного состояния заготовок при инкрементальном формообразовании. Определено, что для инкрементального формообразования конуса с прямолинейной образующей характерно двухосное растяжение с преобладанием растягивающих осевых деформаций.

*Ключевые слова:* инкрементальное формообразование, напряженно-деформированное состояние, алюминиевый сплав Д16АМ

DOI: 10.37313/1990-5378-2023-25-3-5-9

EDN: JDROIZ

*Исследование выполнено в рамках гранта (номер гранта: МД-936.2022.4).***ВВЕДЕНИЕ**

Инкрементальное формообразование листового металла представляет собой процесс, в котором заготовка локально деформируется пуансоном путем его перемещения вдоль заданного направления.

Главной особенностью инкрементального формообразования, теоретическому и экспериментальному исследованию которой посвящены многие работы, является более высокие значения предельных деформаций материала по сравнению с традиционными процессами листовой штамповки [1-2]. Известно, что в значительной степени предельные деформации материала, достижимые при обработке металлов давлением, определяются напряженно-деформированным состоянием [3-4], поэтому основным направлением исследований инкрементального формообразования является изучение схемы напряжений и деформаций.

Анализ зарубежной литературы показал, что при инкрементальном формообразовании преобладающими механизмами деформации являются сдвиг, растяжение и изгиб. Так в работе [5] показано, что при инкрементальном формообразовании наблюдается растяжение и сдвиг

в плоскости, перпендикулярной направлению движения инструмента, а также сдвиг в плоскости, параллельной направлению движения инструмента. В работах [6-8] деформации сдвига по толщине рассматривались как преобладающий механизм, способствующий увеличению предельных деформационных возможностей. В работе [9] сделан вывод о том, что при инкрементальном формообразовании деформации растяжения определяют характер поведения материала. В работе [10] на основе испытания на изгиб с растяжением предположили, что основным фактором для увеличения деформационных возможностей при инкрементальном формообразовании является изгиб. Большое количество противоречивых результатов говорит о том, что необходимы дальнейшие исследования напряженно-деформированного состояния при инкрементальном формообразовании.

В связи с этим, в настоящей работе предпринята попытка экспериментального исследования напряженно-деформированного состояния заготовки при инкрементальном формообразовании конической детали с прямолинейной образующей.

**МЕТОДИКА ЭКСПЕРИМЕНТА**

Процесс инкрементального формообразования проводился на специальном стенде с использованием промышленного робота-манипулятора KUKA KR 160 R 1570 nano (рисунок

---

*Петров Илья Николаевич, инженер кафедры обработки металлов давлением, аспирант Самарского университета, инженер отдела металлофизики и авиационных материалов СамНЦ РАН.*

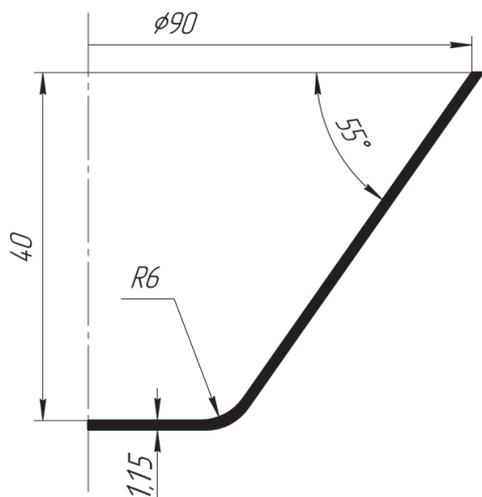
*E-mail: ilpetrof110895@yandex.ru*

1). Фиксация заготовки осуществлялась на горизонтальном столе с помощью механических зажимов. Для построения траектории движения деформирующего инструмента при инкрементальном формообразовании использовался программный комплекс SprutCAM. Формообразование проводилось послойно, шаг перемещения деформирующего инструмента - 0,5 мм, диаметр инструмента - 12 мм. Скорость перемещения пуансона задавалась равной 50 мм/с.



**Рисунок 1** – Стенд инкрементального формообразования на базе промышленного робота-манипулятора KUKA KR 160 R 1570 nano

В качестве изготавливаемой детали был выбран усеченный конус с прямолинейной образующей, угол наклона которой составляет 55° (рисунок 2). В качестве заготовок использовались



**Рисунок 2** – Коническая деталь с прямолинейной образующей

листы из алюминиевого сплава Д16АМ толщиной  $S_0 = 1,15$  мм.

Для оценки характера поведения материала в процессе инкрементального формообразования на поверхность заготовок были нанесены концентрические окружности с шагом  $B_0 = 3$  мм (рисунок 3). После деформирования проводились замеры диаметров концентрических окружностей и расстояния между ними. Замеры проводились вдоль направления прокатки (НП) и поперек (ПН) листовой заготовки, а потом осреднялись. Измерение диаметров окружностей и расстояния между ними осуществлялось с помощью штангенциркуля (ШЦ-1-150, точность  $\pm 0,05$  мм). Кроме того, с помощью стойки с электронным индикатором (ИЦ 0-12,7, точность  $\pm 0,001$  мм) была измерена толщина полученной детали по образующей.

По полученным результатам были рассчитаны логарифмические деформации:

тангенциальная (окружная) деформация

$$e_{\theta} = \ln \frac{D_i}{D_{0i}}, \quad (1)$$

осевая деформация

$$e_z = \ln \frac{B_i}{B_0}, \quad (2)$$

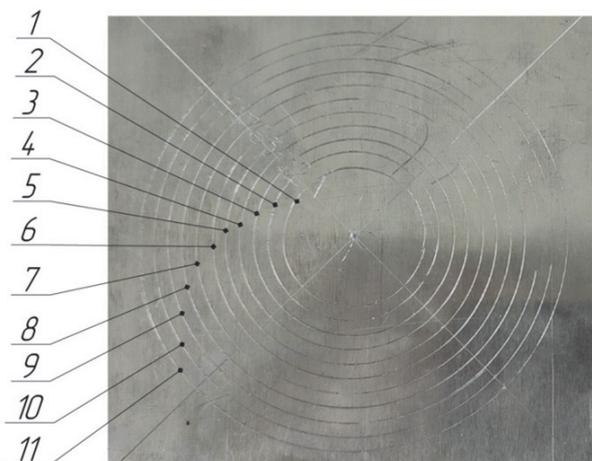
деформация по толщине

$$e_s = \ln \frac{S_i}{S_0}, \quad (3)$$

где  $D_{0i}, D_i$  – диаметры концентрических окружностей до и после инкрементального формообразования,  $B_0, B_i$  – расстояние между концентрическими окружностями до и после инкрементального формообразования,  $S_0$  – толщина листовой заготовки,  $S_i$  – толщина получаемой детали.

## РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

Результаты измерения толщины детали, диаметра концентрических окружностей и рас-



**Рисунок 3** – Разметка заготовки

Таблица 1 – Результаты замеров

№	D <sub>0</sub> , мм	D <sub>i</sub> , мм	B <sub>0</sub> , мм	B <sub>i</sub> , мм	S <sub>0</sub> , мм	S <sub>i</sub> , мм
1	30	31,55	3	-	1,15	1,115
2	36	39,45		3,95		0,77
3	42	45,2		3,8		0,75
4	48	51,35		4,5		0,76
5	54	57,2		4,2		0,755
6	60	63,3		4,05		0,73
7	66	68,6		4,45		0,73
8	72	74,8		3,6		0,75
9	78	80,6		4,1		0,85
10	84	85,75		3,4		1,045
11	90	91,25		2,95		1,095

стояния между ними после инкрементального формообразования представлены в таблице 1.

По полученным значениям рассчитывались деформации, по которым построены зависимости распределения тангенциальной, осевой деформации и деформации по толщине вдоль образующей от края ко дну детали (рисунок 4).

Из рисунка 4 видно, что осевые деформации, действующие в плоскости заготовки и тангенциальные, являются растягивающими, а по толщине – сжимающими. При этом осевые деформации, также как и деформации по толщине вначале резко увеличиваются, а затем по мере удаления от края получаемой детали ко дну практически не изменяются. Это объясняется наличием на расстоянии около 10 мм от края детали радиусной части, на которой угол наклона образующей изменяется от нуля до заданного угла прямолинейной образующей (рисунок 5). Наличие данного радиусного участка связано с упругой деформацией

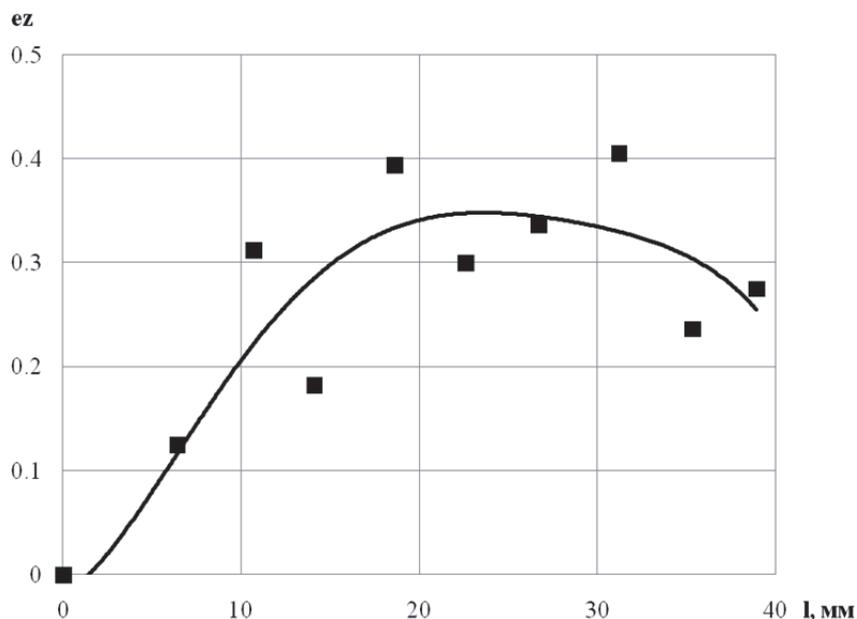
оснастки и жесткостью робота. Полученные результаты распределения деформации по толщине на прямолинейном участке должны подчиняться закону косинуса, как следует из [11]:

$$s_i = s_0 \cdot \cos \theta, \tag{4}$$

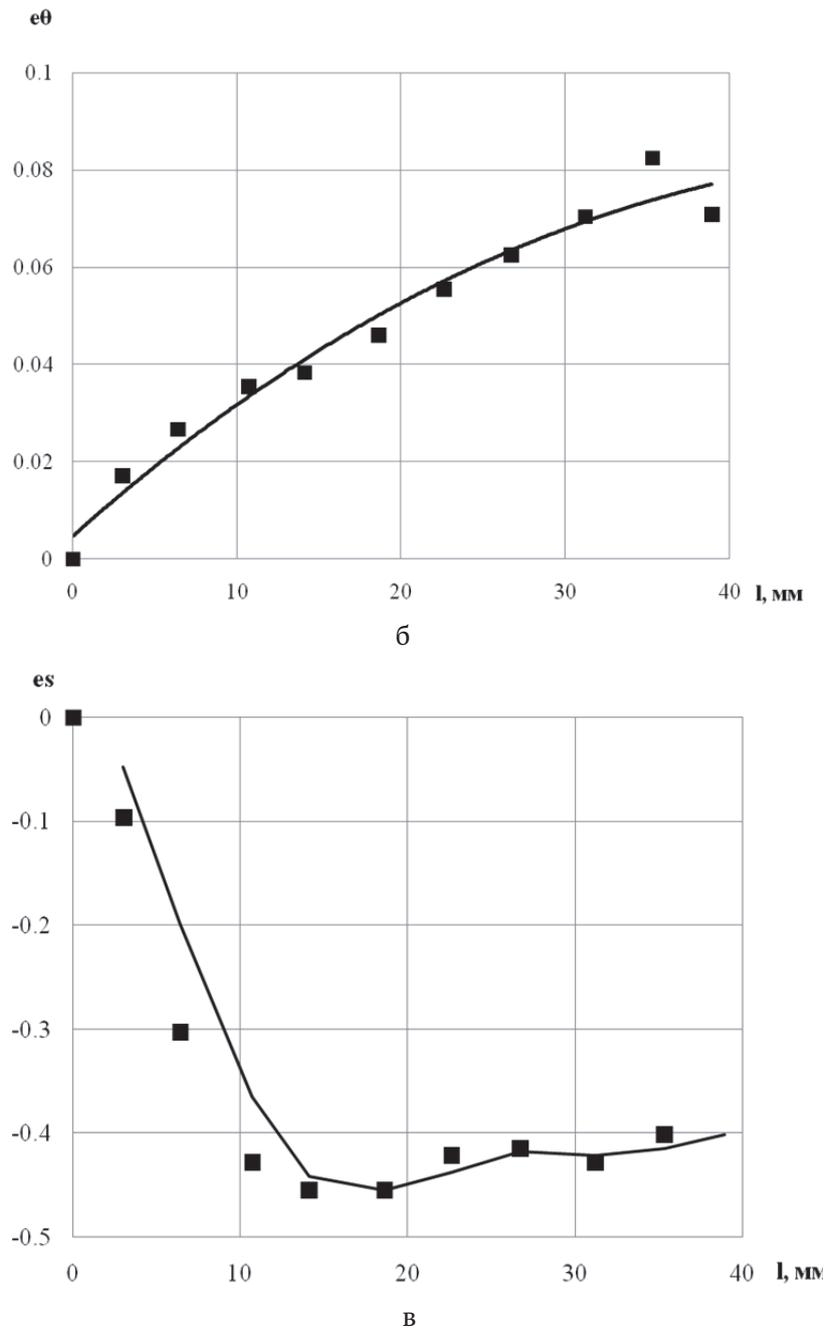
где  $\theta$  угол наклона прямолинейной образующей.

Однако, решая уравнение (4) с учетом толщины заготовки и угла наклона образующей конической детали, получим, что толщина на прямолинейном участке должна быть равна 0,65 мм. Таким образом, относительная погрешность аналитически полученного значения толщины по сравнению с экспериментальным (0,76 мм) составляет 15%.

Величина тангенциальной деформации увеличивается практически линейно от края и достигает максимума у дна детали. Очевидно, что наличием тангенциальной деформации нельзя пренебрегать, как это делается во многих исследова-



а



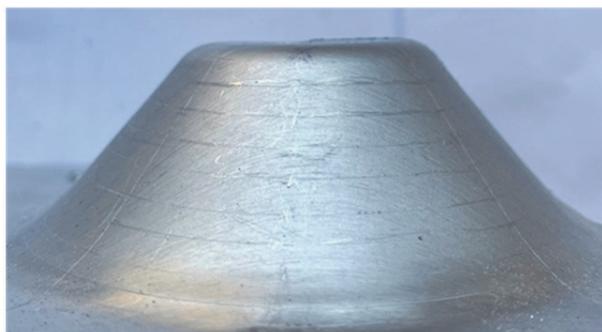
**Рисунок 4** – Распределение деформаций вдоль образующей от края ко дну детали:  
 а – осевая деформация; б – тангенциальная деформация; в – деформация по толщине

дованиях [5-11], так как ее величина превышает инженерную погрешность 5%. Кроме того, расхождение значений толщины, полученной экспериментально и рассчитанной теоретически, также связано с этим допущением, так как при выводе закона косинуса принимается плоское деформированное состояние, то есть тангенциальные деформации равны нулю.

#### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В проведенной работе представлены экспериментальные исследования напряженно-деформированного состояния ли-

стовых заготовок при инкрементальном формообразовании. Полученные данные свидетельствуют о наличии в процессе формообразования растягивающих деформаций в тангенциальном, то есть при инкрементальном формообразовании наблюдается двухосное растяжение с преобладанием растягивающих осевых деформаций. Это опровергает результаты большого количества исследований, в которых считается, что для инкрементального формообразования характерно плоское деформированное состояние заготовки, то есть тангенциальные деформации отсутствуют [11].



**Рисунок 5** – Концентрические окружности после инкрементального формообразования

### БЛАГОДАРНОСТЬ

Исследование выполнено в рамках гранта (номер гранта: МД-936.2022.4).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Shim M-S, Park J-J. The formability of aluminum sheet in incremental forming // J Mater Process Technol. 2001. №113. P. 654–8.
2. Park J-J, Kim Y-H. Fundamental studies on the incremental sheet metal forming technique // J Mater Process Technol. 2003. №140. P. 447–53.
3. Томленов, А.М. Теория пластического деформирования металлов [Текст] / А.М. Томленов. – М. : Металлургия, 1972. – 408 с.
4. Колмогоров, В.Л. Пластичность и разрушение [Текст] / В.Л. Колмогоров, А.А. Богатов, Б.А. Мигачев и др.; Под науч. ред. В.Л. Колмогорова. – М. : Металлургия, 1977. – 336 с.
5. Jackson K., Allwood J. The mechanics of incremental sheet forming // Journal of Materials Processing Technology. 2009. V. 209, Iss. 3, P. 1158-1174.
6. Eyckens P., Belkassam B., Henrard C., Gu J., Sol H., Habraken A.M., Duflou J.R., van Bael A., van Houtte P. Strain evolution in the single point incremental forming process: digital image correlation measurement and finite element prediction // International Journal of Material Forming. 2011. V. 4, Iss. 1. P. 55-71. DOI: 10.1007/s12289-010-0995-6
7. Eyckens P., Van Bael A., Van Houtte P. An extended Marciniak–Kuczynski model for anisotropic sheet subjected to monotonic strain paths with through-thickness shear // International Journal of Plasticity. 2011. V. 27, Iss. 10. P. 1577-1597. DOI: 10.1016/j.ijplas.2011.03.008
8. Eyckens P., He S., Van Bael A., Van Houtte P., Duflou J. Forming limit predictions for the serrated strain paths in single point incremental sheet forming // AIP Conference Proceedings. 2007. V. 908. P. 141-146. DOI: 10.1063/1.2740802
9. Filice L., Ambrogio G., Micari F. Online control of single point incremental forming operations through punch force monitoring [Text] // Cirp. Ann.-Manuf. Techn. 2006. №55. P. 245-248.
10. Emmens W.C., Van den Boogaard A. An overview of stabilizing deformation mechanisms in incremental sheet forming [Text] // Journal of Materials Processing Technology.– 2009. – №209. – P. 3688-3695.
11. Wei H.Y., Gao L., Li S.G., Investigation on thickness distribution along bulge type incrementally formed sheet metal part with irregular shapes // Proceedings of the International Manufacturing Conference. pp. 1672–3961 (Supp-01).

### TO DETERMINE THE STRESS-STRAIN STATE DURING INCREMENTAL FORMING

© 2023 I.N. Petrov<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Samara National Research University, Samara, Russia

<sup>2</sup>Samara Federal Research Center of the Russian Academy of Sciences, Samara, Russia

*Abstract.* In this article, based on the experimental studies carried out, the scheme of the stress-strain state of workpieces during incremental forming is determined. It is determined that the incremental forming of a cone with a rectilinear generatrix is characterized by biaxial stretching with a predominance of tensile axial deformations.

*Keywords:* incremental forming, stress-strain state, aluminum alloy.

DOI: 10.37313/1990-5378-2023-25-3-5-9

EDN: JDROIZ

Ilya Petrov, Engineer at the Metal Forming Department, Graduate Student of the Samara National Research University, Engineer of the Department of Metal Physics and Aviation Materials, Samara Federal Research Center of the Russian Academy of Sciences.  
E-mail: ilpetrof110895@yandex.ru

УДК 621.774.8

## ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССА ФОРМООБРАЗОВАНИЯ ПОПЕРЕЧНОГО ГОФРА СИЛЬФОНА С МИНИМАЛЬНОЙ РАЗНОТОЛЩИННОСТЬЮ

© 2023 Д.В. Антипов, А.А. Шаров, А.С. Масленникова

Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева,  
г. Самара, Россия

Статья поступила в редакцию 25.05.2023

В статье выполнены исследования по определению возможности подтверждения выдвинутой гипотезы о получении более равномерной стенки сильфона в области вершины гофра путем формообразования сильфона эластичной средой двухэтапным способом в разъемной секционной матрице с применением технологии стесненного изгиба. Дано описание областей применения сильфонов, их конструкций, определены наиболее прогрессивные методы изготовления сильфонов и их основной недостаток. Определена цель исследования и поставлены соответствующие задачи, которые необходимо решить. В исследовании применялись аналитические методы исследования и конечно-элементное моделирование. Предложен способ формообразования сильфона и геометрия формообразующей матрицы. Приведена методика расчета параметров технологического процесса для двух этапов формообразования сильфона. Представлены картины относительного изменения толщины гофра сильфона при формообразовании традиционным способом и при формообразовании предложенным способом. Представлены поля распределения эквивалентных напряжений по Мизесу на первом и на втором переходах при формообразовании предлагаемым способом. Проведено сравнение и дана оценка полученных результатов.

*Ключевые слова:* сильфон, технология, формообразование, стесненный изгиб, утонение, конечно-элементное моделирование.

DOI: 10.37313/1990-5378-2023-25-3-10-15

EDN: JGIEXD

### ВВЕДЕНИЕ

Металлические сильфоны применяются в промышленности при решении разнообразных технических задач, в том числе сильфоны нашли широкое применение в узлах летательных аппаратов, передающих газ и жидкости под давлением, для осевой компенсации тепловых расширений, а также рабочих и монтажных смещений. В процессе эксплуатации на сильфон действуют многоцикловые деформации сжатия, растяжения, изгиба и различные их комбинации под действием внутреннего или внешнего давления, температуры и механических напряжений, поэтому сильфон должен сохранять прочность и герметичность на протяжении заданного цикла.

По своей конструкции сильфоны могут быть мембранными, цилиндрическими однослойными, цилиндрическими многослойными,

коническими, фасонными, прямоугольными, армированными. Несмотря на все многообразие конструктивных исполнений, наиболее распространены цилиндрические однослойные сильфоны, изготавливаемые из цельнотянутой трубной заготовки.

Основной причиной разрушения сильфонов является износ материала в области вершины гофра, ввиду утонения материала в этой области на этапе изготовления изделия. Актуальность исследования, представленного в настоящей статье, заключается в том, что в связи с усложнением техники, возрастанием сложности решаемых задач, особыми условиями эксплуатации стоит проблема создания надежных изделий типа сильфон.

Существующие методы изготовления сильфонов имеют достаточно высокую производительность, однако на этапе изготовления изделия затруднительно получить равномерную толщину стенки в области вершины гофра. Методы формообразования эластичной и жидкой средой, считающиеся наиболее прогрессивными в области получения гофрированных оболочек с более равномерной толщиной стенки по всей поверхности изделия, способны обеспечить толщину стенки сильфона в области вершины гофра ниже исходной толщины заготовки на 10-30 % в зависимости от высоты гофра.

---

*Антипов Дмитрий Вячеславович, доктор технических наук, доцент, заведующий кафедрой производства летательных аппаратов и управления качеством в машиностроении. E-mail: antipov.dv@ssau.ru*

*Шаров Андрей Алексеевич, кандидат технических наук, доцент кафедры производства летательных аппаратов и управления качеством в машиностроении. E-mail: aa.scharov@ssau.ru*

*Масленникова Анна Сергеевна, аспирант. E-mail: maslennikova.ssau@mail.ru*

Учитывая, что известны технологические процессы формообразования листовых деталей, которые позволяют обеспечить набор материала в очаге деформации, где при обычных условиях формообразования образуется утонение материала, выдвинуто предположение, что применение таких технологий в процессе формообразования гофра сильфона способно снизить утонение стенки готового изделия в области вершины гофра.

С целью подтверждения выдвинутого предположения необходимо разработать способ формообразования сильфонов, который позволит снизить утонение в области вершины гофра и решить следующие задачи:

- разработать методику расчета параметров технологического процесса и математическую модель процесса формообразования сильфона с учетом воздействия эластомера;

- провести комплекс теоретических и экспериментальных исследований напряженно-деформированного состояния эластичного пуансона и заготовки методом конечных элементов;

- после реализации теоретических и экспериментальных исследований необходимо дать оценку характеру изменения толщины по всей поверхности изделия и подтвердить или опровергнуть гипотезу о возможности получения изделия с более равномерной толщиной стенки по всей его поверхности;

- в случае подтверждения выдвинутой гипотезы о возможности получения изделия с более равномерной толщиной стенки по всей его поверхности путем применения технологий стесненного изгиба рекомендуется провести натурный эксперимент.

### МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

Методической базой исследования послужили труды отечественных и зарубежных ученых: Андреева Л.Е., Арышенский Ю.М., Барвинок В.А.

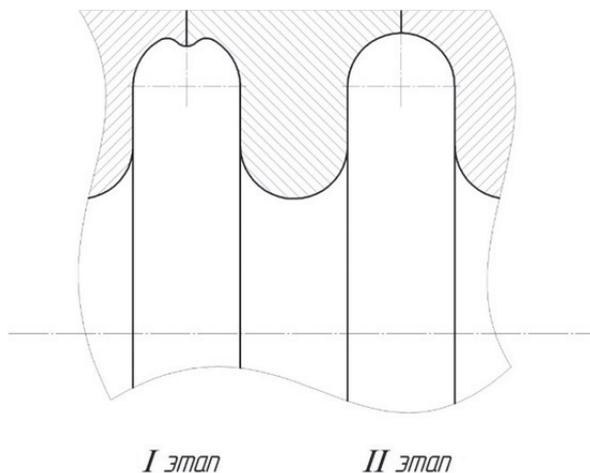


Рис. 1. Профиль разъемной секционной матрицы

[1], Белоусов В.П., Вилканс Д., Гречников Ф.В., Громова Е.Г. [2], Даммак Ф., Ершов В.И., Загайный В.К., Исаченков Е.И. [3], Калужский И.И., Катаев Ю.П., Кашелевский Г.И., Кирилин А.Н., Колганов И.М., Комаров А.Д. [4], Коневских В.А., Краковски М., Кузьмин В.А., Ломовской О.В. [5], Моисеев В.К. [6], Новиков А.Л., Плотников А.Н., Проскуряков Г.В., Пышкин В.А., Самохвалов В.П., Тенг Ф., Терехов В.М., Торимс Т., Федотов Ю.В., Феодосьев В.И., Филимонов В.И., Шаров А.А. и др. [7-8]

В рамках исследования применялись аналитические методы исследования и конечно-элементное моделирование.

### РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ОБСУЖДЕНИЯ

В настоящий момент предложен способ изготовления сильфонов методом последовательного формообразования в разъемной секционной матрице с применением технологии стесненного изгиба. Применение предложенного способа позволит уменьшить утонение материала в области вершины гофра за счет формирования гофра в два этапа: с избытком материала (I этап) и последующей его посадки (II этап). Профиль матрицы представлен на рисунке 1.

Разработана методика расчета параметров технологического процесса для двух этапов формообразования сильфона. Методика расчета разрабатывалась с учетом основных положений, предложенных Е.И. Исаченковым. Приведен вывод формул для определения действительных толщин и требуемых давлений для формообразования гофра сильфона на каждом этапе формообразования:

$$s_i = \frac{s_0 R_0 (2(r_1 + r_2) + \Delta h)}{(R_0 + h)(2a + \pi r_1 + l_{\text{гофр}})}, \quad (1)$$

где  $s_i$  – действительная толщина стенки волны сильфона на первом этапе, устанавливаемая из условия постоянства объема,  $s_0$  – толщина заготовки,  $R_0$  – радиус проходного сечения оболочки или исходной цилиндрической заготовки,  $r_1$  и  $r_2$  – радиусы профиля волны гофра на матрице,  $\Delta h$  – смещение заготовки в меридиональном направлении при формообразовании одной волны гофра,  $h$  – высота гофра после формообразования,  $a$  – прямолинейная часть гофра,  $l_{\text{гофр}}$  – длина гофра сильфона.

$$q_{\text{п}} = \frac{2S_0 R_0 R_1 \beta A \varepsilon^\alpha (2(r_1 + r_2) + \Delta h)}{[R_1^2 - (R_1 - r_2)^2](R_0 + h)(2a + \pi r_1 + l_{\text{гофр}})} \times \left[ \frac{h}{R_0} + 2 \left( \frac{2a + (\pi - 2)r_1 - 2r_2 + l_{\text{гофр}} + \Delta h}{2(r_1 + r_2) + \Delta h} \right) \right] \times \left[ \frac{2h}{R_0} + \frac{2a + (\pi - 2)r_1 - 2r_2 + l_{\text{гофр}} + \Delta h}{2(r_1 + r_2) + \Delta h} \right], \quad (2)$$

где  $q_{п}$  – давление, требуемое для формообразования гофра на первом этапе  $R_i$  – наружный радиус сильфона, после его формообразования,  $A\epsilon^\alpha$  – параметр аппроксимации,  $\beta$  – коэффициент, учитывающий влияние среднего главного напряжения  $\sigma_2$ .

$$s = \frac{r_0 \alpha_0 s_i}{r_i \alpha_i}, \quad (3)$$

где  $s$  – действительная толщина стенки волны сильфона после посадки избытка материала,  $r_0$  – радиус волны на конечном этапе посаживания,  $\alpha_0$  – угол волны на конечном этапе посаживания,  $r_i$  – радиус волны на начальном этапе посаживания,  $\alpha_i$  – угол волны на начальном этапе посаживания.

$$q = \frac{r_0 s_i \alpha_0}{r_i b} \left[ \sigma_b + \Pi \left( \frac{b}{\alpha_0 r_0} - 1 \right) \right], \quad (4)$$

где  $q$  – давление, требуемое для формообразования гофра на втором этапе,  $b$  – ширина волны,  $\Pi$  – модуль упрочнения,  $\sigma_b$  – аппроксимированный предел текучести.

В настоящий момент реализован комплекс аналитических исследований и эксперимен-

тальных исследований методом конечно-элементного моделирования в программном комплексе «ANSYS».

Экспериментальное исследование методом конечно-элементного моделирования было проведено как для процесса формообразования по предлагаемому способу, так и для традиционного способа. Экспериментальное исследование проводилось для 1/32, 1/8 и 1/4 частей оснастки и заготовки, разница значений толщин изделия для разработанных моделей составила порядка 0,4 %, что является фактом идентичного характера изменения толщин изделия и напряженно-деформированного состояния процесса формообразования. Поэтому для дальнейших исследований процесса формообразования допустимо равноценно использовать любую из ранее разработанных и предложенных моделей, вместо полной модели процесса формообразования гофра сильфона, с целью сокращения затрачиваемых временных ресурсов.

На рисунке 2 представлена картина относительного изменения толщины гофра сильфона при формообразовании традиционным

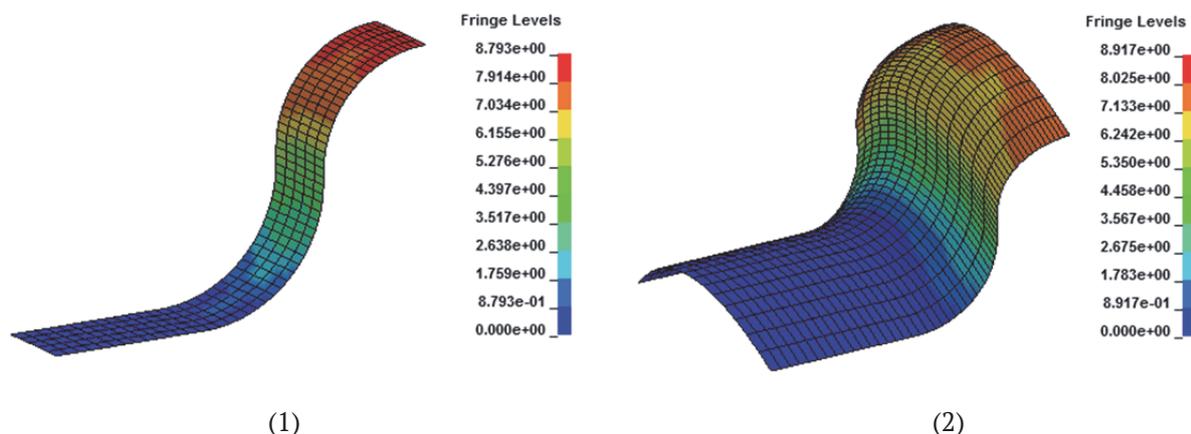


Рис. 2. Относительное изменение толщины гофра сильфона при формообразовании традиционным способом для 1/32 (1) и 1/8 (2) частей оснастки и заготовки

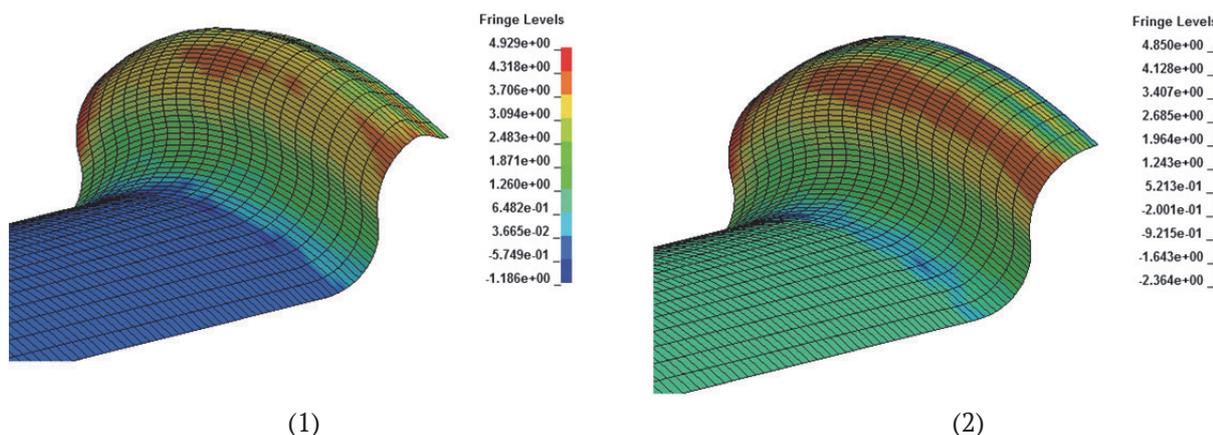


Рис. 3. Относительное изменение толщины гофра сильфона на первом (1) и на втором (2) переходах при формообразовании предлагаемым способом

способом для 1/32 и 1/8 частей оснастки и заготовки.

На рисунке 3 представлена картина относительного изменения толщины гофра сильфона на первом и на втором переходах, предлагаемого способа формообразования для 1/8 части оснастки и заготовки.

Абсолютное значение утонения в области вершины гофра составило порядка 10 % исходной толщины при формообразовании традиционным способом; 4 % исходной толщины при формообразовании предлагаемым способом на первом переходе; 1 % исходной толщины при формообразовании предлагаемым способом на втором переходе.

Наибольшее значение эквивалентных напряжений по Мизесу составило порядка 330 МПа на первом переходе при формообразовании предлагаемым способом и 340 МПа на втором переходе при формообразовании предлагаемым способом. Напряжения не превышают разрушающих напряжений для рассматриваемого материала. На рисунке 4 представлены поля распределения эквивалентных напряжений по Мизесу на первом и на втором переходах при формообразовании предлагаемым способом.

Расхождение полученных толщин и утонений в результате экспериментальных исследований методом конечно-элементного моделирования и аналитических расчетов при исследовании процесса формообразования предлагаемым способом составило порядка 2 %, что доказывает корректность полученных результатов. Приведенные результаты реализованных исследований также доказывают снижение утонения материала заготовки при формообразовании изделия предлагаемым способом, что позволит изготавливать и при-

менять изделия, повышенного качества и надежности.

В общем случае, для определения параметров технологического процесса необходимо, исходя из заданных параметров заготовки (диаметр, толщина, материал трубы) и желаемой высоты гофра сильфона, осуществить подбор конкретной конфигурации матрицы для первого перехода, ориентируясь на полученные графические зависимости по результатам проведенных исследований и осуществить расчет необходимых для формообразования давлений.

На рисунке 5 представлены графические зависимости для осуществления подбора конфигурации матрицы для первого перехода. Зависимости представлены для материала заготовки 12X18H10T. На рисунке 6 представлены основные геометрические параметры матрицы для первого перехода.

## ВЫВОДЫ

В результате исследования разработана методика расчета параметров технологического процесса и математическая модель процесса формообразования сильфона с учетом воздействия эластомера, реализован комплекс теоретических и экспериментальных исследований, дана оценка полученных результатов и подтверждена гипотеза о возможности получения изделия с более равномерной толщиной стенки по всей его поверхности. В дальнейшем планируется проведение натурального эксперимента и последующего сравнения его результатов с аналитическими расчетами и результатами конечно-элементного моделирования для окончательной оценки выдвинутой гипотезы.

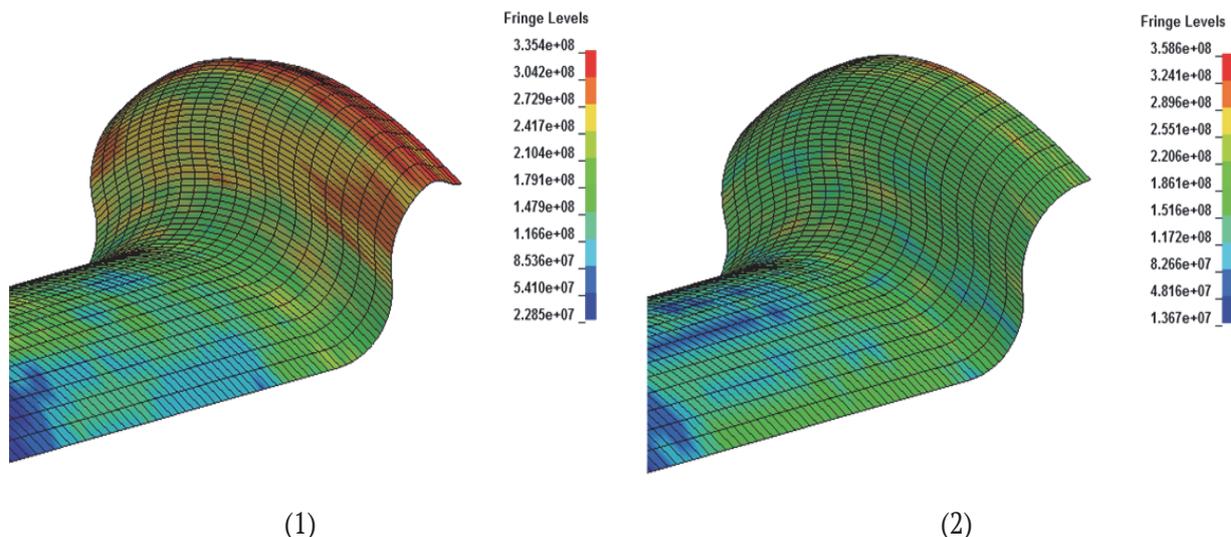
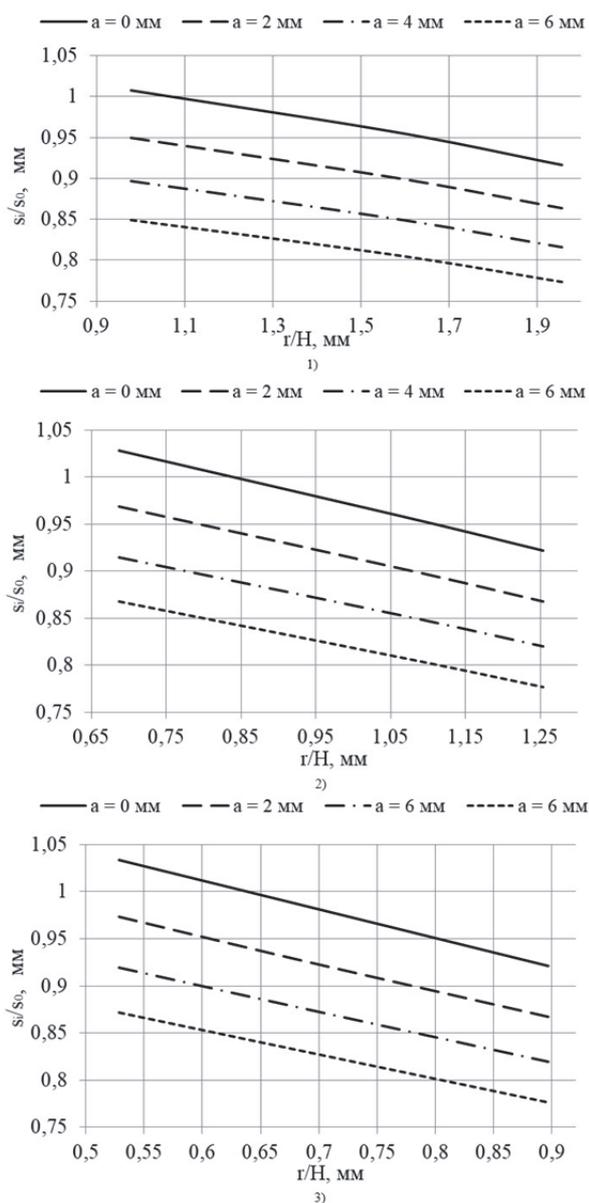


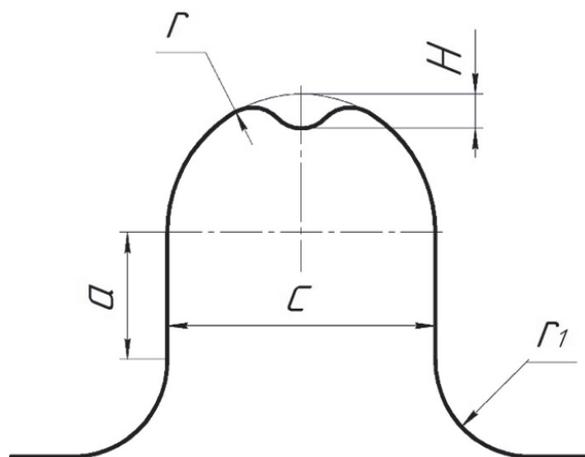
Рис. 4. Поля распределения эквивалентных напряжений по Мизесу на первом (1) и на втором (2) переходах при формообразовании предлагаемым способом



**Рис. 5.** Изменение относительной толщины в области вершины сформированного гофра силфона в зависимости от отношения радиуса профиля матрицы  $r$  к высоте волны  $H$  для различных прямолинейных частей гофра силфона  $a$ :  
 1) для  $H = 0,235$  мм; 2) для  $H = 0,335$  мм;  
 3) для  $H = 0,435$  мм

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Барвинок, В.А. Высокоэффективные технологические процессы изготовления элементов трубопроводных и топливных систем летательных аппаратов / В.А. Барвинок, А.Н. Кирилин, А.Д. Комаров [и др.]. – М.: Наука и технологии, 2002. – 394 с.
2. Gromova E.G. Research of the parts pressing process



**Рис. 6.** Основные геометрические параметры матрицы для первого перехода:  
 $c$  – ширина гофра;  $r_1$  – радиус профиля волны гофра;  
 $r$  – радиус профиля матрицы;  $H$  – высота волны;  
 $a$  – длина прямолинейной части гофра

using the elastic media pressure // Key Engineering Materials. 2016. V. 684. P. 273-277.

3. Исаченков, Е.И. Штамповка резиной и жидкостью / Е.И. Исаченков. – М.: Машиностроение, 1967. 367 с.
4. Кирилин, А.Н. Разработка и исследование технологии формовки рифтов эластичной средой на трубах большого диаметра / А.Н. Кирилин, А.Д. Комаров, В.К. Моисеев, Ю.В. Федотов // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2000. – №1-2. – С. 64-68.
5. Material stress strain behaviour and elastomer pressure under constrained bending of sheet edges / O.V. Lomovskoi, V.K. Moiseev, A.N. Plotnikov, etc. // Russian Aeronautics. 2015. V. 58(1). P. 81-87.
6. Results of the sheet parts curved edges constrained bending with elastomer / V.K. Moiseyev, A.A. Sharov, E.G. Gromova, etc. // Key Engineering Materials. 2017. V. 746. P. 285-289.
7. Numerical simulation and experiment research on forming of two-step channel based on rubber pad pressing / HY. Wang, Z. Wei, F. Teng, PC. Zhang, JC. Sun, SJ. Ji // The International Journal of Advanced Manufacturing Technology. 2019. V. 101(5-8). P. 2175–2189.
8. Experimental and numerical investigation of hole-flanging process with rubber punch / L. Belhassen, S. Koubaa, M. Wali, F. Dammak // Advances in mechanical engineering and mechanics II. 2021. P. 262-268.

## INVESTIGATION OF THE PROCESS OF FORMING THE TRANSVERSAL CORRUGATION OF BELLOWS WITH MINIMUM DIFFERENCE IN THICKNESS

© 2023 D.V. Antipov, A.A. Sharov, A.S. Maslennikova

Samara National Research University, Samara, Russia

In the article, studies were carried out to determine the possibility of confirming the hypothesis put forward about obtaining a more uniform bellows wall in the region of the corrugation top by shaping the bellows with an elastic medium in a two-stage method in a detachable sectional matrix using constrained bending technology. A description of the areas of application of bellows, their designs is given, the most advanced methods of manufacturing bellows and their main drawback are identified. The purpose of the study is defined and the corresponding tasks that need to be solved are set. The study used analytical research methods and finite element modeling. A method for shaping the bellows and the geometry of the shaping matrix are proposed. A technique for calculating the parameters of the technological process for two stages of bellows shaping is given. Pictures of the relative change in the thickness of the bellows corrugation during shaping in the traditional way and when shaping by the proposed method are presented. The distribution fields of equivalent stresses according to Mises are presented at the first and second transitions during shaping by the proposed method. A comparison is made and an assessment of the obtained results is given.

Keywords: bellows, technology, shaping, constrained bending, thinning, finite element modeling.

DOI: 10.37313/1990-5378-2023-25-3-10-15

EDN: JGIEXD

### REFERENCES

1. *Barvinok, V.A.* Vysokoeffektivnye tehnologicheskie process izgotovleniya elementov truboprovodnih I toplivnyh system letatelnyh apparatov / V.A. Barvinok, A.N. Kirillin, A.D. Komarov [i dr.]. – M.: Nauka i tehnologii, 2002. – 394 s.
2. *Gromova E.G.* Research of the parts pressing process using the elastic media pressure // *Key Engineering Materials*. 2016. V. 684. P. 273-277.
3. *Isachenkov, E.I.* Shtampovka rezinoy i zhidkostyu / E.I. Isachenkov. – M.: Mashinostroenie, 1967. – 367 s.
4. *Kirillin, A.N.* Razrabotka i issledovanie tehnologii formovki riftov elastichnoy sredoy na trubah bolshogo diametra / A.N. Kirillin, A.D. Komarov, V.K. Moiseev, Yu.V. Fedotov // *Problemy mashinostroeniya I avtomatizacii*. – 2000. – №1-2. – S. 64-68.
5. Material stress strain behaviour and elastomer pressure under constrained bending of sheet edges / *O.V. Lomovskoi, V.K. Moiseev, A.N. Plotnikov, etc.* // *Russian Aeronautics*. 2015. V. 58(1). P. 81-87.
6. Results of the sheet parts curved edges constrained bending with elastomer / *V.K. Moiseyev, A.A. Sharov, E.G. Gromova, etc.* // *Key Engineering Materials*. 2017. V. 746. P. 285-289.
7. Numerical simulation and experiment research on forming of two-step channel based on rubber pad pressing / *HY. Wang, Z. Wei, F. Teng, PC. Zhang, JC. Sun, SJ. Ji* // *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*. 2019. V. 101(5-8). P. 2175–2189.
8. Experimental and numerical investigation of hole-flanging process with rubber punch / *L. Belhassen, S. Koubaa, M. Wali, F. Dammak* // *Advances in mechanical engineering and mechanics II*. 2021. P. 262-268.

*Dmitry Antipov, Doctor of Technics, Associate Professor at the Department of Aircraft Production and Quality Control in Mechanical Engineering. E-mail: antipov.dv@ssau.ru*

*Andrey Sharov, Candidate of Technics, Associate Professor at the Department of Aircraft Production and Quality Control in Mechanical Engineering.*

*E-mail: aa.scharov@ssau.ru*

*Anna Maslennikova, Graduate Student.*

*E-mail: maslennikova.ssau@mail.ru*

УДК 67.019

## РАЗРАБОТКА МОДЕЛИ СОВЕРШЕНСТВОВАНИЯ СИСТЕМЫ КОНТРОЛЯ КАЧЕСТВА ЧАСТИЦ ПОРОШКА КРАСЯЩЕГО ПИГМЕНТА

© 2023 Т.И. Комаров, В.С. Пузырева, А.В. Чабаненко

Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения,  
г. Санкт-Петербург, Россия

Статья поступила в редакцию 15.05.2023

**Постановка задачи (актуальность работы).** Чаще всего, производство лакокрасочных изделий состоит из основных этапов: от поступления в складские помещения до фасовки по коробкам. И контроль качества осуществляется на входе и на выходе. Однако при производстве лакокрасочных изделий необходимо внедрить промежуточный контроль на этапе перемолла пигментного сырья в порошок тонкого помола, так как от размерного диапазона частиц порошка тонкого помола зависят основные качества готовой лакокрасочной продукции. ГОСТ 2093-82 рекомендует использование ситового анализа, который представляет собой механизм просеивания решетом от наиболее крупных размеров ячеек до наиболее мелких. Однако данный метод уступает более современным по скорости анализа на более чем 10 минут, по диапазону измерения частиц на 10-30% и по информативности анализа. **Цель работы.** Повышение качества лакокрасочных материалов посредством внедрения промежуточного контроля методом лазерной дифракции. **Используемые методы.** В представленной работе были применены такие методы, как математическое моделирование, метод идеализации и формализации процессов исследования лакокрасочных материалов. **Новизна.** В ходе работы были разработаны новые механизмы оценки и управления качеством частиц порошка красящего пигмента, а также новые способы повышения эффективности производства лакокрасочных материалов. В процессе исследования был проведен анализ технологического процесса. **Результат.** Итогом работы стала разработанная модель совершенствования системы контроля качества частиц порошка красящего пигмента. **Практическая значимость.** Разработанная модель повысит результативность текущих процессов производства лакокрасочных изделий посредством внедрения промежуточного контроля, что повысит прибыль организации и сократит издержки на качество.

*Ключевые слова:* контроль, качество, пигмент, порошок тонкого помола, лазерная дифракция.

DOI: 10.37313/1990-5378-2023-25-3-16-25

EDN: JMAQLO

### ВВЕДЕНИЕ

На данный момент даже в крупных компаниях, производящих лакокрасочную продукцию, недостаточно уделяют внимание контролю качества процесса измельчения пигмента до состояния порошка. Чаще всего оценка сводится к визуальному осмотру.

В соответствии с ГОСТ 2093-82 анализ формы и размера частиц рекомендуется производить ситовым методом, который представляет собой механизм просеивания решетом от наиболее крупных размеров ячеек до наиболее мелких. Проблема заключается в том, что такой метод дает очень скромное представление о составе порошка, а изображение частиц и вовсе не

предусмотрено. Кроме того, недостатком является ограниченность исследуемого размерного ряда и отсутствие автоматических систем.

Таким образом, требуется найти, изучить и внедрить такой метод анализа, который бы дал полную информацию о частицах, действовал автоматически и являлся выгодным вложением в качество.

Процесс производства лакокрасочных изделий состоит из 11 основных этапов (рис. 1).

На рисунке 1 видно, что проверка качества осуществляется только на входе сырья и на выходе готовой продукции.

ГОСТ 9.032-74 предписывает определенные свойства готовой лакокрасочной продукции: отсутствие волнистости, неоднородности структуры, разнооттеночности. [2, с. 3]

Данные требования формируют необходимость в контроле качества основного составляющего лакокрасочной продукции – порошкового пигмента. При внедрении промежуточного контроля появляется возможность регулировать выполнение вышеуказанных требований (рис. 2).

*Комаров Тимофей Игоревич, магистрант.*

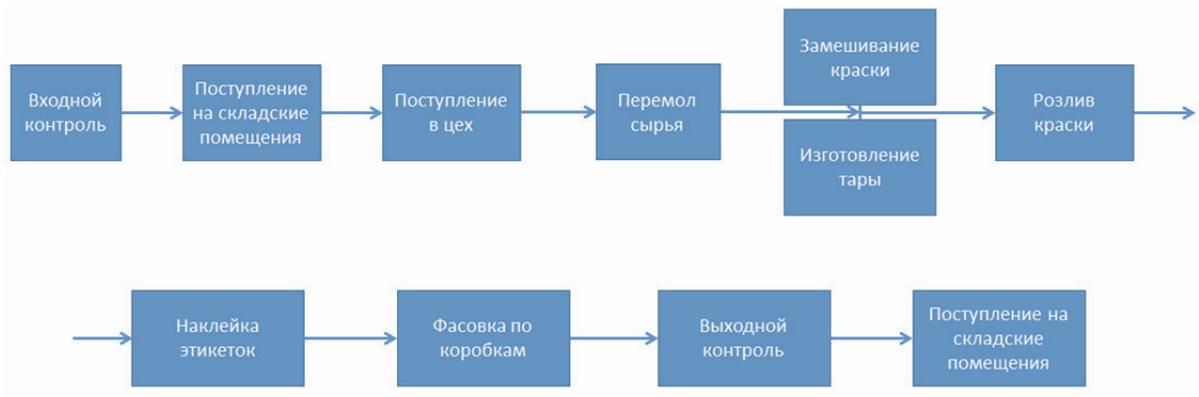
*E-mail: tim1kot@yandex.ru SPIN-код автора: 5009-3930*

*Пузырева Виктория Сергеевна, магистрант.*

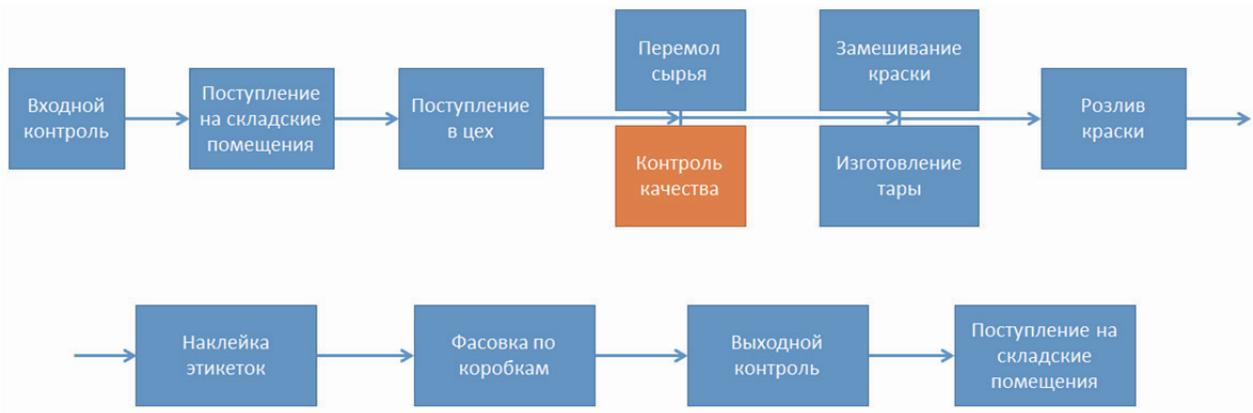
*E-mail: vikar1999@mail.ru SPIN-код автора: 1185-1776*

*Чабаненко Александр Валерьевич, кандидат технических наук, доцент кафедры инноватики и интегрированных систем качества.*

*E-mail: a@chabanenko.ru ORCID 0000-0002-5949-6579*



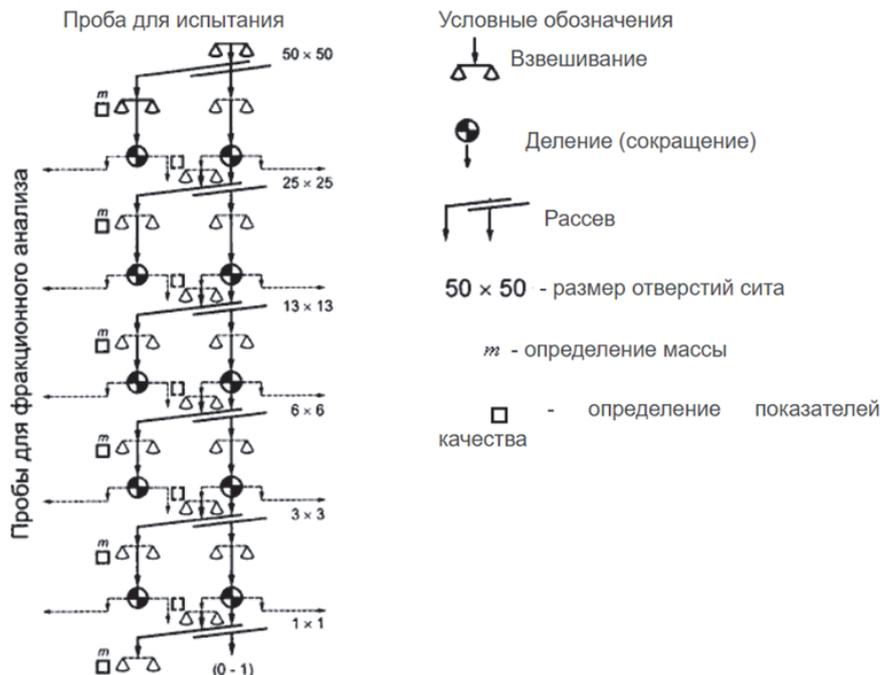
**Рис. 1.** Карта процессов для визуализации производства ЛКМ [1]  
**Fig. 1.** Process map for visualization of paintwork production [1]



**Рис. 2.** Измененная карта процессов для визуализации производства ЛКМ  
**Fig. 2.** Modified process map for visualization of paintwork production

В соответствии с ГОСТ 2093-82 анализ формы и размера частиц рекомендуется производить ситовым методом, который представляет

собой механизм просеивания решетом от наиболее крупных размеров ячеек до наиболее мелких (рис. 3).



**Рис. 3.** Схема проведения ситового анализа по ГОСТ 2093-82 [3; с.4]  
**Fig. 3.** Scheme of sieve analysis according to GOST 2093-82

Проблема заключается в ограниченности исследуемого размерного ряда и в отсутствии автоматических систем. Кроме того, данный метод дает очень краткую информацию о составе порошка, а изображение частиц не предусмотрено. А, как было доказано, [4, с. 32-33] детальный анализ формы и размеров частиц позволяет определить, например, уровень прочности материала (рис. 4). [5]

На данный момент в России, кроме ситового анализа, существует еще несколько методов измерения и анализа частиц тонкого помола, среди которых: микроскопический метод, лазерная дифракция, динамический анализ и т.д. Компания «MICROTRAC» опубликовала данные о возможностях каждого метода анализа (рис. 5).

Сравнение характеристик методов анализа представлено в табл. 1.

Для частиц перемолотого пигмента необходим широкий диапазон измерения, скорость осуществления анализа и возможность анализа всех частиц. Наложив ограничения, продиктованные потребительскими ожиданиями, получим допустимые альтернативы (табл. 2).

Введем критерии для оценки: стоимость осуществления ( $K_1$ ), измеряемый диапазон ( $K_2$ ), полнота анализа ( $K_3$ ), сложность обучения сотрудников ( $K_4$ ), время измерений ( $K_5$ ).

Путем попарного сравнения, выявим наиболее предпочтительную альтернативу (табл. 3).

Таким образом, наиболее предпочтительный метод – «Лазерная дифракция (сухая)» ( $A_2$ ) со взвешенной оценкой = 0,348.

Лазерная дифракция – это метод измерения частиц путем направления на них лазерного луча. Луч отражается от частицы под некоторым углом. Как раз данные об этом угле и позволяют определить размер анализируемой частицы. [7] Аппарат выглядит следующим образом (рис. 6).

Имея наиболее предпочтительный метод анализа частиц пигментного порошка тонкого помола, построим имитационную модель распределения частиц.

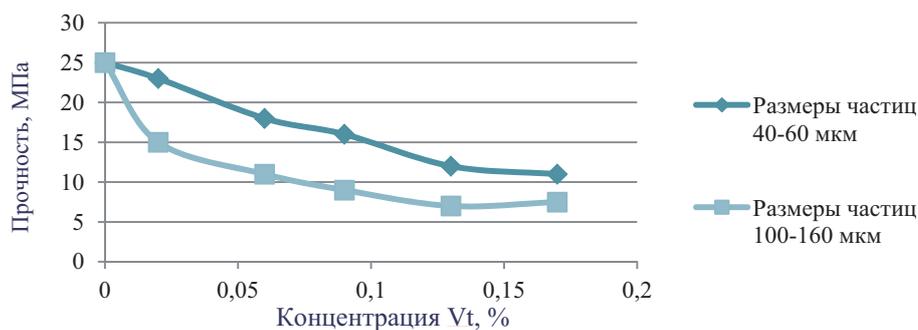


Рис. 4. Зависимость прочности композитов на основе СЭВА от содержания частиц SiO<sub>2</sub> при разных размерах

Fig. 4. Dependence of the strength of CMEA-based composites on the content of SiO<sub>2</sub> particles at different sizes

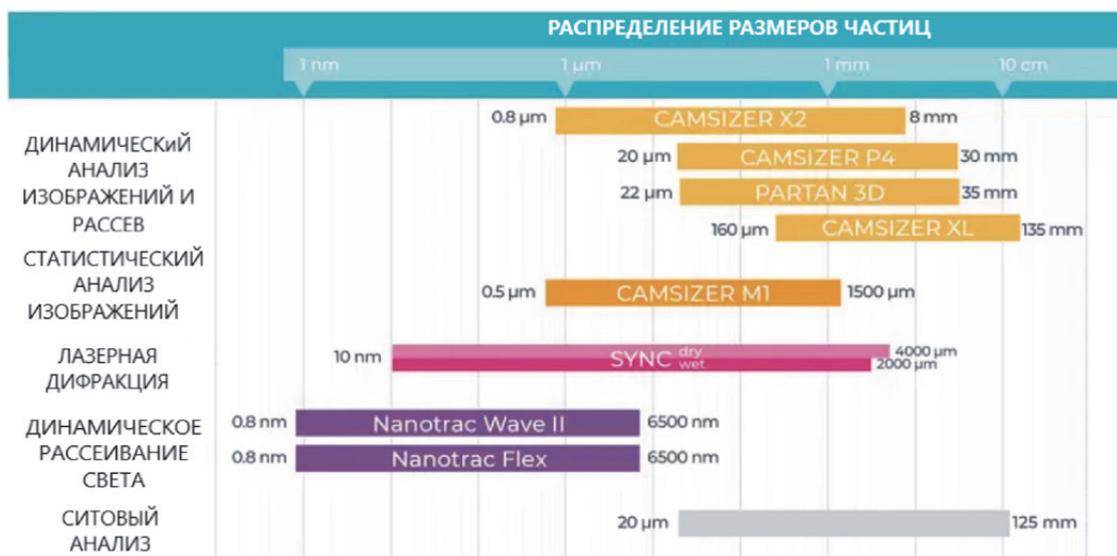


Рис. 5. Распределение частиц по размерам при данных методах анализа [6]

Fig. 5. Particle size distribution with these analysis methods [6]

**Таблица 1.** Генерация альтернатив  
**Table 1.** Generation of alternatives

№	Наименование метода анализа	Диапазон измерений, мкм	Время измерения, мин	Полнота анализа
1	Динамический анализ	0,8-80	20	Случайный анализ частиц (размер + форма)
2	Анализ изображений и рассев	20-30	15	Случайный анализ частиц (размер + форма)
3	Статический анализ изображений	0,5-1500	10	Анализ всех частиц (размер)
4	Лазерная дифракция (сухая)	0,01-4000	до 5	Анализ всех частиц (размер)
5	Лазерная дифракция (влажная)	0,01-2000	до 5	Анализ всех частиц (размер)
6	Динамическое рассеивание света	0,8-6,5	5-10	Случайный анализ частиц (размер)
7	Ситовый анализ	20-125000	5-10	Анализ всех частиц (размер)

**Таблица 2.** Допустимые альтернативы  
**Table 2.** Acceptable alternatives

№	Наименование метода анализа	Диапазон измерений, мкм	Время измерения, мин	Полнота анализа
1	Статический анализ изображений	0,5-1500	10	Анализ всех частиц (размер)
2	Лазерная дифракция (сухая)	0,01-4000	до 5	Анализ всех частиц (размер)
3	Лазерная дифракция (влажная)	0,01-2000	до 5	Анализ всех частиц (размер)
4	Ситовый анализ	20-125000	5-10	Анализ всех частиц (размер)

**Таблица 3.** Свертка альтернатив по критериям  
**Table 3.** Convolution of alternatives by criteria

Альтернативы	Критерии					Взвешенные оценки альтернатив
	K <sub>1</sub>	K <sub>2</sub>	K <sub>3</sub>	K <sub>4</sub>	K <sub>5</sub>	
A <sub>1</sub>	0,070	0,093	0,206	0,446	0,182	0,182
A <sub>2</sub>	0,274	0,401	0,449	0,160	0,347	0,348
A <sub>3</sub>	0,171	0,335	0,172	0,104	0,273	0,217
A <sub>4</sub>	0,485	0,171	0,172	0,290	0,198	0,253
					Σ	1

Американская фармацевтическая компания «Review» опубликовала данные об измерениях размеров частиц пигментов разного назначения при определенной степени затемнения (рис. 7). Было выяснено, что распределение частиц по размерам имеет нормально распределение. Значит, есть возможность построить функциональную эмпирическую модель, характеризующую это распределение.

Матрица планирования эксперимента представлена в табл. 4.

Среднее значение параметра по параллельным опытам вычисляется по формуле (1).

$$\bar{y}_i = \frac{1}{m_i} \sum_{j=1}^{m_i} y_{ij}, \quad (1)$$

где  $m_i$  – число параллельных опытов в  $i$ -ой сточ-

ке матрицы планирования;  $y_{ij}$  – значение выходного параметра.

Дисперсия параллельных опытов вычисляется по формуле (2).

$$S_{\text{в.о.сп}}^2 = \frac{1}{m_i} \sum_{j=1}^{m_i} (y_{ij} - \bar{y}_i)^2, \quad (2)$$

где  $m_i$  – число параллельных опытов в  $i$ -ой сточке матрицы планирования;  $y_{ij}$  – значение выходного параметра;  $\bar{y}_i$  – среднее значение параметра по параллельным опытам.

Все результаты внесены в табл. 5.

Из таблицы 5 видно, что для 2 и 8 опыта величина дисперсий больше/меньше остальных, поэтому была осуществлена проверка дисперсий с использованием критерия Кохрена.



Рис. 6. Лазерный анализатор  
Fig. 6. Laser analyzer

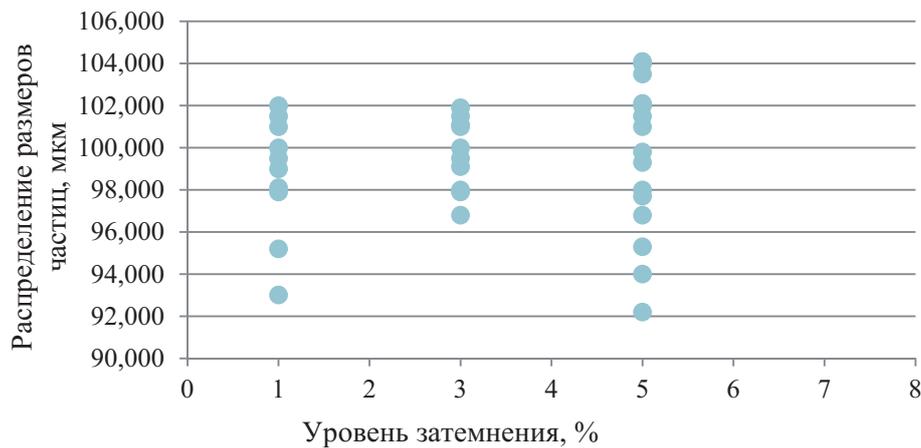


Рис. 7. Анализ размеров частиц по % затемнения [9; с.14]  
Fig. 7. Particle size analysis by % dimming

Таблица 4. Матрица планирования и результаты эксперимента  
Table 4. Planning matrix and experiment results

N	Планирование				Выход		
	X0	X1	X2	X3	Y1	Y2	Y3
1	+	-	-	-	93,01	96,80	91,00
2	+	+	-	-	95,20	97,90	91,50
3	+	-	+	-	97,90	98,00	93,58
4	+	+	+	-	98,10	99,10	94,00
5	+	-	-	+	99,00	99,50	95,20
6	+	+	-	+	102,00	101,90	99,50
7	+	-	+	+	103,70	103,50	101,50
8	+	+	+	+	104,15	104,30	103,10

Дисперсия воспроизводимости для всего эксперимента рассчитывается по формуле (3).

$$S_{\text{воспр эксп}}^2 = S_{(y)}^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N S_{\text{воспр}}^2, \quad (3)$$

$$S_{\text{воспр эксп}}^2 = 5,264.$$

Ошибка всего эксперимента вычисляется по формуле (4).

$$S(y) = \sqrt{S_{(y)}^2}, \quad (4)$$

$$S(y) = \sqrt{5,264} = 2,294.$$

**Таблица 5. Расчет значений**  
**Table 5. Calculation of values**

N	Планирование								Выход			$\bar{y}_i$	$S_{\text{воспр}}^2$
	X0	X1	X2	X3	X1X2	X1X3	X2X3	X1X2X3	Y1	Y2	Y3		
1	+	-	-	-	+	+	+	-	93,01	96,80	91,00	93,60	8,67
2	+	+	-	-	-	-	+	+	95,20	97,90	91,50	94,87	10,32
3	+	-	+	-	-	+	-	+	97,90	98,00	93,58	96,49	6,37
4	+	+	+	-	+	-	-	-	98,10	99,10	94,00	97,07	7,30
5	+	-	-	+	+	-	-	+	99,00	99,50	95,20	97,90	5,53
6	+	+	-	+	-	+	-	-	102,00	101,90	99,50	101,13	2,00
7	+	-	+	+	-	-	+	-	103,00	102,00	101,00	102,00	1,48
8	+	+	+	+	+	+	+	+	104,15	104,30	103,10	103,85	0,43
Сумма:											787,81	42,11	

Коэффициенты уравнения рассчитываются по формулам (5), (6), (7).

$$b_0 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \bar{y}_i, \quad (5)$$

$$b_i = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_{in} \bar{y}_i, \quad (6)$$

$$b_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_{in} X_{jn} \bar{y}_i, \quad (7)$$

где N – количество опытов.

После расчета всех коэффициентов уравнение регрессии принимает следующий вид:

$$\hat{y} = 98,48 + 0,75X_1 + 1,6X_2 + 2,97X_3 - 0,52X_1X_2 + 0,29X_1X_3 + 0,33X_2X_3 - 0,2X_1X_2X_3.$$

После проверки статистической значимости коэффициентов с помощью t-критерия Стьюдента, выяснилось, что коэффициенты уравнения  $b_{12}$ ,  $b_{13}$ ,  $b_{23}$  и  $b_{123}$  оказались статистически не значимыми и уравнение регрессии принимает вид:

$$\hat{y} = 98,48 + 0,75X_1 + 1,6X_2 + 2,97X_3$$

Для доказательства адекватности модели и оценки отклонений вычисленных по уравнениям регрессии значений функции был использован критерий Фишера F-критерий.

Таким образом, функциональная эмпирическая модель имеет следующий вид:

$$\hat{y} = 98,48 - 0,75X_1 + 1,6X_2 + 2,97X_3. \quad (8)$$

Модель означает, что при задании факторов  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_3$  (степени затемнения для каждого из трех лазеров), частицы будут распределяться близ прямой, заданной данным уравнением. Можно сказать, что с увеличением значений факторов  $X_2$  и  $X_3$  (уровня затемнения на лазерах 2 и 3), то и значения результатов будут увеличиваться (так как коэффициенты  $b_2$  и  $b_3$  – положительные). А с увеличением фактора  $X_1$ , значения измерения будут уменьшаться, так как коэффициент  $b_1$  имеет отрицательное значение. [10;с.10-14]

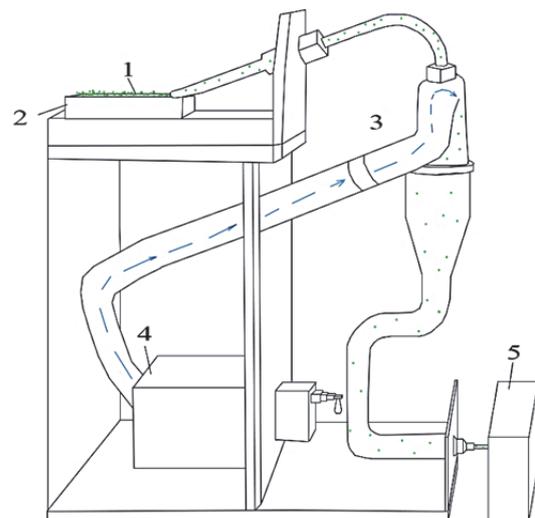
Внешнее схематичное изображение установки представлено на рис. 8.

Исследуемый образец 1 устанавливается на лоток 2 и всасывается в систему анализатора.

Система доставки образца 3 направляет сжатый воздух 4 через встроенные сопла, обеспечивая «торможение» частиц материала перед подачей в измерительную ячейку 5.

Внутреннее схематичное изображение измерительной ячейки представлено на рис. 9.

Для измерения используются лазерные диоды и системы анализа изображений. Оптическая система состоит из трех диодных лазеров 1,2,3, трех постоянно включенных детекторов 4,5,6, находящихся в фиксированных точках. Лазерные детекторы улавливают свет, рассеянный под углом 165°. Одновременно отдельный светодиодный источник света 7 освещает кювету с образцом, высокоскоростная цифровая камера 8 фиксирует изображение частиц. Данные анализируются с помощью специального программного обеспечения, использующего функциональную эмпирическую модель (21), где  $X_1, X_2, X_3$  – это факторы, влияющие на частицу.



**Рис. 8. Схематичное изображение разработанного лазерного анализатора**  
**Fig. 8. Schematic representation of the developed laser analyzer**

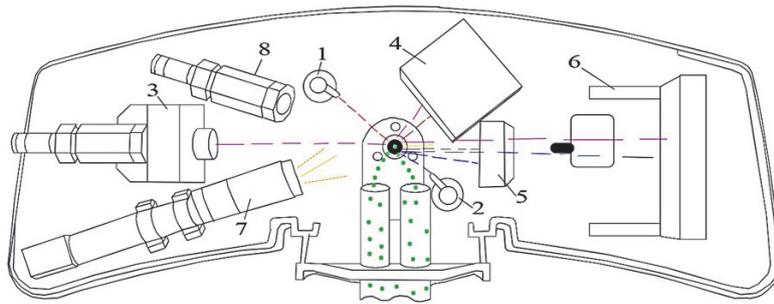


Рис. 9. Схематичное изображение оптической системы разработанного лазерного анализатора  
 Fig. 9. Schematic representation of the optical system of the developed laser analyzer

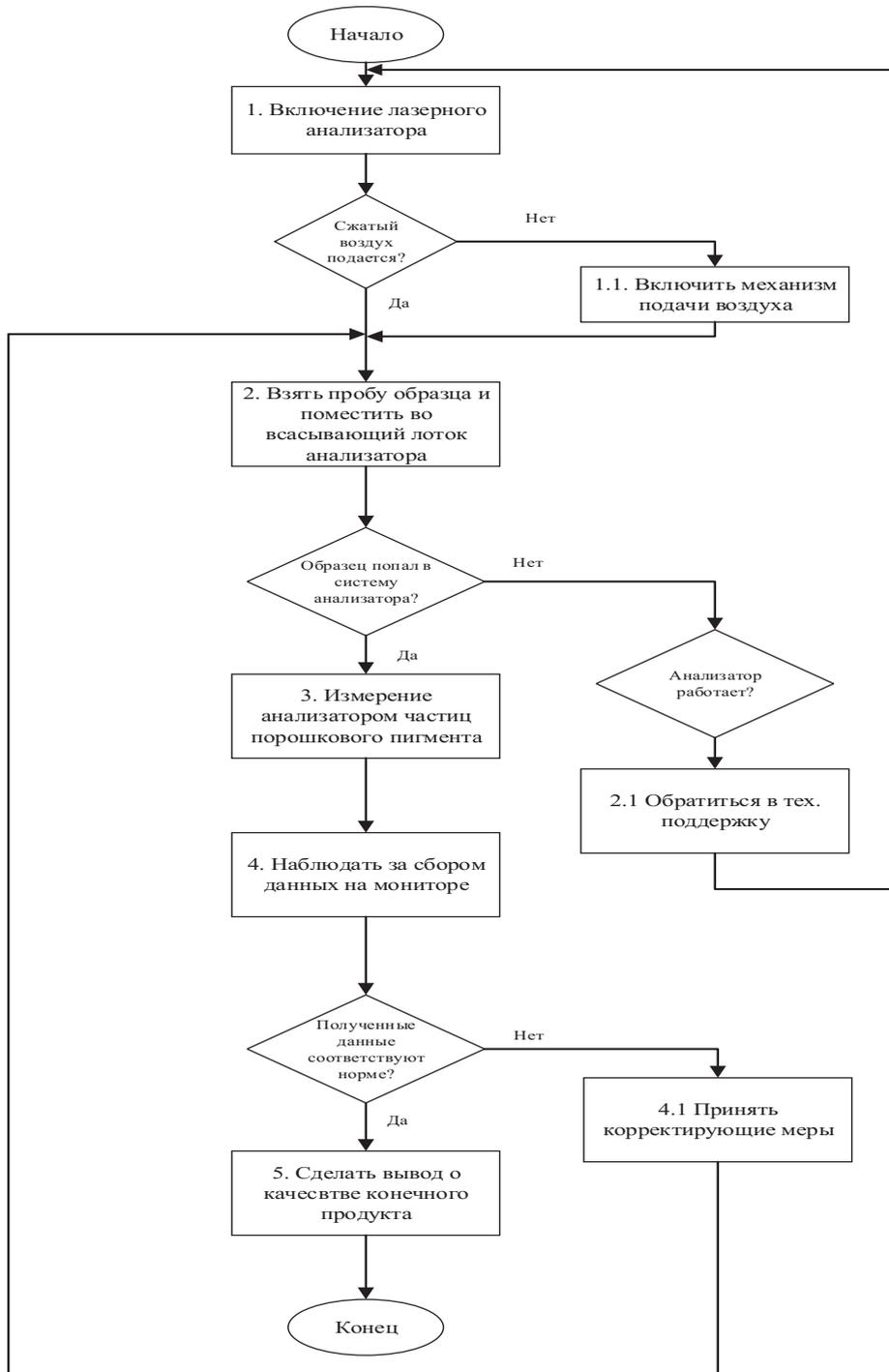


Рис. 10. Алгоритм процесса измерения  
 Fig. 10. Algorithm of the measurement process

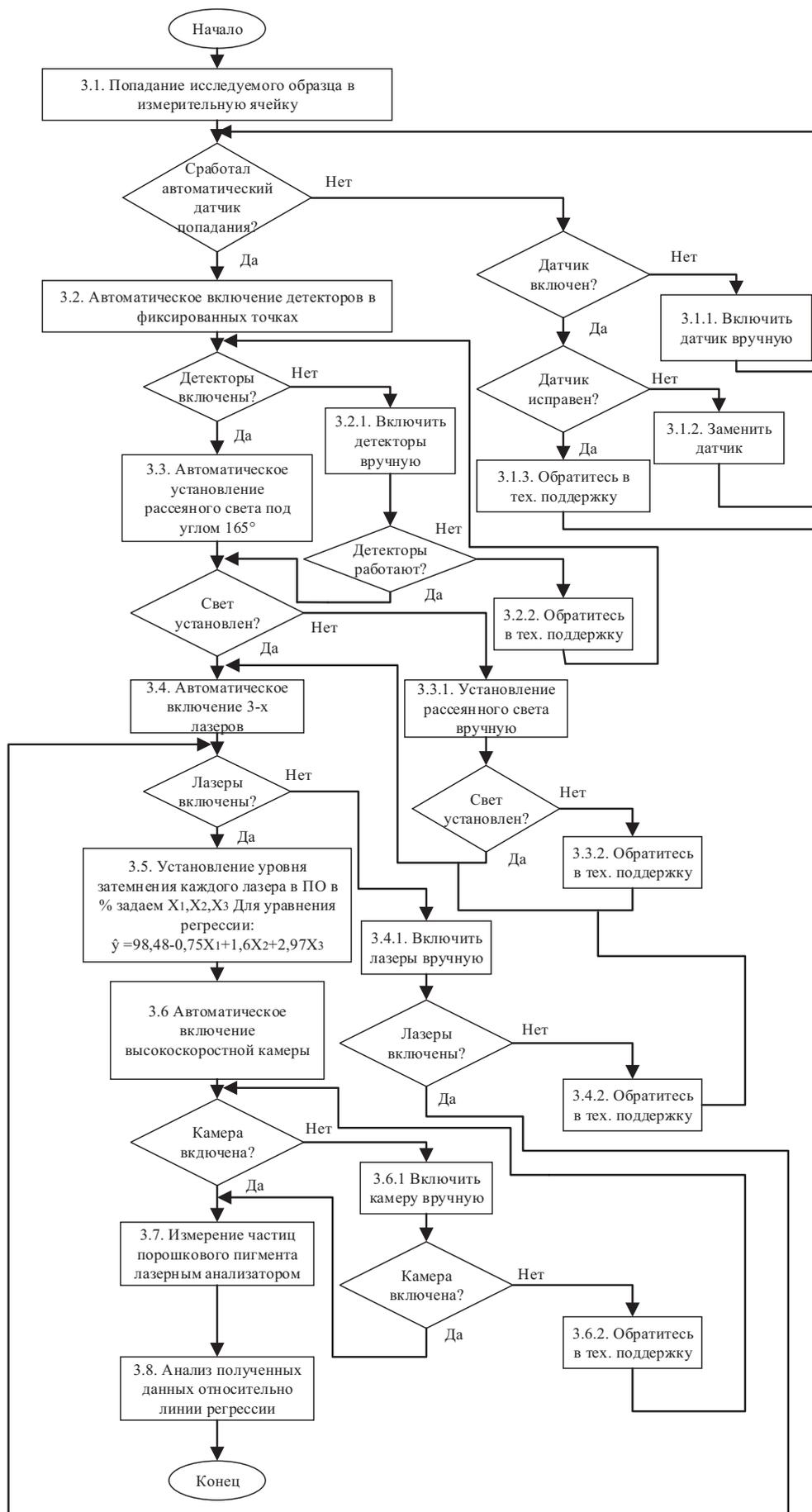


Рис. 11. Алгоритм процесса измерения лазерным анализатором  
 Fig. 11. Algorithm of the laser analyzer measurement process

В целом, общий алгоритм анализом методом лазерной дифракции представлен на рис. 10.

Алгоритм процесса измерения части порошкового пигмента представлен на рис. 11.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, выполнить главные требования заинтересованных сторон механическим человеческим трудом не представляется возможным, поэтому необходимо прибегнуть к автоматизации, роботизации и цифровизации процесса анализа распределения по размерам частиц тонкого помола.

В ходе исследования была разработана модель совершенствования системы контроля качества частиц порошка красящего пигмента, с помощью которой производство получает точные данные о характеристиках и параметрах частиц. Система анализирует не только размер, но и предоставляет изображение исследуемых частиц, что позволяет повысить прибыль организации и сократить издержки на качество.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мануленко, А.Ф. Технология лакокрасочных материалов и покрытий. Проектирование производств / А.Ф. Мануленко. – Минск: БГТУ, 2021. – 114 с.
1. ГОСТ 9.032-74. Единая система защиты от коррозии и старения. Покрытия лакокрасочные. Группы, технические требования и обозначения. – М.: Стандартинформ, 1989. – 5 с.
3. ГОСТ 2093-82. Ситовый метод определения гранулометрического состава. – М.: Стандартинформ, 2015. – 20 с.
4. Десятков, А.В. Влияние размера частиц на механические свойства композитов на основе однородно деформирующегося полимера / А.В. Десятков. – М.: Академия естествознания, 2009. – Т.23. №5. – С. 32-33.
5. Александров, А.А. Взаимосвязь между геометрическими параметрами зерен шлифовальных порошков, исследованная методами лазерной дифракции и оптической микроскопии / А.А. Александров // Современные научные исследования и инновации. – 2018. – № 5(85). – 8 с.
6. Microtrac MRB: Сравнение методов определения размеров частиц – URL: <https://www.microtrac.com/ru> (дата обращения 29.11.2022).
7. Фармакопоя: Определение распределения частиц по размеру методом лазерной дифракции света. – URL: <https://pharmacopoeia.ru> (дата обращения 15.12.2022).
8. Гарибей К., Олсон Э., Салсбери Дж. С. Понимание взаимосвязи между источниками красного и синего света при определении профилей распределения частиц по размерам. – URL: <https://www.americanpharmaceuticalreview.com> (дата обращения 29.01.2023).
9. Пузырева, В.С. Исследование метода анализа распределения частиц тонкого помола / В.С. Пузырева. – Пенза: Молодые учёные России, 2021. – 338 с.
10. Пузырева, В.С. Построение функциональной эмпирической модели распределения по размерам частиц тонкого помола / В.С. Пузырева. – Пенза: Фундаментальные и прикладные научные исследования, 2022. 222 с.

### REFERENCES

1. Manulenko, A.F. Tekhnologiya lakokrasochnyh materialov i pokrytij. Proektirovanie proizvodstv / A.F. Manulenko. – Minsk: BG TU, 2021. – 114 s.
2. GOST 9.032-74. Edinaya sistema zashchity ot korrozii i stareniya. Pokrytiya lakokrasochnye. Gruppy, tekhnicheskie trebovaniya i oboznacheniya. – M.: Standartinform, 1989. – 5 s.
3. GOST 2093-82. Sitovyy metod opredeleniya granulometricheskogo sostava. – M.: Standartinform, 2015. – 20 s.
4. Desyatkov, A.V. Vliyanie razmera chastic na mekhanicheskie svoystva kompozitov na osnove odnorodno deformiruyushchegosya polimera / A.V. Desyatkov. – M.: Akademiya estestvoznaniya, 2009. – T.23. – №5. – S. 32-33.
5. Aleksandrov, A.A. Vzaimosvyaz' mezhdru geometricheskimi parametrami zeren shlifoval'nyh poroshkov, issledovannaya metodami lazernoj difrakcii i opticheskoy mikroskopii / A.A. Aleksandrov // Sovremennye nauchnye issledovaniya i innovacii. – 2018. – № 5(85). – 8 s.
6. Microtrac MRB: Sravnenie metodov opredeleniya razmerov chastic, URL: <https://www.microtrac.com/ru> (data obrashcheniya 29.11.2022).
7. Farmakopeya: Opredelenie raspredeleniya chastic po razmeru metodom lazernoj difrakcii sveta. – URL: <https://pharmacopoeia.ru> (data obrashcheniya 15.12.2022).
8. Garibey K., Olson E., Salsberi Dzh. S. Ponimanie vzaimosvyazi mezhdru istochnikami krasnogo i sinego sveta pri opredelenii profilej raspredeleniya chastic po razmeram. – URL: <https://www.americanpharmaceuticalreview.com> (data obrashcheniya 29.01.2023).
9. Puzyreva, V.S. Issledovanie metoda analiza raspredeleniya chastic tonkogo pomola / V.S. Puzyreva. – Penza: Molodye uchyonye Rossii, 2021. – 338 s.
10. Puzyreva, V.S. Postroenie funkcional'noj empiricheskoy modeli raspredeleniya po razmeram chastic tonkogo pomola / V.S. Puzyreva. – Penza: Fundamental'nye i prikladnye nauchnye issledovaniya, 2022. – 222 s.

**DEVELOPMENT OF A MODEL FOR IMPROVING THE QUALITY CONTROL SYSTEM  
OF COLORING PIGMENT POWDER PARTICLES**

© 2023 T.I. Komarov, V.S. Puzyreva, A.V. Chabanenko

St. Petersburg State University of Aerospace Instrumentation, St. Petersburg, Russia

**Problem Statement (Relevance).** Most often, the production of paints and varnishes consists of the main stages: from receipt to warehouses to packaging in boxes. And quality control is carried out at the entrance and at the exit. However, in the production of paints and varnishes, it is necessary to introduce intermediate control at the stage of grinding pigment raw materials into finely ground powder, since the main qualities of the finished paintwork product depend on the size range of particles of the finely ground powder. GOST 2093-82 recommends the use of sieve analysis, which is a sieving mechanism with a sieve from the largest mesh sizes to the smallest. However, this method is inferior to more modern ones in terms of analysis speed by more than 10 minutes, in terms of particle measurement range by 10-30%, and in terms of information content of the analysis. **Objectives.** Improving the quality of paints and varnishes through the introduction of intermediate control by laser diffraction. **Methods Applied.** In the presented work, methods such as mathematical modeling, the method of idealization and formalization of the research processes of paints and varnishes were applied. **Originality.** In the course of the work, new mechanisms were developed for assessing and controlling the quality of the particles of the coloring pigment powder, as well as new ways to improve the efficiency of the production of paints and varnishes. In the course of the study, an analysis of the technological process was carried out. **Result.** The result of the work was the developed model for improving the quality control system for the particles of the coloring pigment powder. **Practical Relevance.** The developed model will increase the effectiveness of current processes for the production of paints and varnishes through the introduction of intermediate control, which will increase the profit of the organization and reduce quality costs.

*Keywords:* quality control, pigment, fine powder, laser diffraction.

DOI: 10.37313/1990-5378-2023-25-3-16-25

EDN: JMAQLO

---

*Timofey Komarov, Undergraduate.*

*E-mail: tim1kom@yandex.ru Author SPIN: 5009-3930.*

*Victoria Puzyreva, Undergraduate.*

*E-mail: vikap1999@mail.ru. Author's SPIN: 1185-1776.*

*Alexander Chabanenko, Candidate of Technical Sciences,  
Associate Professor of the Department of Innovation and  
Integrated Quality Systems.*

*E-mail: a@chabanenko.ru ORCID 0000-0002-5949-6579*

УДК 658.56

## ОЦЕНКА РИСКОВ И ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ОТКАЗОВ ПРИ ПРОЕКТИРОВАНИИ ПРОЦЕССА ИЗГОТОВЛЕНИЯ ГИБКИХ КОЛЕС ВОЛНОВЫХ ЗУБЧАТЫХ ПЕРЕДАЧ НА ОСНОВЕ МЕТОДИКИ PFMEA

© 2023 Д.В. Назаров, Д.В. Антипов, О.В. Ломовской

Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева  
г. Самара, Россия

Статья поступила в редакцию 15.05.2023

В статье представлена модель оценки рисков потенциальных отказов процесса механической обработки гибких колес волновых зубчатых передач (ВЗП). Построенная модель основана на методике анализа видов и последствий потенциальных несоответствий процесса (PFMEA). Проведен структурный, функциональный анализ и анализ отказов, возникающих в процессе токарной обработки, шлифования и нарезания зубьев гибкого колеса. В результате анализа проведена оценка рисков и установлен перечень мероприятий, направленных на повышение качества процесса механической обработки гибких колес ВЗП.

*Ключевые слова:* модель, риск, отказ, процесс, базирование силовое, втулка из материала с эффектом памяти формы.

DOI: 10.37313/1990-5378-2023-25-3-26-34

EDN: JVAUEM

Одним из направлений развития современной космической техники является минимизация габаритно-массовых параметров приводов различных механизмов, улучшения их выходных характеристик и увеличения времени их безотказной работы. В связи с этим, большой интерес представляет использование приводов с волновыми зубчатыми передачами (ВЗП), находящими всё более широкое применение в различных отраслях техники. Основными достоинствами ВЗП являются: большая редуциция при малой массе, высокий КПД, значительный передаваемый крутящий момент при распределении усилий на большое число зубьев, высокая кинематическая точность, возможность передачи движения в герметизированное пространство. Эти положительные качества достигаются за счет использования зубчатых колес с очень малым модулем (0,2 – 0,4 мм) и волнообразного преобразователя движения [1, 2].

Однако при ряде достоинств ВЗП перед другими передачами, имеют место технологические трудности в изготовлении ее конструктивных

*Назаров Денис Викторович, старший преподаватель кафедры производства летательных аппаратов и управления качеством в машиностроении.*

*E-mail: dennynaz@yandex.ru*

*Антипов Дмитрий Вячеславович, доктор технических наук, доцент, заведующий кафедрой производства летательных аппаратов и управления качеством в машиностроении. E-mail: antipov.dv@ssau.ru*

*Ломовской Олег Владиславович, кандидат технических наук, доцент кафедры производства летательных аппаратов и управления качеством в машиностроении. E-mail: oleg.lomovskoi@yandex.ru*

элементов и недостаточно высокие показатели надежности и долговечности. Как показали исследования [1, 2], основными причинами выхода из строя ВЗП являются:

- поломка гибкого колеса от усталостных трещин, возникающих во впадинах зубьев;
- изнашивание зубьев, обусловленное перекосом гибкого колеса, деформируемого с одного торца; прогрессирующее изнашивание – сколжением зубьев при вхождении в зацепление.

К образованию трещины приводит действие знакопеременных напряжений изгиба в ободке гибкого колеса, в отличии от обычных зубчатых колес, где разрушающими являются напряжения изгиба зуба. Поэтому критической зоной гибкого колеса, т.е. местом где может произойти разрушение является дно впадины зубчатого венца, которое имеет сложную геометрическую форму.

Изнашивание зубьев и поломка гибкого зубчатого колеса ВЗП определяется отклонениями геометрических размеров и формы зубчатого венца, проявляющимися, в конечном итоге, из-за несовершенства технологии механической обработки гибких колес.

Формообразование оболочки и зубообразование являются наиболее сложными операциями при изготовлении гибкого колеса. Тонкостенная заготовка гибкого зубчатого колеса не обладает достаточной жесткостью и под действием давления инструмента, станочного приспособления и других нагрузок, неизбежных при механической обработке, изменяют свою форму и размеры. В процессе обработки детали узлы станка, приспособление, инструмент и заготовка деформи-

руются, что в той или иной мере отражается на точности формы и её размеров. В связи с этим совершенствование технологического процесса в части минимизации потенциальных дефектов и отказов представляет собой актуальную задачу.

Предлагается разработать приспособление, обеспечивающее жесткость заготовки в процессе силового базирования в оснастке и при ее дальнейшей механической обработке. Существует пример реверсивного силового привода с эффектом памяти формы (ЭПФ) для станочных приспособлений механической обработки деталей летательных аппаратов [3]. Создание прогрессивного технологического оснащения с применением материала с ЭПФ позволит обеспечить требуемую стабильность и осесимметричность радиальных перемещений. Втулка, изготовленная из сплава, обладающего ЭПФ

(например *TiNi*), при соответствующей предварительной обработке способна уменьшаться в диаметре при нагреве (этап установки заготовки) и увеличиваться при охлаждении (этап закрепления и обработки) [4].

Целью данного исследования является разработка типовой модели оценки рисков, построенной на основе анализа видов и последствий потенциальных несоответствий процесса (PFMEA), возникающих в процессе механической обработки оболочки и нарезания зубчатого венца гибкого колеса ВЗП на оправке с силовым элементом из материала с ЭПФ. Блок-схема процесса изготовления гибкого колеса ВЗП представлена на рисунке 1.

PFMEA – это структурированный метод улучшения, позволяющий выявлять потенциальные сбои, анализировать их причины и последствия,

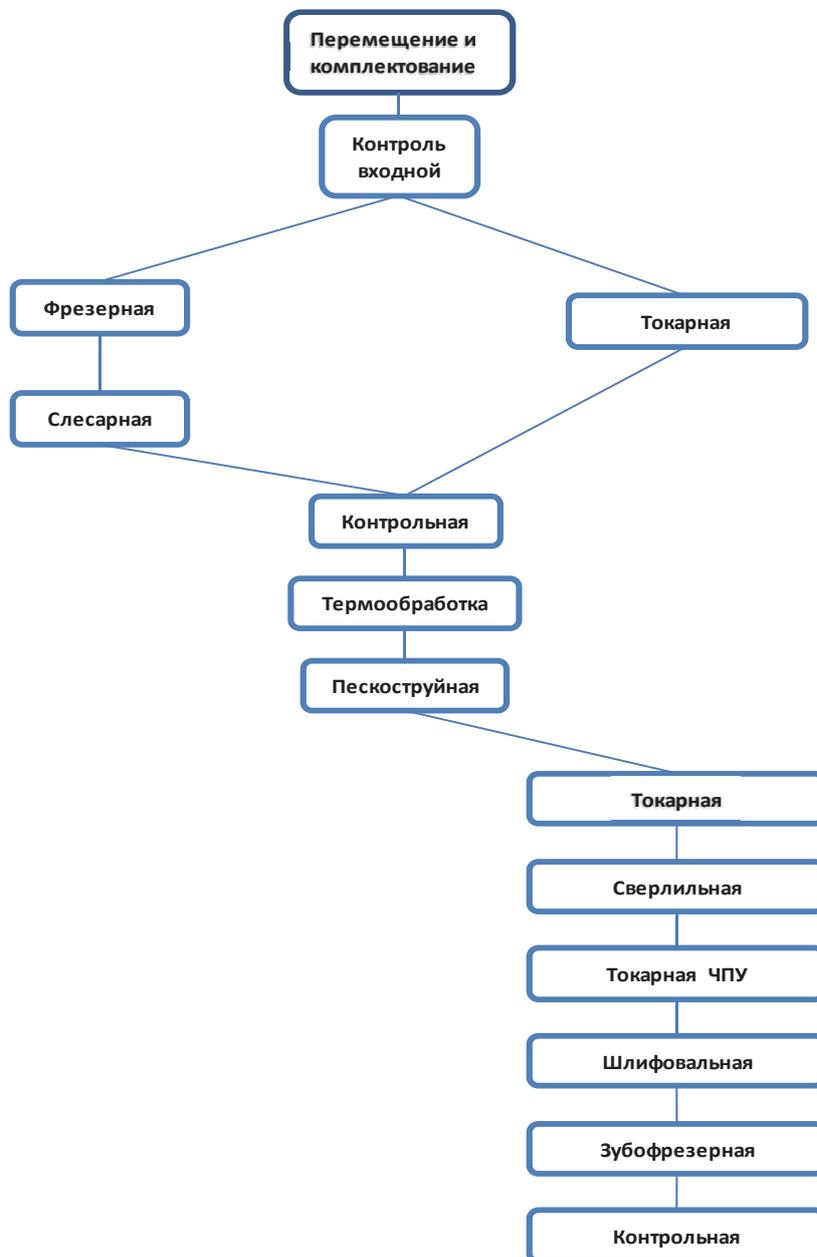


Рис. 1. Блок-схема процесса изготовления гибкого колеса ВЗП

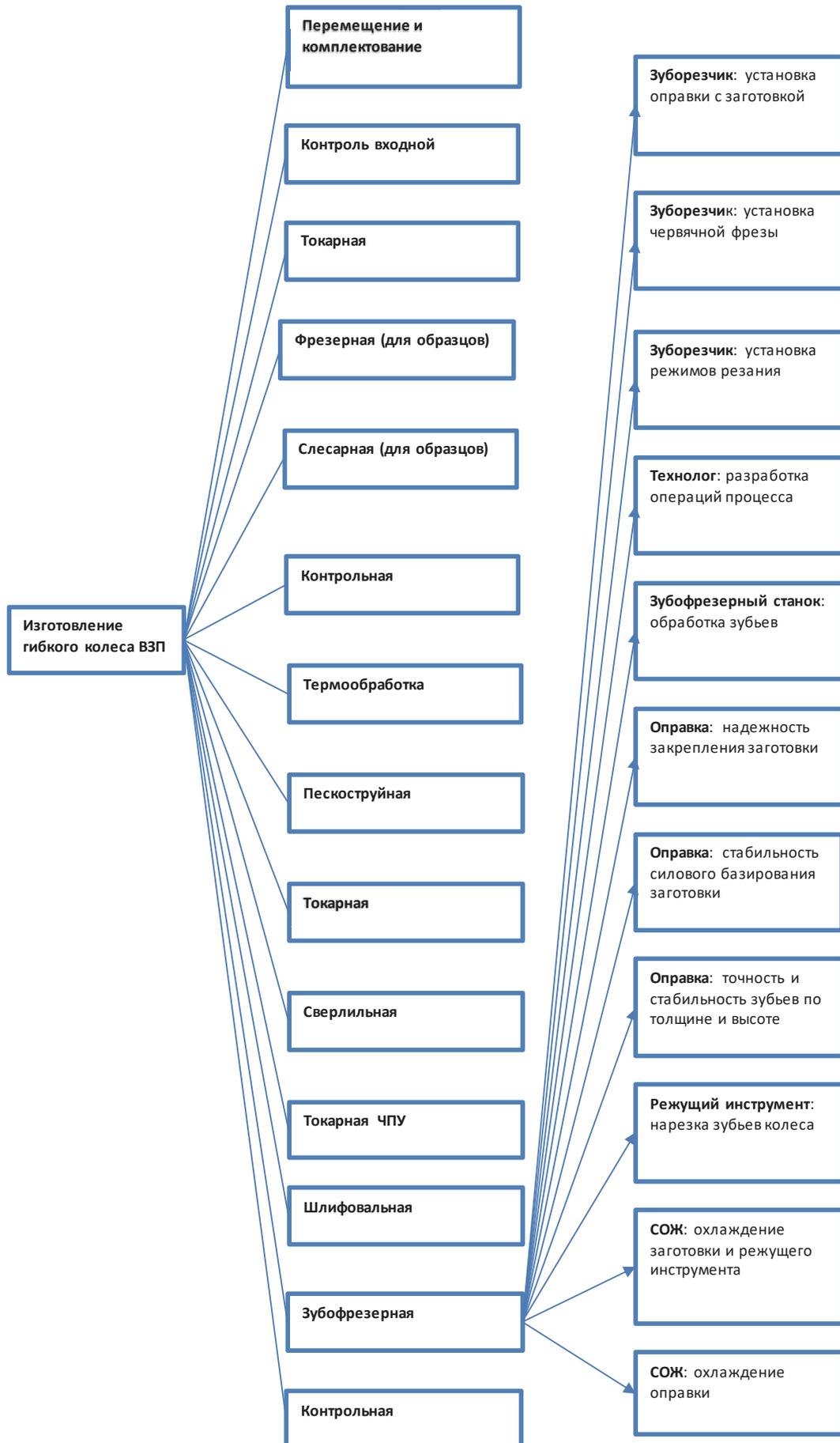


Рис. 2. Дерево структурного анализа для операции «Нарезание зубьев гибкого колеса»

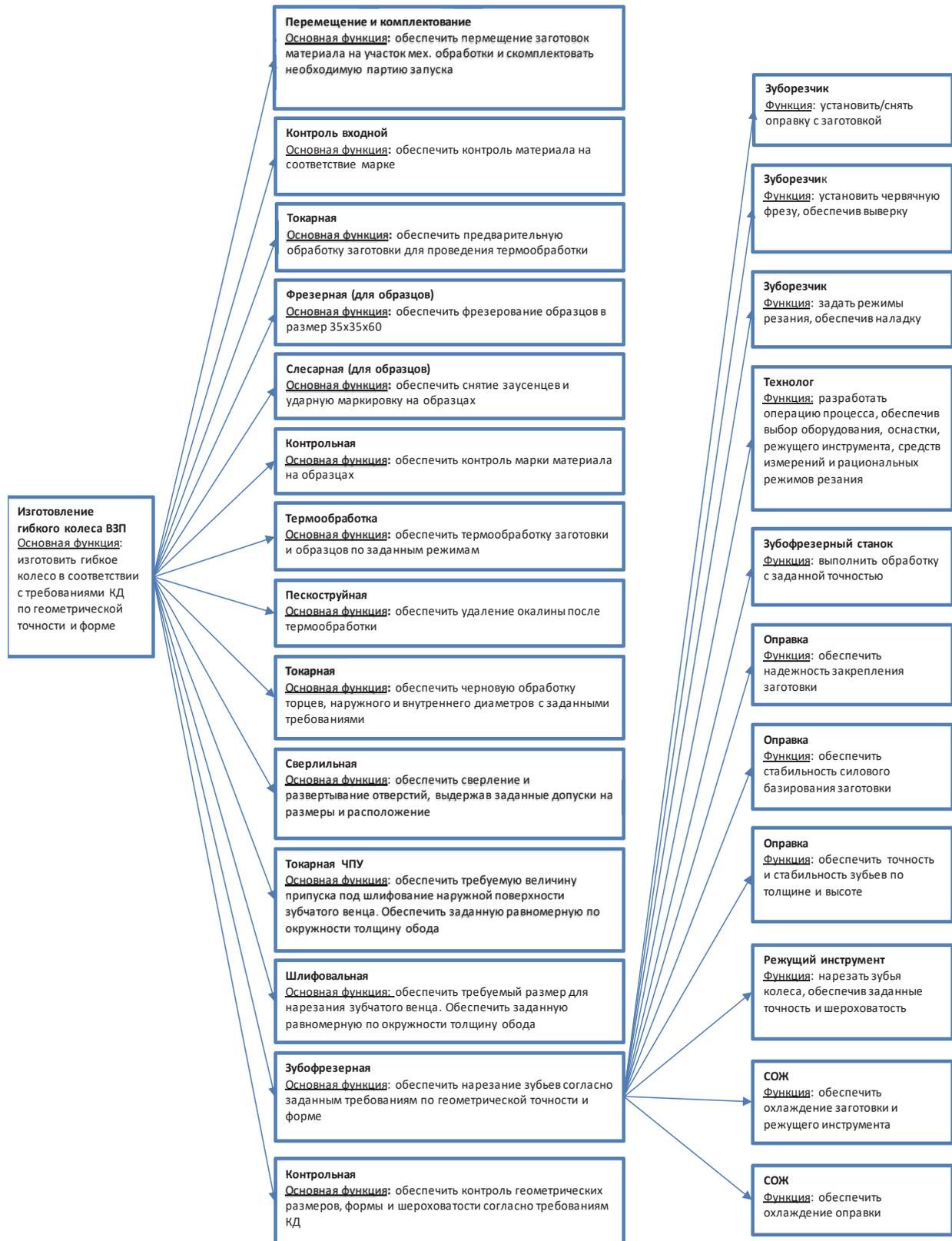


Рис. 3. Дерево функционального анализа для операции «Нарезание зубьев гибкого колеса»

а также находить решения, предотвращающие возникновение этих сбоев [5, 6, 7].

Данный метод впервые начал применяться в аэрокосмической отрасли еще в 60-х годах XX века. FMEA – один из наиболее популярных методов анализа видов и последствий отказов, согласно требованиям стандарта IATF 16949: 2016

он является одним из обязательных для промышленных компаний. В июне 2019 года AIAG & VDA выпустили первое международное руководство по анализу неисправностей и последствий отказов (FMEA). Целью нового руководства является создание общей основы для FMEA для всех секторов [8].

Проведение анализов рисков и последствий процесса механической обработки проводилось по новому подходу, в который входят: планирование и подготовка; структурный анализ (рисунок 2); функциональный анализ (рисунок 3); анализ отказов (рисунок 4); анализ рисков; оптимизация и документация результатов. Ис-

пользуемый в руководстве подход делает риски процесса механической обработки более прогнозируемыми.

Проведена оценка отказов и установлен приоритет действий для устранения рисков возникновения отказов (H(high), M(medium), L(low)). Установленные приоритеты действий позволи-

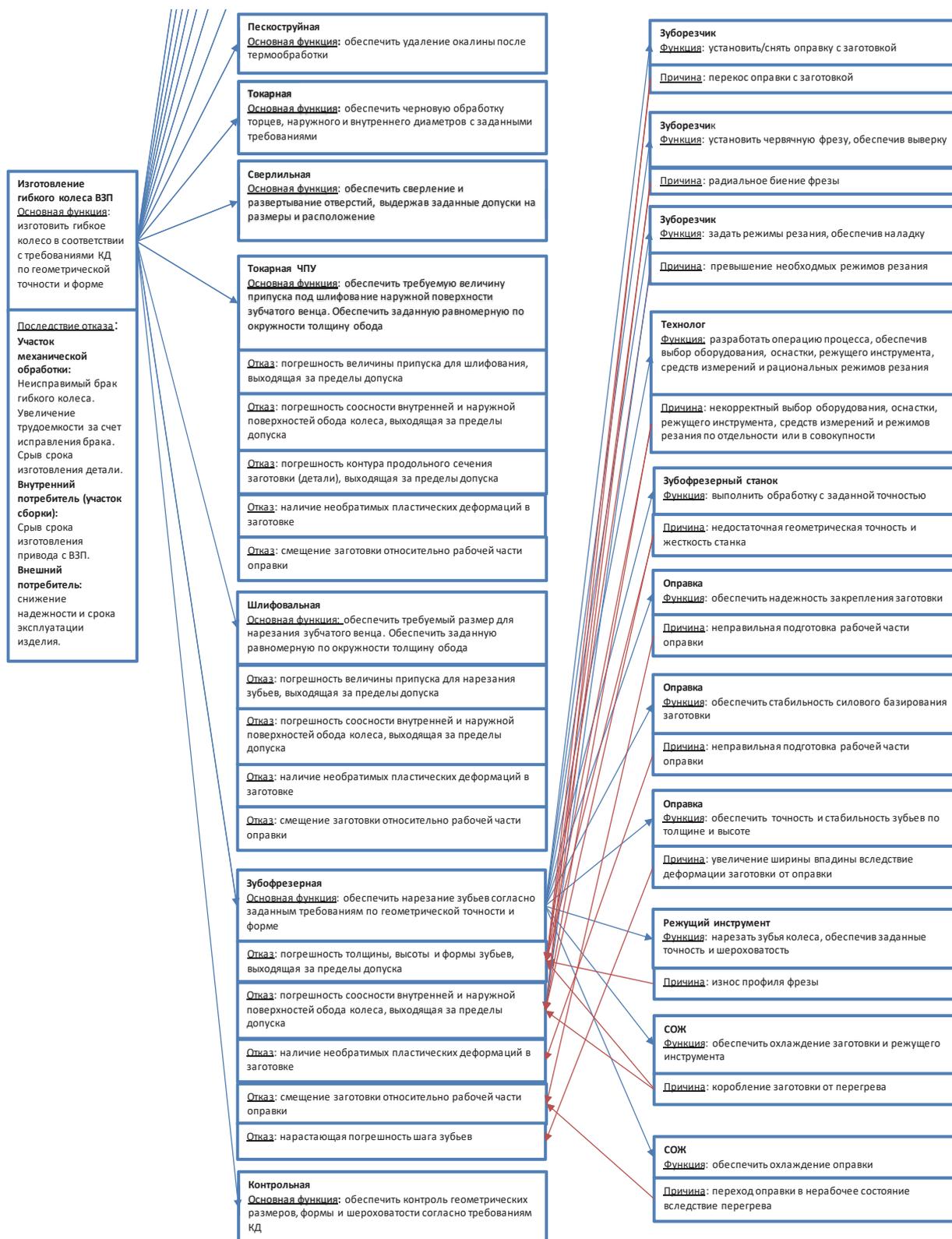


Рис. 4. Дерево отказов для операции «Нарезание зубьев гибкого колеса»

ли разработать мероприятия, направленные на предупреждение причин возникновения отказов в процессе механической обработки гибких колес. Полученные результаты занесены в бланк

СТРУКТУРНЫЙ АНАЛИЗ (ЭТАП 2)			ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ (ЭТАП 3)		
1. Процесс создания системы, подсистемы, компонента или наименование процесса	2. Операция процесса, номер участка и имя рассматриваемого элемента (4М)	3. Элемент функционирования процесса	1. Функция процесса. Функция системы, подсистемы, компонента или процесса	2. Функция операции, процесса и характеристики продукции (количественные значения при необходимости)	3. Функция элемента процесса и параметры процесса
Изготовление гибкого колеса ВЗП	Нарезание зубьев	Зуборезчик	Изготовить гибкое колесо в соответствии с требованиями КД по геометрической точности и форме	Обеспечить нарезание зубьев согласно заданным требованиям по геометрической точности и форме.	Зуборезчик: установить/снять оправку с заготовкой
					Зуборезчик: установить червячную фрезу, обеспечив выверку
					Зуборезчик: задать режимы резания, обеспечив наладку
		Технолог			Технолог: разработать операцию процесса, обеспечив выбор оборудования, оснастки, режущего инструмента, средств измерений и рациональных режимов резания
		Зубофрезерный станок			Зубофрезерный станок: выполнить обработку с заданной точностью
		Оправка для силового базирования			Оправка: обеспечить надежность закрепления заготовки
					Оправка: обеспечить стабильность силового базирования заготовки
					Оправка: обеспечить точность и стабильность зубьев по толщине и высоте
		Режущий инструмент			Режущий инструмент: нарезать зубья колеса, обеспечив заданные точность и шероховатость
		СОЖ			СОЖ: обеспечить охлаждение заготовки и режущего инструмента
	СОЖ: обеспечить охлаждение оправки				

Рис. 5. Фрагмент бланка «Этап 2» и «Этап 3» для операции «Нарезание зубьев гибкого колеса»

АНАЛИЗ ОТКАЗОВ (ЭТАП 4)				АНАЛИЗ РИСКА (ЭТАП 5)					ОПТИМИЗАЦИЯ (ЭТАП 6)				
1. Последствия отказов для следующего верхнего уровня или конечного потребителя	Значимость (S)	2. Отказ операции процесса	3. Причины отказа в элементах функционирования процесса	Текущие меры по предупреждению (причины)	Возникновение (O)	Текущие меры по обнаружению (причины или отказа)	Обнаружение (D)	PFMEA AP	Специальная характеристика	Действия по предупреждению	Действия по обнаружению		
Участок механической обработки: Неисправимый брак гибкого колеса. Увеличение трудоемкости за счет исправления брака. Срыв срока изготовления детали. Внутренний потребитель (участок сборки): Срыв срока изготовления привода с ВЗП. Внешний потребитель: снижение надежности и срока эксплуатации изделия.	8	Погрешность толщины, высоты и формы зубьев, выходящая за пределы допуска	Зуборезчик: перекос оправки с заготовкой	Математическое моделирование	2	Инструментальный контроль индикатором часового типа	2	L					
			Зуборезчик: радиальное биение фрезы	Математическое моделирование	2	Инструментальный контроль индикатором часового типа	2	L					
			Зуборезчик: превышение необходимых режимов резания	Дополнительное образование	2	Аттестация	2	L					
			Технолог: некорректный выбор оборудования, оснастки, режущего инструмента, средств измерений и режимов резания по отдельности или в совокупности	Дополнительное образование	2	Аттестация	2	L					
			Зубофрезерный станок: недостаточная геометрическая точность и жесткость станка	Проверка на технологическую точность	2	Паспортизация	2	L					
			Режущий инструмент: износ профиля фрезы	Своевременная замена	2	Учет времени наработки	2	L					
			Участок механической обработки: Неисправимый брак гибкого колеса. Увеличение трудоемкости за счет исправления брака. Срыв срока изготовления детали. Внутренний потребитель (участок сборки): Срыв срока изготовления привода с ВЗП. Внешний потребитель: снижение надежности и срока эксплуатации изделия.	8	Погрешность соосности внутренней и наружной поверхностей обода колеса, выходящая за пределы допуска	Зуборезчик: перекос оправки с заготовкой	Математическое моделирование	2	Инструментальный контроль индикатором часового типа	2	L		
Зуборезчик: радиальное биение фрезы	Математическое моделирование	2				Инструментальный контроль индикатором часового типа	2	L					
Зуборезчик: превышение необходимых режимов резания	Дополнительное образование	2				Аттестация	2	L					
Технолог: некорректный выбор оборудования, оснастки, режущего инструмента, средств измерений и режимов резания по отдельности или в совокупности	Дополнительное образование	2				Аттестация	2	L					
Зубофрезерный станок: недостаточная геометрическая точность и жесткость станка	Проверка на технологическую точность	2				Паспортизация	2	L					
Участок механической обработки: Неисправимый брак гибкого колеса. Увеличение трудоемкости за счет исправления брака. Срыв срока изготовления детали. Внутренний потребитель (участок сборки): Срыв срока изготовления привода с ВЗП. Внешний потребитель: снижение надежности и срока эксплуатации изделия.	8	Коробление заготовки от перегрева	СОЖ: изменение охлаждающих свойств	Своевременная замена	2	Контроль марки и рецептуры приготовления	2	L					
Участок механической обработки: Неисправимый брак гибкого колеса. Увеличение трудоемкости за счет исправления брака. Срыв срока изготовления детали. Внутренний потребитель (участок сборки): Срыв срока изготовления привода с ВЗП. Внешний потребитель: снижение надежности и срока эксплуатации изделия.	8	Наличие необратимых пластических деформаций в заготовке	Оправка: неправильная подготовка рабочей части оправки		7		7	M	Моделирование функционирования рабочей части оправки с заготовкой				
			Смещение заготовки относительно рабочей части оправки	Оправка: неправильная подготовка рабочей части оправки		7		7	M	Моделирование функционирования рабочей части оправки с заготовкой			
			СОЖ: переход оправки в нерабочее состояние вследствие перегрева		7		7	M	Контроль температуры оправки	Инфракрасный пирометр "Кельвин"			
Участок механической обработки: Неисправимый брак гибкого колеса. Увеличение трудоемкости за счет исправления брака. Срыв срока изготовления детали. Внутренний потребитель (участок сборки): Срыв срока изготовления привода с ВЗП. Внешний потребитель: снижение надежности и срока эксплуатации изделия.	8	Нарастающая погрешность шага зубьев	Оправка: увеличение ширины впадины вследствие деформации заготовки от оправки		7	Инструментальный контроль скобой по роликам	7	M	Моделирование влияния натяга заготовки и оправки на неравномерность шага зубьев	Контроль геометрии стационарным 3D сканером			

Рис. 6. Фрагмент бланка «Этап 4», «Этап 5» и «Этап 6» для операции «Нарезание зубьев гибкого колеса»

протокола PFMEA-анализа (фрагменты бланка протокола PFMEA-анализа для операции «Нарезание зубьев гибкого колеса» представлены на рисунках 5 и 6).

Анализируя полученные значимости последствий отказов, возникающих в процессе механической обработки гибких колес, можно сделать вывод, что наиболее значимыми являются отказы операции «Нарезание зубьев» по причине элемента функционирования «Оправка». Данные отказы могут привести к умеренно-высоким последствиям. Для самого участка, осуществляющего нарезание зубьев – это 100% гибких колес. Данный брак является частично устранимым: более половины деталей бракуются окончательно и запускается новая партия. Это приводит к значительным затратам и дополнительной трудоемкости. Последствием отказов для внутреннего потребителя (участок сборки ВЗП) будет частичная забраковка изделия, которая приведет к дополнительным затратам на замену забракованных деталей и увеличению времени производственного цикла. Для внешнего потребителя последствием данных отказов являются снижение надежности и срока эксплуатации изделия.

Следующим этапом проведена оптимизация полученных данных. Определены действия для улучшения мер предупреждения и обнаружения причин возникновения отказов, возникающих в ходе закрепления заготовки гибкого колеса и ее последующей механической обработки.

В результате проведенного исследования сделан вывод, что для снижения возникновения рисков, связанных с базированием и закреплением, рекомендовано разработать методику по периодическому измерению параметров функционирования рабочей части оправки с целью подтверждения адекватной работы силового элемента из материала с ЭПФ.

Риски, связанные с низкой квалификаци-

ей персонала, рекомендовано снизить путем создания рабочих инструкций для различных операций процесса, а также дополнительного контроля со стороны службы качества и представителя приемки.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Иванов, М.Н.* Волновые зубчатые передачи: Учеб. пособие для студентов вузов / М.Н. Иванов. – М.: Высш. школа, 1981. – 184 с.
2. *Гинзбург, Е.Г.* Волновые зубчатые передачи / Е.Г. Гинзбург. – М.: Машиностроение, 1969. – 160 с.
3. *Богданович, В.И.* Применение материалов с эффектом памяти формы в производстве летательных аппаратов / В.И. Богданович, Н.П. Родин, О.В. Ломовской – Самара: СГАУ, 2007. – 64 с.
4. *Назаров, Д.В.* Совершенствование процесса шлифования тонкостенных деталей / Д.В. Назаров, О.В. Ломовской. – Итоги диссертационных исследований. Том 3. – Материалы VII Всероссийского конкурса молодых учёных, посвящённого 70-летию Победы. – М.: РАН, 2015. – Стр. 21-26
5. *Дмитриев, А.Я.* Робастное проектирование и технологическая подготовка производства изделий авиационной техники / А.Я. Дмитриев, Ю.А. Ващуков, Т.А. Митрошкина. – Самара: СГАУ, 2016. – 76 с.
6. *Митрошкина, Т.А.* Современные инновационные методы структурирования качества продукции и управления рисками / Т.А. Митрошкина, А.Я. Дмитриев, Н.И. Лаптев, Г.Г. Богатеев // Вестник Казанского технологического университета. – 2014. – Т.17. – № 8. – С. 330-332.
7. *Dmitriev A., Mitroshkina T.* Improving the Efficiency of Aviation Products Design Based on International Standards and Robust Approaches. IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, 2019, vol. 476, pp. 012009.
8. *AIAG & VDA FMEA Handbook-2019 FMEA Handbook: Failure Mode and Effects Analysis (Reference Manual).*

## ASSESSMENT OF RISKS AND POTENTIAL FAILURES IN THE DESIGN OF THE MANUFACTURING PROCESS OF FLEXIBLE WAVE GEAR WHEELS BASED ON THE PFMEA METHODOLOGY

© 2023 D. V. Nazarov, D. V. Antipov, O. V. Lomovskoy

Samara National Research University named after Academician S.P. Korolyov

The article presents a model for assessing the risks of potential failures of the machining process of flexible wheels of wave gears (WG). The constructed model is based on the methodology for analyzing the types and consequences of potential process inconsistencies (PFMEA). Structural, functional analysis and analysis of failures arising in the process of turning, grinding and cutting the teeth of a flexible wheel are carried out. As a result of the analysis, a risk assessment was carried out and a list of measures aimed at improving the quality of the machining process of flexible wheels of the WG was established. *Keywords:* model, risk, failure, process, power basing, sleeve made of material with shape memory effect.

DOI: 10.37313/1990-5378-2023-25-3-26-34

EDN: JVAYEM

## REFERENCES

1. *Ivanov, M.N.* Volnovye zubchatye peredachi: Ucheb. posobie dlya studentov vuzov / M.N. Ivanov. – M.: Vyssh. shkola, 1981. – 184 s.
2. *Ginzburg, E.G.* Volnovye zubchatye peredachi / E.G. Ginzburg. – M.: Mashinostroyeniye, 1969. – 160 s.
3. *Bogdanovich, V.I.* Primeneniye materialov s efektom pamyati formy v proizvodstve letatel'nykh apparatov / V.I. Bogdanovich, N.P. Rodin, O.V. Lomovskoy – Samara: SGAU, 2007. – 64 s.
4. *Nazarov, D.V.* Sovershenstvovaniye processa shlifovaniya tonkostennykh detalej / D.V. Nazarov, O.V. Lomovskoy. – Itogi dissertatsionnykh issledovaniy. Tom 3. – Materialy VII Vserossiyskogo konkursa molodykh uchyonykh, posvyashchyonno 70-letiyu Pobedy. – M.: RAN, 2015. – Str. 21-26
5. *Dmitriev, A.YA.* Robastnoye proektirovaniye i tekhnologicheskaya podgotovka proizvodstva izdeliy aviacionnoy tekhniki / A.YA. Dmitriev, YU.A. Vashukov, T.A. Mitroshkina. – Samara: SGAU, 2016. – 76 s.
6. *Mitroshkina, T.A.* Sovremennyye innovatsionnyye metody strukturirovaniya kachestva produktsii i upravleniya riskami / T.A. Mitroshkina, A.YA. Dmitriev, N.I. Laptev, G.G. Bogateev // Vestnik Kazanskogo tekhnologicheskogo universiteta. – 2014. – T.17. – № 8. – S. 330-332.
7. *Dmitriev A., Mitroshkina T.* Improving the Efficiency of Aviation Products Design Based on International Standards and Robust Approaches. IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, 2019, vol. 476, pp. 012009.
8. AIAG & VDA FMEA Handbook-2019 FMEA Handbook: Failure Mode and Effects Analysis (Reference Manual).

---

*Denis Nazarov, Senior Lecturer of the Department of Aircraft Production and Quality Management in Mechanical Engineering. E-mail: dennynaz@yandex.ru*

*Dmitry Antipov, Doctor of Technical Sciences, Associate Professor, Head of the Department of Aircraft Production and Quality Management in Mechanical Engineering. E-mail: antipov.dv@ssau.ru*

*Oleg Lomovskoy, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Aircraft Production and Quality Management in Mechanical Engineering. E-mail: oleg.lomovskoi@yandex.ru*

**РАЗРАБОТКА И ПРИМЕНЕНИЕ ИМИТАЦИОННОЙ МОДЕЛИ  
ЦЕХА КОМПАУНДИРОВАНИЯ АВТОМОБИЛЬНЫХ БЕНЗИНОВ**© 2023 Е.С. Головина<sup>1</sup>, И.Н. Хаймович<sup>2</sup><sup>1</sup> АО «Самаранефтехимпроект», г. Самара, Россия<sup>2</sup> Самарский национальный исследовательский университет им. академика С.П. Королева,  
г. Самара, Россия

Статья поступила в редакцию 19.05.2023

Компаундирование товарных топлив является важной завершающей стадией всей технологической цепочки производства нефтеперерабатывающего завода, определяющей итоговую экономическую эффективность всего производства. В данной работе рассматривается имитационная модель процесса компаундирования товарных бензинов, основанная на дискретном линейном программировании. Для оптимизационной модели в качестве целевой функции рассматривается отношение разности стоимости товарной продукции и понесенных затрат на компоненты и электроэнергию, нормированное на итоговый объем товарной продукции и время её приготовления. На основании оптимизационной модели делается вывод о целесообразности применения поточной схемы смешения, а также о необходимости выбора насосного оборудования, применяемого в схеме, в соответствии с рецептурой смешения. Оптимизационная модель может применяться для первичных расчетов экономической эффективности вариантов организации процесса компаундирования товарных бензинов.

*Ключевые слова:* имитационная модель, оптимизационная модель, компаундирование бензинов.

DOI: 10.37313/1990-5378-2023-25-3-35-42

EDN: KDDFQM

**1. ВВЕДЕНИЕ**

Процесс компаундирования товарных топлив, в том числе, автомобильных бензинов, является важной завершающей стадией всей технологической цепочки производства нефтеперерабатывающего завода (НПЗ). В процессе компаундирования происходит смешение различных компонентов, произведенных на технологических установках НПЗ или закупленных дополнительно. Компоненты компаундирования имеют различные качественные характеристики, такие как: октановое число, плотность, давление насыщенных паров, содержание ароматических углеводородов и прочее, а также имеют определенную себестоимость. Компаундирование товарных моторных топлив определяет итоговую экономическую эффективность всего производства [1, 2].

Различают два основных метода компаундирования – циркуляционный метод, который ранее получил широкое распространение (приготовление производится в смесительных резервуарах с применением аппаратов с перемешивающими устройствами) и метод поточного смешения (приготовление производится в не-

прерывном режиме в смесителе с последующим накоплением готовой продукции в резервуаре), который в настоящее время вытесняет циркуляционный метод. При поточном методе имеется возможность постоянного контроля характеристик товарных продуктов с помощью поточных анализаторов качества, а также возможность корректировки рецептуры компаундирования в процессе приготовления. Ряд исследований посвящен преимуществам применения метода поточного смешения и разработке методов и алгоритмов повышения маржинальности производства за счет увеличения точности процесса компаундирования [1-5]. Математические модели для описания процесса компаундирования товарных бензинов формулируются как задачи смешанного целочисленного линейного программирования [6, 7], однако с учетом того, что при смешении компонентов качественными характеристикам присуще нелинейное поведение, для повышения точности моделей применяется и смешанное целое нелинейное программирование, а также комбинации методов [8, 9].

Рассматриваемые в указанных выше статьях методики направлены на повышение точности планирования процесса компаундирования, в то время как имитационная модель, рассматриваемая в данной работе, дает возможность количественно оценить преимущества внедрения системы смешения в потоке для нефтеперерабатывающего предприятия. Дополнительно, оп-

*Головина Евгения Сергеевна, аспирант.*

*E-mail: GolovinaES@snhp.rosneft.ru*

*Хаймович Ирина Николаевна, доктор технических наук, профессор кафедры обработки металлов давлением. E-mail: kovalek68@mail.ru*

тимизационная модель, представленная далее, дает возможность осуществить подбор насосного оборудования, применяемого на предприятии, для повышения эффективности производства.

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Задача исследования – оптимизация процессов при компаундировании товарных бензинов с увеличением прибыли предприятия за счет оптимизационных и технологических мероприятий. Задача может быть решена с помощью имитационного моделирования путем сравнения вариантов технологических процессов. Целью построения имитационной модели цеха компаундирования автомобильных бензинов является исследование влияния выбора технологического процесса, подбор параметров насосного оборудования, а также максимизация условной прибыли предприятия.

Основные задачи моделирования:

- определить параметры оптимального выбора между циркуляционным методом смешения и методом поточного смешения товарных бензинов;
- определить оптимальный выбор производительности насосного оборудования;
- максимизировать условную доходность предприятия.

## 3. КОНЦЕПТУАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА КОМПАУНДИРОВАНИЯ БЕНЗИНОВ

Цех компаундирования условно можно представить как совокупность следующих основных зон: парк базовых компонентов, заводская лаборатория, зона аппаратуры смешения, парк товарной продукции, зона размещения персонала.

Основу процесса компаундирования товарных бензинов составляет технологический процесс – комплекс последовательно выполняемых операций. Эффективность технологического процесса дает итоговую эффективность всего процесса. В работе рассматриваются две принципиальные схемы технологического процесса, описанные выше: схема №1 – стандартная схема с циркуляционным смешением (рис. 1), и схема №2 – с применением поточного смешения и поточных анализаторов качества продукции (рис. 2). Особенностью схемы №2 является возможность ежеминутной корректировки рецептуры смешения непосредственно в процессе компаундирования.

Для целей описания имитационной модели цеха компаундирования принято допущение, что в цехе происходит компаундирование из 4-х базовых компонентов: алкилат, катализат, изомеризат, метил-трет-бутиловый эфир (МТБЭ).

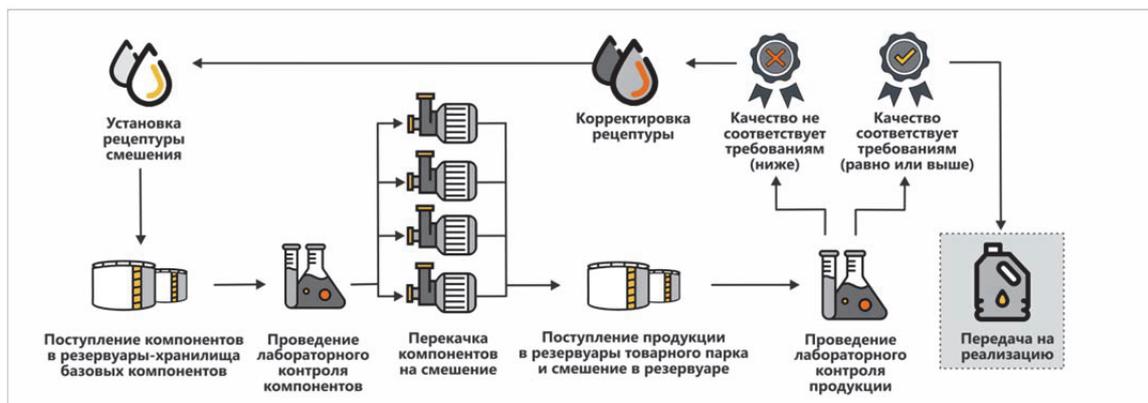


Рис. 1. Технологический процесс компаундирования по схеме №1

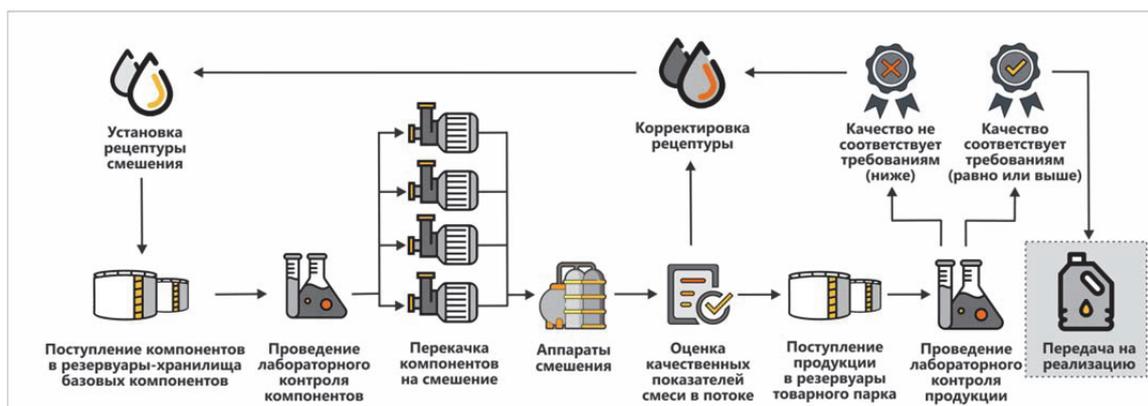


Рис. 2. Технологический процесс компаундирования по схеме №2

В общем случае для процесса может быть применено иное количество базовых компонентов.

Концептуальная модель процесса компаундирования автомобильных бензинов для обоих вариантов технологических схем представлена на рис. 3, где приняты следующие обозначения:

- в случаях, когда нумерация технологического процесса состоит из двух нижних индексов, принимается, что первый индекс – это номер операции, второй – номер компонента (1 – алкилат, 2 – катализат, 3 – изомеризат, 4 – МТБЭ). В случае, когда индекс состоит из одной цифры, операция производится вне зависимости от компонентов;

- $S_{11}, S_{12}, S_{13}$  – технологическая операция по наливу в парк резервуаров базовых компонентов с технологических установок нефтеперерабатывающего завода. Чаще всего МТБЭ закупается отдельно, поэтому для этого компонента в конкретной рассматриваемой модели данная операция не производится, что является допущением модели;

- $V_{11}, V_{12}, V_{13}, V_{14}$  – резервуары хранения базовых компонентов;

- $S_{21}, S_{22}, S_{23}$  – технологическая операция по взятию проб для передачи в заводскую лабораторию;

- $Q_1$  – проведение анализов в заводской лаборатории;

- $S_3$  – технологическая операция по подбору/корректировке рецептуры смешения;

- $S_{41}, S_{42}, S_{43}, S_{44}$  – технологическая операция по запуску насосов по перекачке базовых компонентов в смеситель;

- $S_5$  – технологическая операция смешения;

- $X_1, X_2$  – операции по сопоставлению показателей с эталонными величинами (красная ветка – отрицательный результат (показатели качества не соответствуют эталонным, хуже них), зеленая ветка – положительный результат

(показатели качества соответствуют эталонным, равны или лучше них));

- $S_5$  – технологическая операция по проверке качества смеси в потоке;

- $V$  – резервуар хранения товарной продукции;

- $S_7$  – технологическая операция по перемешиванию смеси в резервуаре товарной продукции;

- $S_8$  – технологическая операция по взятию проб из резервуаров товарной продукции;

- $Q_2$  – проведение анализов смеси в заводской лаборатории;

- $S_9$  – технологическая операция по паспортизации продукции и отгрузке.

Различия между двумя рассматриваемыми реализациями технологической цепочки следующие:

- в случае применения технологической схемы №1 (циркуляционное смешение):

- возврат цепочки на этап  $S_3$  производится однократно с дополнением в смесь дорогостоящего базового компонента (объем дополнения приведен в допущениях модели);

- этап  $S_7$  включает в себя время и энергозатраты на работу перемешивающего устройства, находящегося внутри резервуара с товарной продукцией;

- этапы  $S_5, S_6, X_1$  отсутствуют;

- в случае применения технологической схемы №2 (смешение в потоке):

- возврат цепочки с этапа  $X_2$  не производится;

- этапы  $S_5, S_6, X_1$  включены в процесс.

#### 4. ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ И ДОПУЩЕНИЯ В ИМИТАЦИОННОЙ МОДЕЛИ

Как было упомянуто ранее, для описания алгоритма работы имитационной модели процесса компаундирования товарных бензинов приняты следующие допущения. Число базовых компонентов примем равным 4.

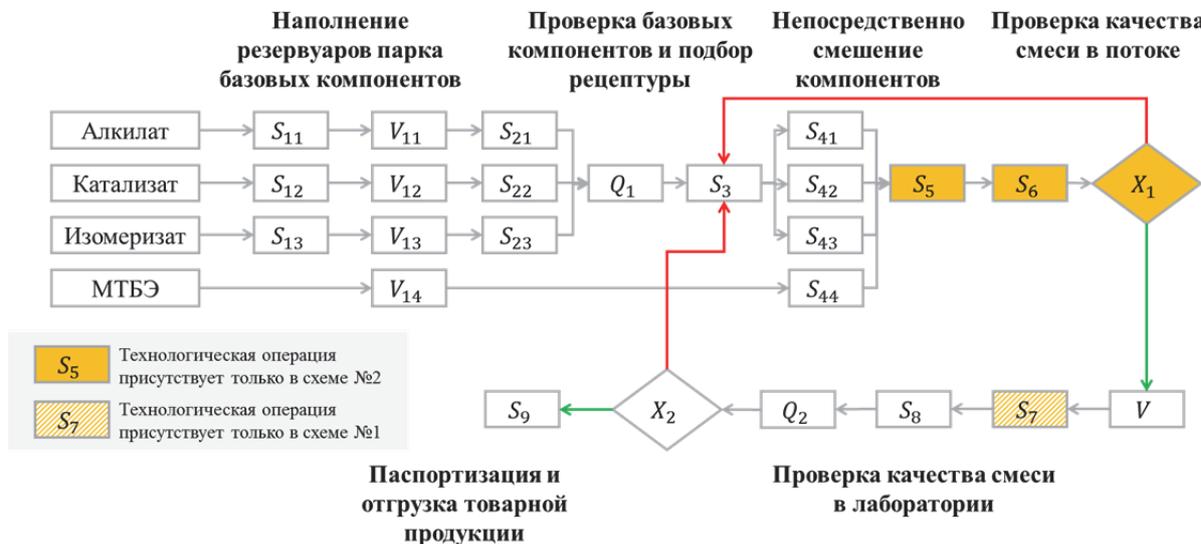


Рис. 3. Алгоритм работы имитационной модели процесса компаундирования товарных бензинов

Итоговые затраты рассматриваются по завершённой единичной технологической цепочке – начиная от налива резервуаров с базовыми компонентами и завершая паспортизацией товарной продукции в резервуаре бензина. В общем случае на производстве процесс компаундирования может происходить при одновременном наливе нескольких резервуаров товарной продукции. Объёмы готовой продукции сопоставим с суммарным объёмом базовых компонентов.

Для имитации несовершенства технологической схемы №1 принято, что по результатам компаундирования требуется добавление от 2,5% до 4% от объёма резервуара товарной продукции одного из компонентов, в данном случае – изомеризата. Конкретный процент добавления из указанного диапазона выбирается случайным образом.

Для имитации корректировки рецептуры при реализации технологической схемы №2 (с применением поточного метода) принято, что на каждом шаге объём базовых компонентов, поступающих в смеситель, меняется в пределах

от 97% до 103%, при этом суммарный объём более дорогостоящих продуктов (в данном случае – изомеризата и МТБЭ) уменьшается на 1,5%-3%, а более дешёвых компонентов (в данном случае – алкилата и катализата) – увеличивается на 1,5%-6%. Проценты из указанных диапазонов выбираются случайным образом на каждый расчет модели.

При реализации технологической схемы №2 мощность насосов на налив в резервуар готовой продукции увеличена на 10% для имитации работы поточного смесителя. Пересчет мощности насоса при уменьшении подачи не производится.

### 5. ОПИСАНИЕ РЕАЛИЗАЦИИ И ПРИМЕР РАБОТЫ ИМИТАЦИОННОЙ МОДЕЛИ

Имитационная модель реализована при помощи языка программирования VBA, встроенного в MS Excel [10]. Модель реализована как пошаговый расчет процесса с накоплением необходимых данных (накопленные объёмы жидкости в резервуарах, накопленные затраты на электроэнергию для снабжения каждо-



Рис. 4. Основная форма программного продукта реализации имитационной модели работы цеха компаундирования бензина

го вида электромеханического оборудования) относительно временной шкалы. Шаг модели принят дискретным и равным 1 минуте. Накопление данных на этапе налива резервуаров компонентного парка осуществляется однократно, после чего идет два параллельных расчета работы при реализации различных технологических цепочек – с применением поточных анализаторов качества и смешением в потоке и без него. Результатом расчетов является сопоставление суммарного времени на выполнение всей цепочки и итоговый доход от реализации готовой продукции в единицу времени. Внешний вид программного продукта, в котором реализована описанная концепция, представлен на рис. 4.

В качестве целевой функции оптимизационной модели рассматривается условный доход предприятия  $S$  - отношение разности стоимости товарной продукции и понесенных затрат на компоненты и электроэнергию, нормированное на итоговый объем товарной продукции и время её приготовления, рассчитываемый по формуле:

$$S = \frac{\sum W \cdot Z - \sum W_j \cdot F_j - E}{W * t}$$

где:  $t$  – итоговое время приготовления топлива начиная от стадии налива в резервуары базовых компонентов и завершая выдачей паспорта продукции на резервуар товарного бензина, мин;

$W$  – объем подготовленного к реализации товарного бензина за время  $t$ , м<sup>3</sup>,

$Z$  – стоимость товарного бензина в период производства, руб/м<sup>3</sup>;

$W_j$  – объем  $j$ -го компонента смешения, использованного при производстве объема продукции  $W$ , м<sup>3</sup>,

$F_j$  – стоимость  $j$ -го компонента смешения в период производства, руб/м<sup>3</sup>;

$E$  – затраты на оплату электроэнергии за период приготовления топлива, руб.

Оптимизация заключается в последовательном выполнении имитационной модели с определенными исходными данными для последующего нахождения оптимальных для задачи значений целевой функции.

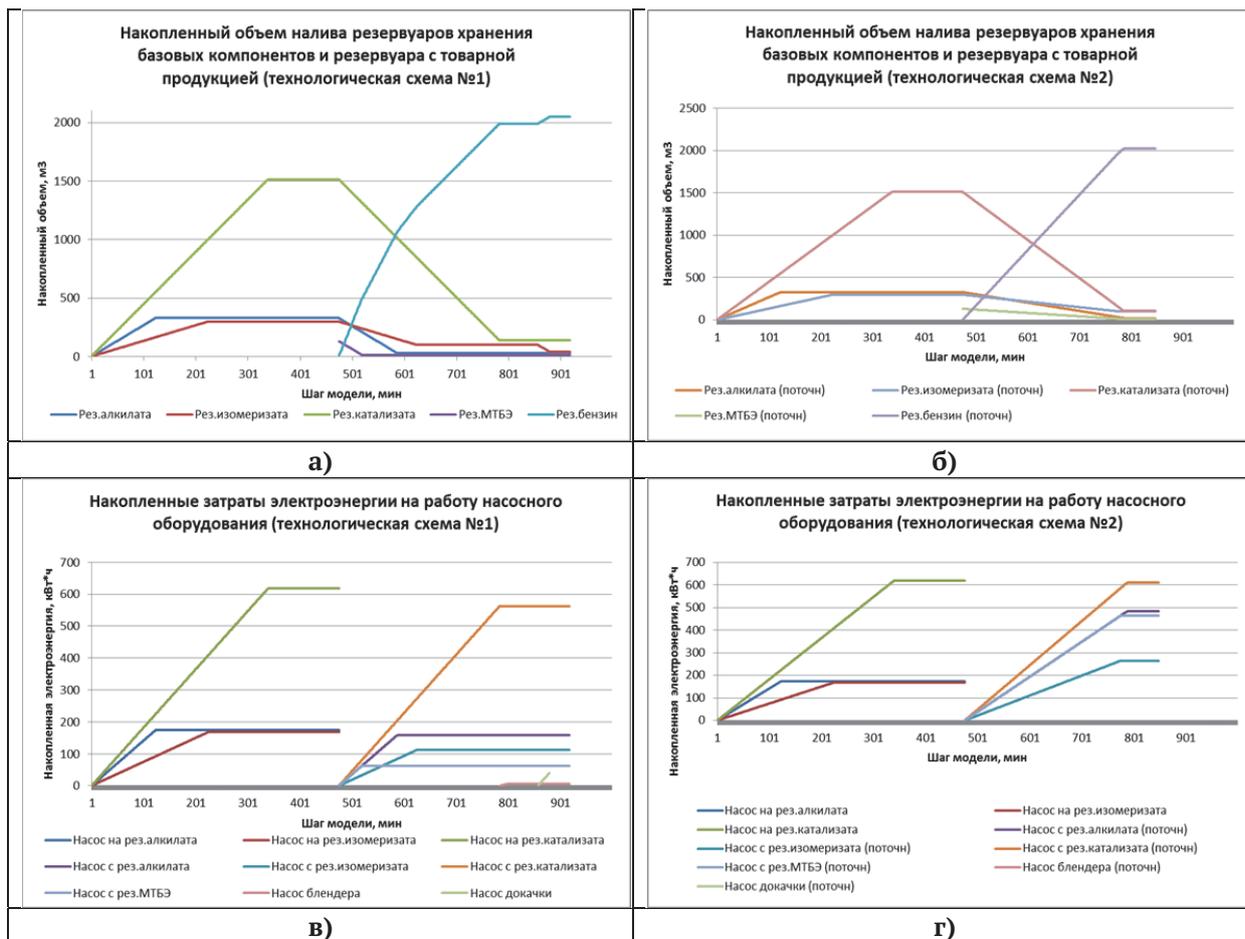


Рис. 5. Пример результатов имитационного моделирования для компаундирования бензина марки АИ-95-К5:

а) и б) – графики накопленных объемов налива резервуаров хранения базовых компонентов и резервуара хранения товарной продукции для технологических схем №1 и №2 соответственно;

в) и г) – накопленные затраты электроэнергии на работу насосного оборудования для технологических схем №1 и №2 соответственно

На основании разработанной имитационной модели проведено исследование по возможности оптимизации работы цеха компаундирования товарных бензинов с учетом заданных начальных условий. Поскольку в работе имитационной модели применяются случайные величины, для каждого набора насосного оборудования производился пятикратный пересчет имитационной модели с последующим осреднением результатов. Результаты выполнения вычислений были внесены в таблицу результатов.

Пример результата работы имитационной модели приведен на рис. 5, где а) и б) – графики накопленных объемов налива резервуаров хранения базовых компонентов и резервуара хранения товарной продукции для технологических схем №1 и №2 соответственно; в) и г) – накопленные затраты электроэнергии на работу насосного оборудования для технологических схем №1 и №2 соответственно.

### 6. РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ ОПТИМИЗАЦИОННОЙ МОДЕЛИ И ОБСУЖДЕНИЕ

Расчет имитационной модели проводился для всех возможных наборов выбора насосного оборудования из модельного ряда для применения при наливе в резервуар товарной продукции с резервуаров хранения базовых компонентов, что в принятых допущениях составляет число перестановок с повторениями для 4 позиций из 3 вариантов, то есть 81 вариант. С учетом необходимости нивелирования выбора случайных величин и пятикратного пересчета модели, число расчетов составило 405, результаты расчетов итоговой условной прибыли предприятия при одинаковых наборах оборудования усреднились.

Анализ результатов моделирования показал, что основной вклад в изменение результатов условной прибыли при указанных в модели допущениях дает выбор насоса для подачи с резервуара катализата, поскольку объем данного компонента в смеси при принятой рецептуре компаундирования – максимальный. Наиболее предпочтительным вариантом является реализация технологической схемы №2 (поточное смешение). На рис. 6 представлено процентное отношение условной прибыли предприятия при реализации технологической схемы №2 к условной прибыли предприятия при реализации технологической схемы №1.

Второе по важности влияние на оптимизационную функцию оказывает выбор подачи насоса с резервуара алкилата, влияние выбора остальных насосов минимальное, ввиду малых вовлекаемых объемов компонентов. На рис. 7 представлено, что имеется корреляция между изменением подачи насоса с резервуара алкилата для всех вариантов выбора насоса с резервуара катализата, при изменении моделей остальных насосов корреляция между результатами отсутствует.

Сопоставление результатов расчета показывает, что наибольшая условная прибыль предприятия в заданных условиях достигается при применении технологической схемы №2 с применением насосного оборудования с максимально возможной подачей для резервуара катализата, что соответствует современным трендам. Таким образом, разработанная оптимизационная модель может быть применена для первичных расчетов в части экономической эффективности и для определения конфигурации насосного оборудования при внедрении технологической схемы поточного компаундирования на нефтеперерабатывающих предприятиях.

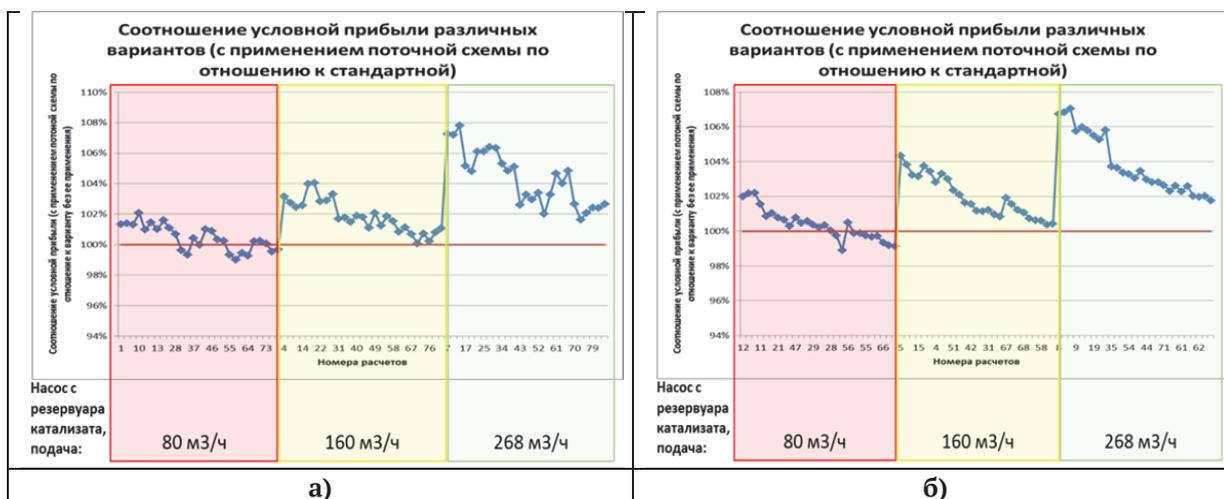


Рис. 6. Соотношение условной прибыли предприятия, расчет оптимизационной модели для получения товарного бензина марки:  
а) АИ-92-К5, б) АИ-95-К5

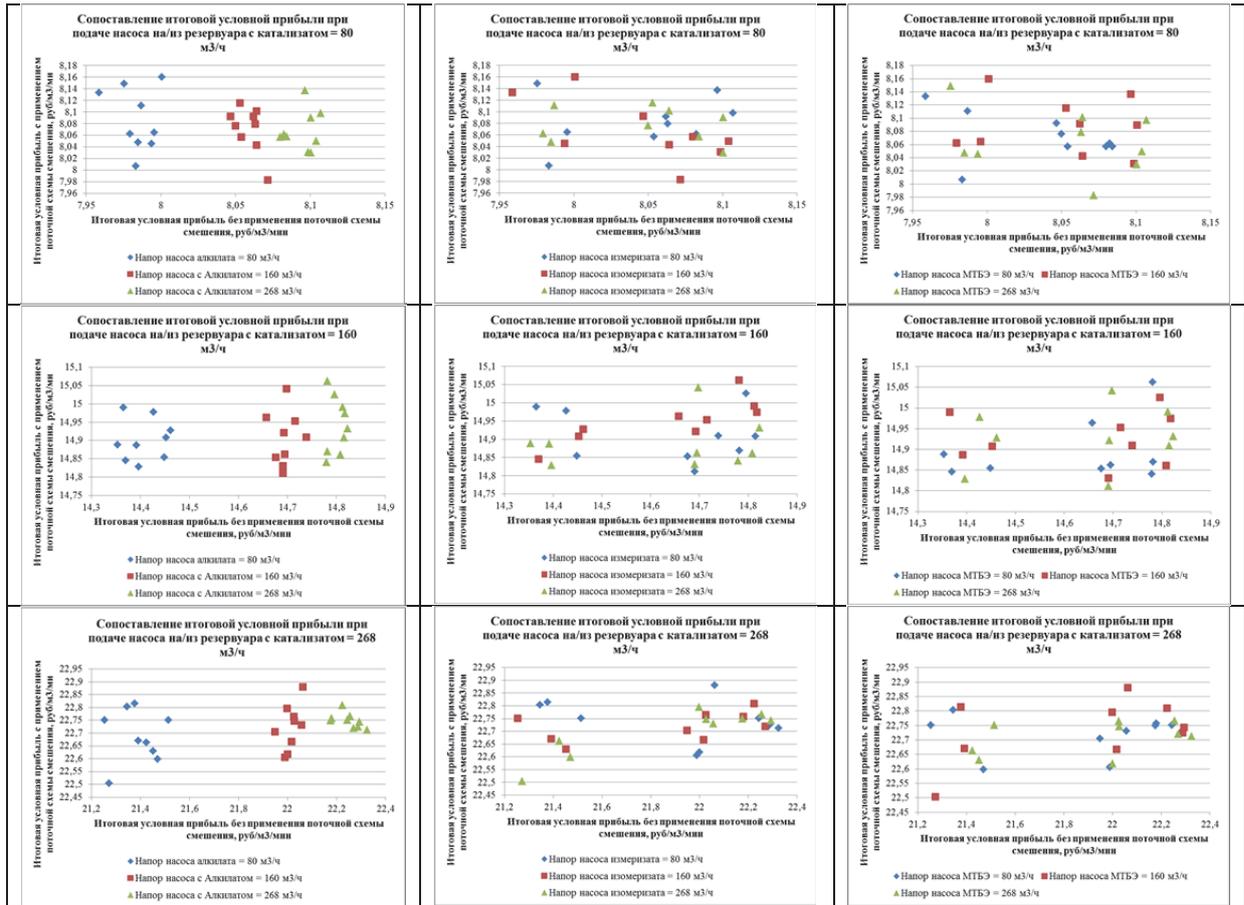


Рис. 7. Сопоставление итоговой условной прибыли при различных вариантах выбора насосного оборудования для процесса компаундирования товарного бензина марки АИ-95-К5

**ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

Процесс компаундирования товарных бензинов является важной завершающей стадией всей технологической цепочки производства нефтеперерабатывающего завода. Выбор технологической схемы, а также подбор насосного оборудования для реализации схемы, напрямую влияет на экономическую эффективность работы цеха компаундирования. Для целей проведения сопоставления возможных вариантов процесса компаундирования была разработана имитационная и оптимизационная модели, позволяющие при определенных допущениях в короткие сроки провести экономическую оценку эффективности вариантов. Имитационная модель выполнена средствами линейного программирования VBA, встроенного в MS Excel, оптимизационная модель реализована путем последовательного запуска имитационной модели в автоматизированном режиме с условием перебора исходных данных с накоплением значений по функции оптимизации.

Оптимизационная модель может применяться для первичных расчетов экономической эффективности вариантов организации процесса компаундирования товарных бензинов.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Singh A. et al. Model-based real-time optimization of automotive gasoline blending operations //Journal of process control. – 2000. – Т. 10. – №. 1. – С. 43-58.
2. DeWitt C. W. et al. OMEGA: An improved gasoline blending system for Texaco //Interfaces. – 1989. – Т. 19. – №. 1. – С. 85-101.
3. Wang W. et al. On-line optimization model design of gasoline blending system under parametric uncertainty //2007 Mediterranean Conference on Control & Automation. – IEEE, 2007. – С. 1-5.
4. Wang W. et al. On-line optimization model design of gasoline blending system under parametric uncertainty //2007 Mediterranean Conference on Control & Automation. – IEEE, 2007. – С. 1-5.
5. Anosov A.A., Efitov G.L., Zusman S.D. On-line gasoline blending optimization with in-flow blend quality analysis //Automation and Remote Control. – 2017. – Т. 78. – №. 3. – С. 515-524.
6. Mendez C.A. et al. A simultaneous optimization approach for off-line blending and scheduling of oil-refinery operations //Computers & chemical engineering. – 2006. – Т. 30. – №. 4. – С. 614-634.
7. Jia Z., Ierapetritou M. Efficient short-term scheduling of refinery operations based on a continuous time formulation //Computers & chemical engineering. –

2004. – Т. 28. – №. 6-7. – С. 1001-1019.
8. Li J., Xiao X., Floudas C. A. Integrated gasoline blending and order delivery operations: Part I. short-term scheduling and global optimization for single and multi-period operations //AIChE Journal. – 2016. – Т. 62. – №. 6. – С. 2043-2070.
9. Castillo P.A.C., Castro P.M., Mahalec V. Global optimization of nonlinear blend-scheduling problems //Engineering. – 2017. – Т. 3. – №. 2. – С. 188-201.
10. Головина Е.С. / Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2022680985 от 09.11.2022. Имитационная модель цеха компаундирования бензина.

## DEVELOPMENT AND APPLICATION OF A SIMULATION MODEL FOR A COMPOUNDING PROCESS FOR MOTOR GASOLINES

© 2023 E.S. Golovina <sup>1</sup>, I.N. Khaimovich <sup>2</sup>

<sup>1</sup> АО «Samaraneftechimproject», Samara, Russia

<sup>2</sup> Samara National Research University named after Academician S.P. Korolyov, Samara, Russia

Compounding commercial fuels is an important final stage of the entire production process chain in an oil refinery which defines the economic effectiveness of the company's manufacturing activities. This paper addresses a simulation model for the compounding process for commercial gasolines. The Model is based on discrete linear programming. The target function for the optimization model is the ratio of the difference between the value of the salable product and the costs incurred by manufacturing components and electrical power to the final volume of the salable product, as well as the time it takes to prepare. The optimization model leads to the conclusion about the practicability of the in-flow blending, as well as of the necessity of selecting the right pumping equipment. The optimization model can be applied to primary calculations of economic effectiveness of the various options of organizing the process for the compounding of commercial gasolines.

*Keywords:* simulation model, optimization model, gasolines compounding.

DOI: 10.37313/1990-5378-2023-25-3-35-42

EDN: KDDFQM

## REFERENCES

10. Golovina E.S. / Svidetel'stvo o gosudarstvennoj registracii programmy dlya EVM № 2022680985 ot 09.11.2022. Imitacionnaya model' cekha kompaundirovaniya benzina.

---

*Evgeniia Golovina, Graduate Student.*

*E-mail: GolovinaES@snhp.rosneft.ru*

*Irina Khaimovich, Doctor of Technics, Professor at the Department of Metal Forming. E-mail: kovalek68@mail.ru*

УДК 621.7.04

## ВИЗУАЛИЗАЦИЯ СТАТИКО-ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА УПЛОТНЕНИЯ ПОРОШКОВОЙ КОМПОЗИЦИИ В МЕТАЛЛИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ

© 2023 В.А. Глушечков<sup>1,2</sup>, Р. де Алваренга<sup>2</sup>, И.А. Беляева<sup>1,2</sup><sup>1</sup> Самарский федеральный исследовательский центр Российской академии наук, г. Самара, Россия<sup>2</sup> Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, г. Самара, Россия

Статья поступила в редакцию 17.05.2023

В работе рассмотрена гибридная технология уплотнения порошковой композиции (ПК) в металлической оболочке: волочение и магнитно-импульсный обжим. Разработана методика компьютерного моделирования такого статико-динамического процесса. На основе результатов моделирования разработана визуализационная картина процесса деформирования трубы и находящейся в ней ПК. Полученная визуализационная картина процесса позволила описать поэтапно механизм уплотнения и его зависимость от степени деформации трубы при волочении и от величины энергии магнитно-импульсного обжима. Определена достигаемая при этом плотность упаковки, характеризующая качество уплотнения. Результаты работы используются при проектировании новой технологии.

*Ключевые слова:* порошковая композиция, уплотнение, гибридная технология, волочение, магнитно-импульсный обжим, статико-динамическое деформирование, плотность упаковки.

DOI: 10.37313/1990-5378-2023-25-3-43-49

EDN: KDFRLB

### ПОСТАНОВКА ВОПРОСА

Одной из операций, используемой при изготовлении деталей из порошковой композиции, является операция ее уплотнения [1-4]. В настоящее время уплотнение ПК в большинстве случаев осуществляется в штампах с использованием статического нагружения (рис. 1). Имеются также публикации, отражающие результаты поисковых научных работ по уплотнению ПК, где использовались динамические нагрузки [5-8], в том числе в металлической оболочке (рис. 2).

Таким образом, существующие технологии уплотнения ПК осуществляются под действием только одной нагрузки: либо статической, либо динамической. Такие технологии уплотнения имеют некоторые недостатки и ограничения:

- недостаточная плотность упаковки, что снижает механические свойства материала, из которого изготавливаются детали;
- неравномерность упаковки ПК по объему получаемой заготовки или детали;
- ограничение размеров изготавливаемых

*Глушечков Владимир Александрович, кандидат технических наук, профессор кафедры обработки металлов давлением, заведующий лабораторией «Биоинженерия». E-mail: vgl@ssau.ru*

*Роберто де Алваренга, инженер кафедры обработки металлов давлением. E-mail: de\_alvarenga.r@ssau.ru*

*Беляева Ирина Александровна, кандидат технических наук, доцент кафедры обработки металлов давлением, ведущий научный сотрудник лаборатории «Биоинженерия». E-mail: belyaeva-otmr@yandex.ru*

деталей из уплотненного порошкового материала, например, длинномерных изделий.

Идет постоянный поиск новых методов уплотнения, направленных на устранение тех или иных недостатков. Так, для уплотнения ПК предложена технология волочения трубы, наполненной порошком [9], что решает, например, задачу получения длинномерных металлопорошковых изделий. Однако для реализации и этой технологии также используется только один вид нагружения – статический. Кроме того, при этом не обеспечивается требуемое качество уплотнения: плотность и однородность. Поиск новых технических решений продолжается.

Предлагаемое техническое решение. Предложено новое техническое решение – гибридная технология уплотнения ПК в металлической оболочке, в которой сочетаются два процесса: протяжка оболочки с ПК через матрицу (волоку) и ее магнитно-импульсный обжим (рис. 3). Реализуются [10-11] одновременно статическое и динамическое нагружения. В таком гибридном процессе на напряженно-деформированное состояние (н.д.с.) материала трубы и порошка, реализуемое при протяжке (волочении), накладывается н.д.с., возникающее при магнитно-импульсном обжиге. Без понимания процессов, происходящих в оболочке с ПК при таком сложном нагружении, невозможно управлять процессом. Понимание механизма уплотнения ПК при гибридном нагружении может дать компьютерное моделирование такого процесса.

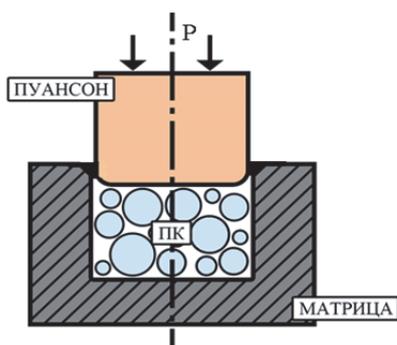


Рис. 1. Технологическая схема уплотнения ПК в инструментальном штампе с использованием статического нагружения P

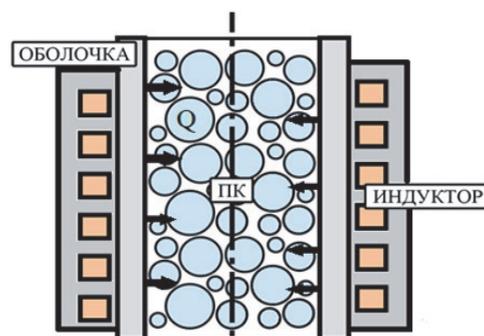


Рис. 2. Технологическая схема уплотнения ПК в металлической оболочке с использованием магнитно-импульсного нагружения Q

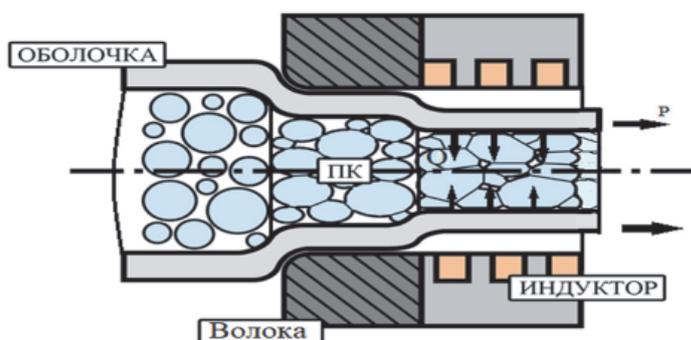


Рис. 3. Технологическая схема гибридной технологии уплотнения ПК в металлической оболочке с использованием с статической и динамической нагрузок

### ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ВЫПОЛНЕНИЯ ГИБРИДНОЙ ТЕХНОЛОГИИ УПЛОТНЕНИЯ ПК

Для компьютерного моделирования гибридной технологии уплотнения ПК в металлической оболочке ее можно представить в последовательном выполнении следующих операций (рис. 4):

а) в металлическую оболочку диаметром D0 с установленной заранее нижней заглушкой

свободно засыпают ПК. Частицы порошка разных размеров распределяются в оболочке хаотично одна над другой с большим количеством пор между ними;

б) через вторую (верхнюю) заглушку на порошок действуют статической нагрузкой, осуществляя его предварительную подпрессовку. Частицы порошка, перемещаясь, деформируются в этом случае, в основном, упруго. Но за счет их перемещения количество пор между ними сокращается. При этом прикладываемое

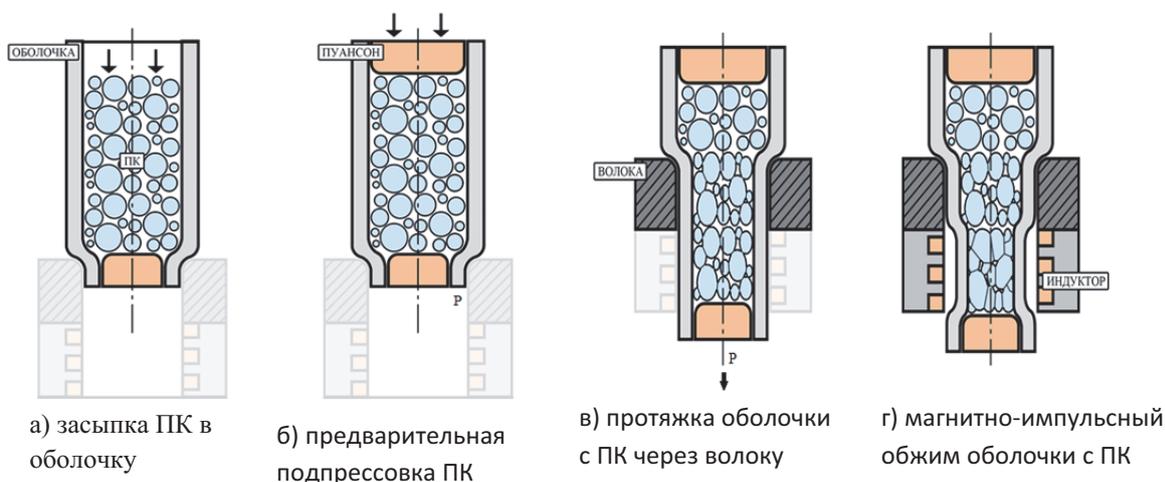


Рис. 4. Последовательность выполнения гибридного технологического процесса уплотнения ПК в металлической оболочке

давление подпрессовки ограничено возможной деформацией самой оболочки;

в) полученную сборку (оболочка с подпересованным порошком и закрепленными с обеих сторон заглушками) протягивают через матрицу (волоку) с диаметром  $D_m$  меньшим диаметра оболочки (трубы), что вызывает пластическую деформацию самой трубы и соответственно пластическую деформацию частиц порошка при их взаимодействии друг с другом. Пластическая деформация частиц осуществляется в направлении наименьшего сопротивления, т.е. в направлении пор, что и приводит к количественному их уменьшению;

г) на выходе из матрицы редуцированная оболочка без разгрузки подвергается радиальному динамическому нагружению – магнитно-импульсному обжигу [12]. Оболочка с ПК дополнительно пластически деформируется до диаметра  $D_k$ , повышая плотность упаковки.

Первые две операции а) и б) являются подготовительными и полученные при этом значения плотности упаковки принимаются за начальные. Две другие операции в) и г) являются окончательными. На этих этапах происходит уменьшение диаметра оболочки с  $D_0$  до  $D_m$  и далее до  $D_k$ . Именно на этих конечных этапах и происходит интенсивное изменение плотности порошка. Постоянная протяжка и высокая скважность разрядов магнитно импульсной установки [13] обеспечивают необходимую длину изделия.

#### МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ГИБРИДНОЙ ТЕХНОЛОГИИ УПЛОТНЕНИЯ ПК В МЕТАЛЛИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ

Компьютерное моделирование исследуемого гибридного процесса уплотнения ПК в металлической оболочке проводилось методом конечных элементов с использованием программного продукта LS-DYNA [14] и возможностью соединения процессов IMPLICIT и EXPLICIT. При этом решались следующие задачи :

- создание геометрии взаимодействующих тел;
- взаимная увязка и выполнение расчетов во времени для различных этапов деформирования;
- оптимизация расчетов;
- проверка осуществимости предложенной методики моделирования, получение и анализ визуализационных картин процессов уплотнения ПК на всех его этапах;
- моделирование процесса уплотнения ПК при различных энерго - силовых параметрах нагружения, получение в первом приближении количественной оценки изменения плотности.

Для решения первой задачи, создания геометрии взаимодействующих тел написан

SCRIPT, позволивший автоматически создавать необходимую геометрию. При этом появилась возможность построения геометрии частиц порошка разных размеров. Каждая частица сконфигурирована так, чтобы реагировать на контакт с другими частицами и с поверхностями оболочки и заглушек. Выполнение этих настроек вручную заняло бы слишком много времени.

В процессе моделирования рассматривалась трехмерная задача деформирования оболочки. Взаимодействие частиц порошка при этом изучалось только в плоскости XZ (рис. 5).

Для имитации наличия частиц порошка по всему объему оболочки искусственно созданы вертикальные, радиально расположенные по окружности плоскости с эквивалентным «порошковой» плоскости сопротивлением при деформировании оболочки. Эти искусственные плоскости создают сопротивление почти такое же, как и порошковая плоскость. Таким образом, сочеталось 2Д и 3Д моделирование со стратегией компенсации. Для сокращения времени расчета в плоскости XZ размещали 60 частиц порошка (зерен) с увеличенными по сравнению с реальными их размерами: от 1,6 до 2,6 мм.

Все этапы рассматриваемой гибридной технологии уплотнения ПК реализуются за разные промежутки времени: от десятков секунд при

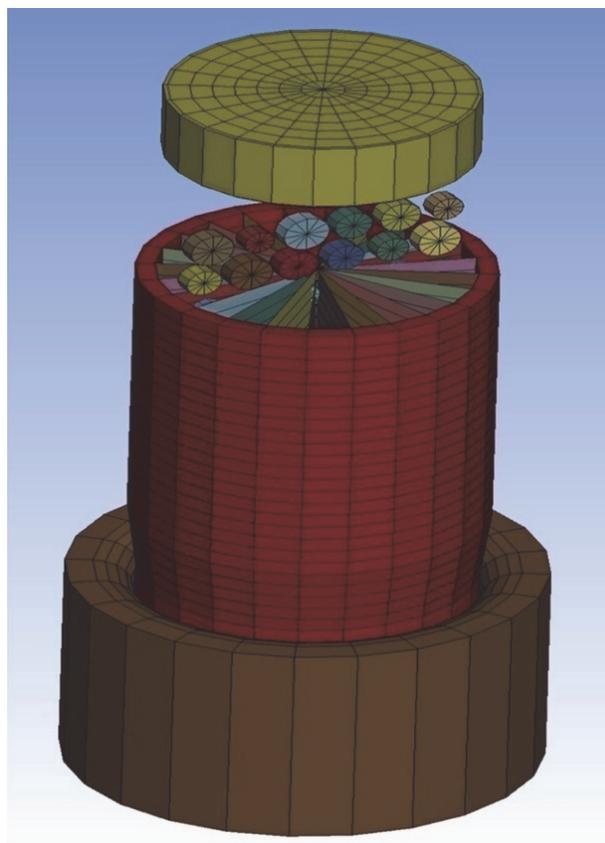


Рис. 5. Плоскость XZ-плоскость наличие частиц порошка, дополнительные плоскости сопротивления

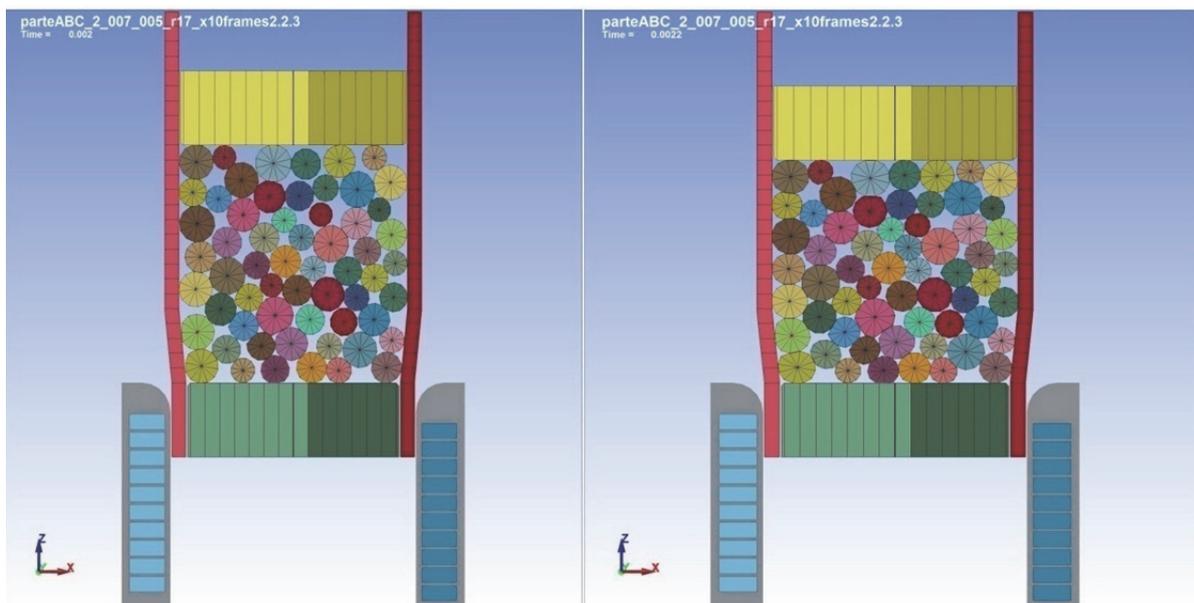
протяжке (волочении) до микросекунд при магнитно импульсном обжиге. Чтобы смоделировать разновременные этапы сквозного процесса деформирования использовалось моделирование, при котором на каждом этапе применялись свои параметры шкал времени, то есть все этапы были объединены для выполнения единого сквозного расчета, но на каждом этапе использовались свои параметры шкал времени.

Кроме того, моделирование процесса организовано не в одном основном К-файле, а

распределенным образом в нескольких дополнительных К-файлах, загружаемых из основного. Такое решение оптимизирует и облегчает управление и манипулирование расчетами.

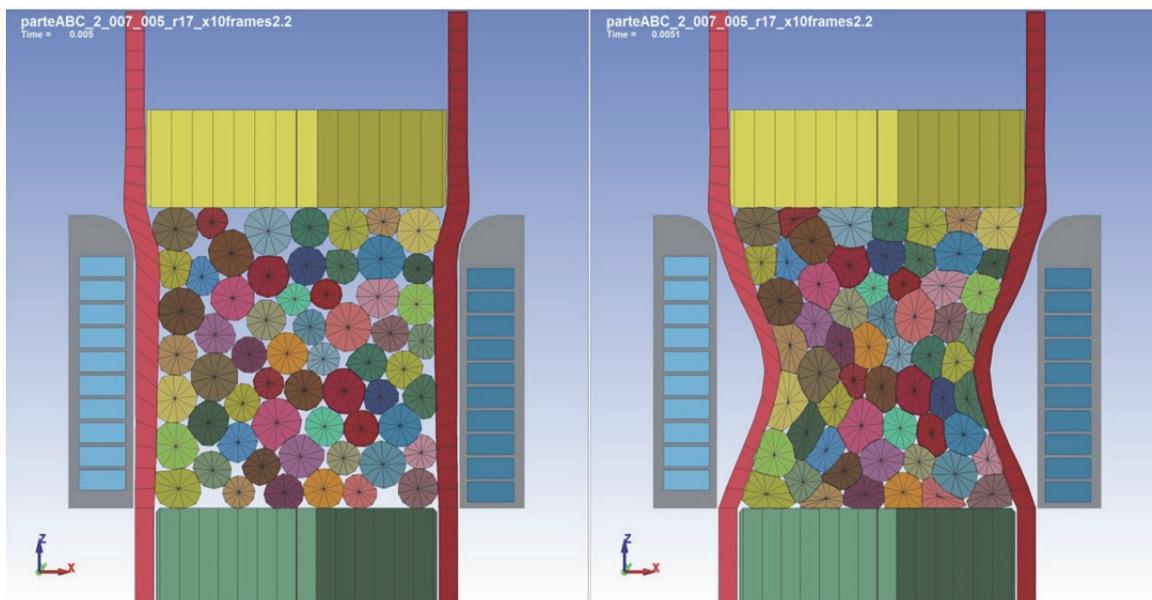
При моделировании четвертого этапа уплотнения ПК - магнитно импульсный обжим - в качестве параметра магнитно импульсного нагружения использовался ток  $I$  в разрядной цепи.

Применялся, кроме того, целый ряд внутренних особенностей методики моделирования таких, например, как применение сеточных



а) Засыпка ПК в оболочку

б) Статическая подпрессовка



в) Волочение оболочки с ПК

г) Магнитно-импульсный обжим

**Рис. 6.** Визуализационные картины уплотнения ПК на разных этапах гибридной технологии уплотнения

элементов SOLID и SHELL к различным элементам оснастки, или частицам порошка, что обеспечивает лучший анализ деформаций и сокращает время расчета, и другие.

**РЕЗУЛЬТАТЫ КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ. ПОЭТАПНАЯ ВИЗУАЛИЗАЦИЯ СТАТИКО-ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА УПЛОТНЕНИЯ ПК В МЕТАЛЛИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ**

Разработанная методика компьютерного моделирования позволила получить картины процессов, происходящих с оболочкой и порошком на всех этапах деформирования, описать взаимосвязанное взаимодействие оболочки и частиц порошка, наблюдать процессы деформирования частиц порошка по всему объему. На рисунке 6 представлены такие характерные выборочные картины: от свободной засыпки до магнитно-импульсного обжима. Как видно, при свободной засыпке количество пор максимально.

После предварительной подпрессовки количество пор уменьшается за счет перемещения частиц порошка относительно друг друга, а не их пластической деформации. С трудом можно найти частицу, изменившую свою форму. При протяжке трубы с порошком через матрицу уже видна пластическая деформация трубы и большинства частиц порошка. Соответственно происходит значительное уменьшение количества пор. Кроме того, можно видеть неравномерность уплотнения порошка по объему: наибольшая плотность упаковки наблюдается по периферии (вдоль участка трубы, деформируемой в результате ее взаимодействия с матрицей). В центральной части вдоль оси заготовки частицы порошка деформируются незначительно, поры остаются.

При магнитно импульсном обжиме трубы с порошком после протяжки видна интенсивная деформация практически всех частиц порошка, на всю глубину. С трудом можно найти

несколько единичных пор. Причиной глубокой проработки (деформирования) частиц порошка может быть возрастающее силовое энергетическое воздействия по мере распространения волн напряжения к центру.

Анализ полученных картин помогает лучше понять процессы, сопровождающие уплотнение порошка при статико-динамическом нагружении. Причем такие картинки можно представить в виде видео ряда, т.е. наблюдать процесс уплотнения непрерывно во времени на всех временных участках как единое целое.

Конечной целью компьютерного моделирования является оценка в первом приближении плотности упаковки ПК в зависимости от энерго-силовых параметров гибридного процесса уплотнения. За плотность упаковки принята площадь пор, то есть разница площадей плоскости сечения XZ и площади, занимаемой шестьюдесятью частицами порошка. Плотность упаковки на этапе свободной засыпки принята за 100% и ее изменение фиксировалось на дальнейших этапах. На рис 7 показано изменение плотности упаковки на всех этапах технологического процесса при использовании матрицы Дм 17 мм.

На рис. 8 можно видеть одну из полученных картин уплотнения ПК при различной степени редуцирования оболочки ( $D_m/D_o=17/18; 16/18$  и  $15/18$ ).

При минимальной степени редуцирования частицы порошка начинают деформироваться по границе их взаимодействия с деформируемой оболочкой. В центральной области частицы порошка только вступают во взаимодействие, видно наличие достаточно большого количества пор. При увеличении степени редуцирования оболочки количество деформированных частиц возрастает как по периферии, так и к центру. Количество пор наглядно уменьшается, но остается еще их значительное количество. При редуцировании оболочки через матрицу диаметром 15 мм практически все частицы порошка деформи-

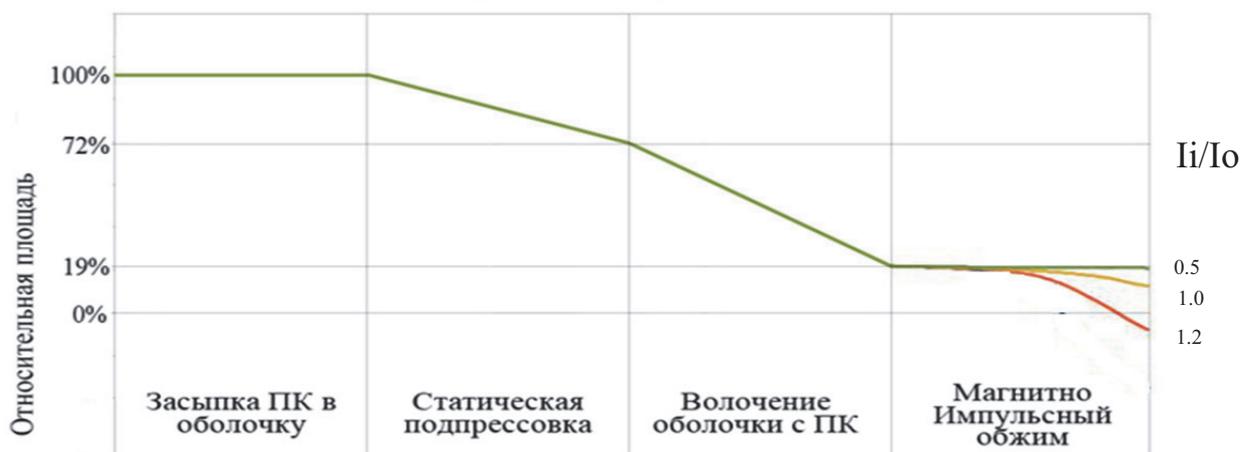
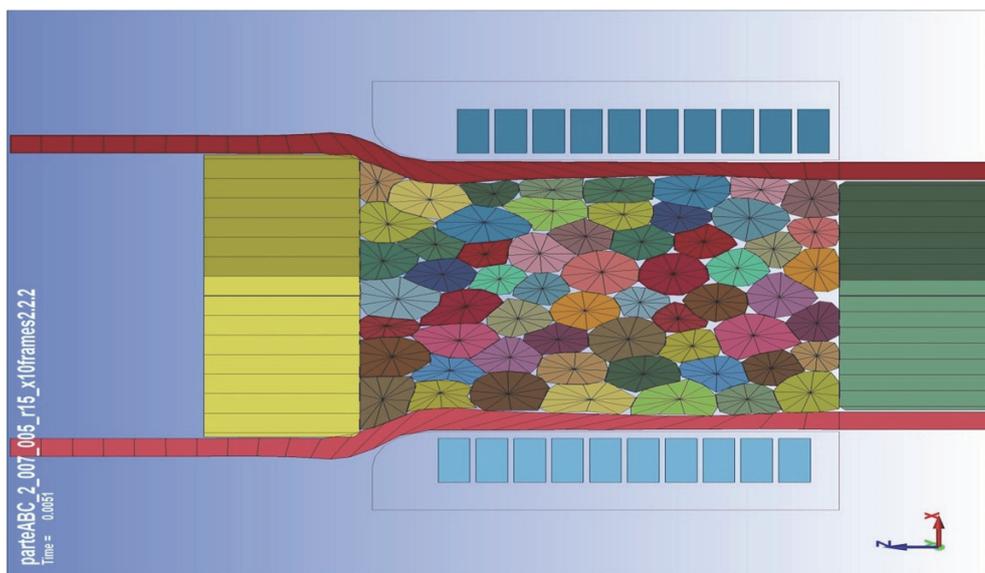


Рис. 7. Изменение площади пор на разных этапах процесса уплотнения



**Рис. 8.** Визуализационная картина деформирования оболочки с ПК при протягивании ее через матрицу Дм 17мм

рованы, изменили свою форму, снизилось и количество пор между ними. В рассматриваемом диапазоне степеней редуцирования оболочки относительная плотность упаковки изменилась с 19,26% при Дм=17 мм до 14,64% при Дм=15 мм).

Для различного уровня энергии магнитно импульсного обжима оболочки ( $I_i/I_0$  0,5;1,0;1,2) после протяжки ее через матрицу получены визуализационные картины, отражающие возможность получения беспористой структуры ПК (рис. 6; 7) по всему объему. Компьютерное моделирование даже показывает виртуальную отрицательную плотность упаковки, когда частицы порошка внедряются друг в друга.

Проведенное компьютерное моделирование показало широкие возможности гибридной технологии уплотнения. Стало возможным, варьируя геометрическими размерами оболочки, матрицы, параметрами нагружения, их сочетанием, проследить за изменением плотности упаковки, оценить вклад каждого этапа в процесс уплотнения и сформулировать рекомендации по ее проектированию.

## ВЫВОДЫ

1. Предложена новая гибридная технология уплотнения порошковой композиции в металлической оболочке, включающая действие двух видов нагружения: статического и динамического. Дана схема и описание такого процесса – волочение и магнитно импульсный обжим.

2. Разработана методика компьютерного моделирования статико-динамического процесса уплотнения, проведено его моделирование, раскрывающее качественную картину процесса, включая деформацию самой оболочки и частиц порошка, находящихся в ней.

3. Получены визуализационные картины всех этапов гибридного процесса, позволившие понять механизм, последовательность и качество уплотнения.

4. Проведена оценка влияния некоторых геометрических и энерго силовых параметров на плотность упаковки порошковой композиции. Показана возможность достижения плотности порошковой композиции практически без пор (плотность упаковки 0,90 – 0,95).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гиршов, В.А.* Современные технологии в порошковой металлургии: учеб. пособие / В. А. Гиршов, С. А. Котов, В. Н. Цеменко. – СПб: Изд-во политехн. ун-та, 2010. – 385 с.
2. *Анциферов, В.Н.* Перспективные материалы и технологии порошковой металлургии: учеб. Пособие / В. Н. Анциферов. – Пермь: Изд-во Перм. нац. иссл. политехн. ун-та, 2014. – 109 с.
3. *Цеменко, В.Н.* Деформирование порошковых сред: монография / В.Н. Цеменко. – СПб: Изд-во СПбГТУ, 2001 – 102 с.
4. *Волкогон, Г.М.* Прогрессивные детали из порошков и оборудование: монография Е.М. Волкон, А.М Дмитриев, Е.П. Добряков, под общ. ред. А.М. Дмитриева, А.Г. Овчинникова. – М.: Машиностроение, 1991. – 320с.
5. *Polyakov, A.P.* Dinamic power compaction processer. [www.orcid/000-0003-0109-6916](http://www.orcid.org/000-0003-0109-6916)
6. *Горбцов В.Г.* Разработка и внедрение процессов импульсного нагружения для получения порошковых и композиционных материалов: автореферат дис. на поиск. учён. степ. д.т.н. / В.Г. Горбцов – Минск, 1986.
7. *Нестеренко, В.Ф.* Импульсное нагружение гетерогенных материалов: монография / В.Ф. Нестеренко. – Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ние РАН, 1992. – 200 с.
8. *Григорьев Е.Г., Калич Б.А.* Электроимпульсная технология формирования материалов из порошков: Учебное пособие / Е.Г. Григорьев, Б.А. Калич. – М.: МИФИ, 2008. – 152 с.
9. *Миронов, В.А.* Магнитно-импульсное прессование порошков / В.А. Миронов. – Рига: Зинатне, 1980. – 192 с.
10. *Прокофьев, А.Б.* Магнитно-импульсная обработка

- материалов (МИОМ): монография / А.Б. Прокофьев [и др.] – Самара: АНО “Издательство СНЦ”, 2019. – 140 с.
11. Патент РФ № 2651094 от 24.07.18.
  12. Глушченков, В.А. Технология магнитно – импульсной обработки материалов: монография / В.А. Глушченков, В.Ф. Карпухин. – Самара: Издательский дом “Федоров”, 2014. – 208 с.
  13. Юсупов, Р.Ю. Энергетические установки для магнитно-импульсной обработки материалов: монография / Р.Ю. Юсупов, В.А. Глушченков. – Самара: Издательский дом “Федоров”, 2013. – 128 с.
  14. Беляева, И.А. Гибридные и комбинированные технологии, сочетающие статическое и магнитно-импульсное нагружения, в машиностроении и в металлургии: монография / И.А. Беляева, В.А. Глушченков. – Самара: Изд-во Самарского научного центра РАН, 2021. – 146 с.

## VISUALIZATION OF THE STATIC-DYNAMIC PROCESS OF COMPACTION OF A POWDER COMPOSITION IN A METAL SHELL

© 2023 V.A. Glouschenkov<sup>1,2</sup>, R. de Alvarenga<sup>2</sup>, I.A. Belyaeva<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Samara Federal Research Center of the Russian Academy of Sciences, Samara, Russia

<sup>2</sup> Samara National Research University named after academician S.P. Korolyov

The paper considers a hybrid technology of compaction of a powder composition (PC) in a metal shell: drawing and pulse-magnetic crimping. A technique of computer simulation of such static-dynamic process has been developed. Based on the simulation results, a visualization picture of the process of deformation of the pipe and the powder composition contained in it has been developed. The resulting visualization picture of the process made it possible to describe step-by-step the compaction mechanism and its dependence on the degree of deformation of the pipe during drawing and on the value of the energy of pulse-magnetic crimping. The achieved packing density, which characterizes the quality of compaction, has been determined. The results of the work are used in design of a new technology.

*Key words:* powder composition, hybrid technology, drawing, pulse-magnetic crimping, static-dynamic deformation, packing density.

DOI: 10.37313/1990-5378-2023-25-3-43-49

EDN: KDFRLB

### REFERENCES

1. Girshov, V.A. *Sovremennye tekhnologii v poroshkovej metallurgii: ucheb. posobie* / V. A. Girshov, S. A. Kotov, V. N. Cemenko. – SPb: Izd-vo politekhn. un-ta, 2010. – 385 s.
2. Anciferov, V.N. *Perspektivnye materialy i tekhnologii poroshkovej metallurgii: ucheb. Posobie* / V. N. Anciferov. – Perm’: Izd-vo Perm. nac. isled. politekhn. un-ta, 2014. – 109 s.
3. Cemenko, V.N. *Deformirovanie poroshkovykh sred: monografiya* / V.N. Cemenko. – SPb: Izd-vo SPbGTU, 2001 – 102 s.
4. Volkogon, G.M. *Progressivnye detali iz poroshkov i oborudovanie: monografiya* E.M. Volkon, A.M. Dmitriev, E.P. Dobryakov, pod obshch. red. A.M. Dmitrieva, A.G. Ovchinnikova. – M.: Mashinostroenie, 1991. – 320 s.
5. Polyakov, A.R. *Dinamic power compaction processer*. www.orcid/000-0003-0109-6916/
6. Gorobcov V.G. *Razrabotka i vnedrenie processov impul’snogo nagruzheniya dlya polucheniya poroshkovykh i kompozitsionnykh materialov: avtoreferat dis. na poisk. uchyon. step. d.t.n.* / V.G. Gorobcov – Minsk, 1986.
7. Nesterenko, V.F. *Impul’snoe nagruzhenie geterogennykh materialov: monografiya* / V.F. Nesterenko. – Novosibirsk: Nauka, Sib. otd-nie RAN, 1992. – 200 s.
8. Grigor’ev E.G., Kalich B.A. *Elektroimul’snaya tekhnologiya formirovaniya materialov iz poroshkov: Uchebnoe posobie* / E.G. Grigor’ev, B.A. Kalich. – M.: MIFI, 2008. – 152 s.
9. Mironov, V.A. *Magnitno-impul’snoe pressovanie poroshkov* / V.A. Mironov. – Riga: Zinatne, 1980. – 192 s.
10. Prokof’ev, A.B. *Magnitno-impul’snaya obrabotka materialov (MIOM): monografiya* / A.B. Prokof’ev [i dr.] – Samara: ANO “Izdatel’stvo SNC”, 2019. – 140 s.
11. Патент РФ № 2651094 от 24.07.18.
12. Глушченков, В.А. *Технология магнитно – импульсной обработки материалов: монография* / В.А. Глушченков, В.Ф. Карпухин. – Самара: Издательский дом “Федоров”, 2014. – 208с.
13. Юсупов, Р.Ю. *Энергетические установки для магнитно-импульсной обработки материалов: монография* / Р.Ю. Юсупов, В.А. Глушченков. – Самара: Издательский дом “Федоров”, 2013. – 128 с.
14. Беляева, И.А. *Гибридные и комбинированные технологии, сочетающие статическое и магнитно-импульсное нагружения, в машиностроении и в металлургии: монография* / И.А. Беляева, В.А. Глушченков. – Самара: Изд-во Самарского научного центра РАН, 2021. – 146 с.

*Glushchenkov Vladimir Alexandrovich, Candidate of Technical Sciences, Professor of the Department of Metal Forming, Head of the Bioengineering Laboratory. E-mail: vgl@ssau.ru*  
*Roberto de Alvarenga, Engineer, Department of Metal Forming. E-mail: de\_alvarenga.r@ssau.ru*

*Belyaeva Irina Alexandrovna, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Metal Forming, Leading Researcher of the Bioengineering Laboratory. E-mail: belyaeva-ommr@yandex.ru*

## ОПТИМИЗАЦИЯ СИСТЕМЫ ОБЕСПЕЧЕНИЯ ЗАПАСНЫМИ ЧАСТЯМИ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ПОДРАЗДЕЛЕНИЙ АЭРОПОРТОВОЙ СЕТИ

© 2023 И.В. Кольцов, В.А. Романенко

Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва,  
г. Самара, Россия

Статья поступила в редакцию 22.05.2023

Решается задача оптимального проектирования системы обеспечения запасными частями для систем обработки багажа группы аэропортов. Предполагается, что аэропорты, входящие в группу, будут оснащены багажными системами одного производителя, снабжающего их запасными частями на стадии эксплуатации. Один из аэропортов группы будет выполнять функции пассажирского пересадочного узла (хаба) для хабообразующей авиакомпании, предполагающей организовать массовые трансферные перевозки между аэропортами группы. Предлагается создание эшелонированной системы обеспечения запасными частями, предусматривающей наличие складов на уровнях производителя, узлового аэропорта и остальных (периферийных) аэропортов, и использование комбинированной стратегии поставок запасных частей, предполагающей периодические поставки со склада производителя на склады аэропортов, оперативные поставки со склада узлового на склады периферийных аэропортов и, при возникновении дефицита, экстренные поставки на склад узлового аэропорта. Целью решения задачи является определение объема производства запчастей оптимального по критерию минимума затрат на производство, хранение и пополнение запаса. Приведены результаты модельных примеров, свидетельствующие о правомерности рассмотренной постановки задачи и эффективности предложенной системы обеспечения запчастями.

*Ключевые слова:* Система обеспечения запасными частями; оптимизация; узловой аэропорт; хабообразующая авиакомпания; система обработки багажа.

DOI: 10.37313/1990-5378-2023-25-3-50-56

EDN: KJBCBQ

### ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрена задача оптимального проектирования системы обеспечения запасными частями (ЗЧ) производственных подразделений аэропортов, занимающихся эксплуатацией, техническим обслуживанием и ремонтом (ТОиР) систем обработки багажа (СОБ). Основным поставщиком ЗЧ является предприятие – производитель и системный интегратор оборудования СОБ. Потребители ЗЧ – специализированные службы аэропортов, располагающие складами для хранения запаса ЗЧ и ремонтными органами (РО). Рассматривается группа аэропортов, оснащаемых СОБ одного производителя. Один из аэропортов группы предполагается узловым, то есть выполняющим функции пересадочного узла (хаба) для пассажиров, перевозимых между другими («периферийными») аэропортами группы. Перевозки между аэропортами группы через хаб выполняет хабообразующая авиакомпания,

которая координирует свое расписание таким образом, чтобы обеспечить пассажирам удобную пересадку в хабе [1]. На этапе предэскизного проектирования СОБ необходимо располагать расчетными моделями, позволяющими решать задачи оптимизации структуры и параметров как самих СОБ, так и систем обеспечения их ЗЧ. Предполагая, что технико-экономические параметры СОБ заданы, поставим задачу формирования сравнительно простой модели для предварительных «быстрых» оценок оптимальных объемов производства ЗЧ, выбора схем снабжения ими потребителей, затрат на производство и снабжение ЗЧ.

Обзор работ по теории снабжения ЗЧ, актуальный на начало XXI века, приводится в [2]. В самой работе делается акцент на применении методологии теории массового обслуживания при построении стохастических моделей систем снабжения запчастями. Подробно рассмотрены методики расчета многоуровневых (в основном двухуровневых) систем управления запасами восстанавливаемых ЗЧ, в том числе с экстренными поставками. Среди таких методик так называемая «METRIC» – методика эшелонированного управления восстанавливаемыми запчастями в двухуровневой системе [3,4], на нижнем уровне которой («базе») пред-

*Романенко Владимир Алексеевич, кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры организации и управления перевозками на транспорте.*

*E-mail: vla\_rom@mail.ru*

*Кольцов Иван Владимирович, старший преподаватель кафедры организации и управления перевозками на транспорте. E-mail: koltsov.iv@ssau.ru*

полагается поддержание нормативного запаса  $S$  в соответствии со стратегией восполнения «запрос-заказ» ( $S-1, S$ ), ограниченные ремонтные возможности и составной пуассоновский входной спрос. Горизонтальный обмен между базами отсутствует. В верхнем звене («депо») все детали ремонтируемы, спрос составной (логарифмический) пуассоновский, поддержание запаса по схеме «двух уровней» ( $s, S$ ). В дальнейшем методика METRIC была модифицирована применительно к структурированным изделиям при простом пуассоновском спросе [5,6]. В работах [4,7] предложена методика управления запасными частями, предполагающая принятие в режиме реального времени решения, на какую базу отправить очередное отремонтированное изделие из депо. Позже методика METRIC была распространена на двухэшелонную систему с экстренными поставками на базы из депо или извне системы, на трехуровневую систему с полностью восстанавливаемыми изделиями, а также децентрализованную систему [2]. В [2] упомянуты также приближенные модели для двухуровневых систем со стратегиями восполнения, отличающимися от стратегий ( $S-1, S$ ) на базах и ( $s, S$ ) в депо, принятых в семействе моделей METRIC [6,7]. Обстоятельному анализу результатов зарубежных исследований в области теории управления запасами ЗЧ, достигнутых к 2020 году, с привлечением материала около 150 работ посвящена статья [8]. Среди пробелов в исследованиях указанной области авторы отмечают недостаточное внимание, уделяемое системам снабжения с возможностью экстренных поставок. Число работ, посвященных системам снабжения запчастями аэропортов, невелико. Из работ отечественных авторов следует отметить [9,10], где решается задача минимизации затрат на доставку ЗЧ для специальных автомобилей, эксплуатирующихся в аэропортах. Из зарубежных работ интерес представляет [11], в которой на базе модели Марковской многоканальной СМО с неограниченным ожиданием и методики «METRIC» эшелонированного управления восстанавливаемыми запчастями в двухуровневой системе разработаны стратегия снабжения авиакомпаний запасными частями для воздушных судов из единого центра и модель определения оптимального расположения такого центра.

### КОНЦЕПТУАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ СИСТЕМЫ

Предлагается организовать эшелонированную систему обеспечения ЗЧ со складами на трех уровнях [2]: верхнем – склад производителя («депо верхнего уровня», ДВУ), среднем – склад с ремонтными возможностями узлового аэропорта («депо нижнего уровня», ДНУ), нижнем – склады с ремонтными возможностя-

ми периферийных аэропортов («базы»). Для описания структуры системы обеспечения ЗЧ группы в составе  $H$  аэропортов введены следующие обозначения:  $h$  – индекс склада аэропорта,  $h = 1, 2, \dots, H$  (где  $h = 1$  – хаб,  $h = 2, 3, \dots, H$  – периферийные аэропорты);  $i$  – индекс типа компонентов СОБ и, одновременно, типа ЗЧ, требующихся для восстановления указанных компонентов,  $i = 1, 2, \dots, I$ ;  $\lambda_{hi}$  – интенсивность потока отказов компонентов СОБ типа  $i$  в аэропорту  $h$  (интенсивность спроса на ЗЧ  $i$  на складе аэропорта  $h$ ).

Потоки отказов предполагаются стационарными пуассоновскими. Используется комбинированная стратегия поставок ЗЧ, предполагающая следующие поставки:

1) плановое производство и периодические поставки ЗЧ из ДВУ в ДНУ и на базы – стратегия с постоянным объемом заказа и восполнением через фиксированные промежутки времени  $q$ . Доставка ЗЧ экономичными наземными видами транспорта;

2) оперативные поставки ЗЧ из ДНУ на базы. Стратегия предусматривает доставку как минимум одной единицы ЗЧ необходимого типа на склад периферийного аэропорта в случае достижения нулевого запаса со склада хаба ближайшим регулярным авиарейсом хабообразующей авиакомпании (при наличии запаса ЗЧ необходимого типа на складе хаба). Предполагается, что оперативные поставки из ДВУ в ДНУ отсутствуют по причине возможного отсутствия рейсов хабообразующей авиакомпании в аэропорт пункта расположения ДВУ;

3) экстренное сверхплановое производство (или приобретение у конкурентов) и поставка ЗЧ в ДНУ при отсутствии необходимых ЗЧ как на базе, так и в ДНУ. Поставка сопряжена с существенными затратами времени и необходимостью производства при значительно более высокой себестоимости (или приобретения по цене, значительно превышающей себестоимость при плановом производстве) [2]. Введено допущение о том, что создаваемый в хабе запас достаточен для того, чтобы исключить необходимость экстренных поставок в периферийные аэропорты.

### ПОСТАНОВКА ОПТИМИЗАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ

В качестве показателя эффективности системы обеспечения ЗЧ принята сумма затрат  $c_{\Sigma}$  на производство, хранение и пополнение ЗЧ подразделений ТОиР СОБ группы аэропортов, включающая следующие слагаемые: затраты на плановый выпуск ЗЧ; затраты на периодическую поставку ЗЧ в ДНУ и на базы; затраты на хранение ЗЧ в ДВУ, ДНУ и на базах; затраты на оперативную поставку ЗЧ на базы и на экстрен-

ную поставку ЗЧ в ДНУ. Сумма  $c_\Sigma$ , включающая слагаемые в перечисленном выше порядке, определяется согласно выражению:

$$\begin{aligned}
 c_\Sigma = & \sum_{i=1}^I \sum_{h=1}^H s_{hi} c_i^B + \sum_{i=1}^I \sum_{h=1}^H m_i s_{hi} c_h^\Pi + \\
 & + \frac{\theta}{2} c_{h=0}^X \sum_{i=1}^I \sum_{h=1}^H m_i s_{hi} + \theta \sum_{i=1}^I \sum_{h=2}^H m_i \bar{y}_{hi} c_h^X + \\
 & + \theta c_{h=1}^X \sum_{i=1}^I m_i \bar{y}'_{h=1,i} + \sum_{i=1}^I \sum_{h=2}^H m_i \bar{v}_{hi} c_h^O + \\
 & + \sum_{i=1}^I (c_i^C \bar{v}_{h=1,i} + m_i \bar{v}_{h=1,i} c_{h=1}^O),
 \end{aligned} \tag{1}$$

где  $s_{hi}$  – число ЗЧ типа  $i$  в одной периодической поставке на склад  $h$ ;  $c_i^B$  – затраты на плановый выпуск единицы ЗЧ типа  $i$ ;  $m_i$  – масса брутто единицы ЗЧ типа  $i$ ;  $c_h^\Pi$  – стоимость периодической поставки единицы массы брутто ЗЧ на склад  $h$  наземным транспортом;  $c_h^X$  – стоимость хранения в течение единицы времени единицы массы брутто груза на складе  $h$ ;  $c_h^O$  – стоимость оперативной поставки самолетом единицы массы брутто ЗЧ из ДНУ на  $h$ -ю базу ( $h = 2, 3, \dots, H$ ) или экстренной ее поставки в ДНУ ( $h = 1$ ) со склада производителя, либо его конкурента;  $c_i^C$  – затраты на сверхплановый выпуск единицы ЗЧ типа  $i$  или на приобретение ее у другого производителя;  $\bar{y}_{hi}$  – средний за период  $\theta$  запас ЗЧ типа  $i$  на складе  $h$ ;  $\bar{y}'_{h=1,i}$  – скорректированный с учетом оперативных поставок средний запас ЗЧ типа  $i$  в ДНУ;  $\bar{v}_{hi}$  – среднее число ЗЧ типа  $i$ , оперативно поставленных на  $h$ -ю базу ( $h = 2, 3, \dots, H$ ) из ДНУ за период  $q$ ;  $\bar{v}_{h=1,i}$  – среднее число ЗЧ типа  $i$ , экстренно поставленных в ДНУ за период  $\theta$ .

Для вывода выражений, позволяющих рассчитывать величины  $\bar{y}_{hi}$  и  $\bar{v}_{hi}$ , необходимо рассмотреть однопродуктовую модель системы управления запасами с единственным источником отказов, простейшим потоком отказов интенсивностью  $\lambda$ , единственным складом ЗЧ. Пусть восполнение запаса ЗЧ выполняется как периодически, так и оперативно. Периодически через промежутки времени фиксированной продолжительности  $\theta$  запас ЗЧ на складе пополняется на фиксированное число элементов  $s$ . Предполагается, что если в результате очередного отказа запас исчерпывается, то непосредственно после отказа делается заказ на опера-

тивную поставку одной единицы ЗЧ, который немедленно удовлетворяется. Таким образом, склад всегда располагает как минимум одной единицей ЗЧ. Величина  $\bar{y}$  среднего за период  $\theta$  запаса на складе с использованием численных методов интегрирования может быть приближенно определена как

$$\bar{y} = \frac{1}{\theta} \int_0^\theta \bar{y}(t) dt, \tag{2}$$

где  $\bar{y}(t)$  – средний запас к моменту  $t \in [0, \theta)$ . Получим формулы для среднего запаса  $\bar{y}(t)$  и среднего за период  $q$  числа  $\bar{v}$  ЗЧ, оперативно поставляемых на склад. Обозначим  $x(t)$ ,  $y(t)$  и  $v(t)$ , соответственно, число отказов, запас на складе и число оперативно поставленных ЗЧ к моменту  $t \in [0, \theta)$ . Легко видеть, что для принятой стратегии, сочетающей периодические и оперативные поставки, связь между величинами  $y(t)$ ,  $v(t)$  и  $x(t)$  может быть представлена таблицей 1.

В формализованном виде связь между величинами  $y(t)$ ,  $v(t)$  и  $x(t)$  может быть представлена следующими соотношениями:

$$y(t) = \begin{cases} s - x(t), & 0 \leq x(t) \leq s - 1, \\ 1, & s \leq x(t), \end{cases} \tag{3}$$

$$v(t) = \begin{cases} 0, & x(t) < s, \\ x(t) - s + 1, & s \leq x(t). \end{cases} \tag{4}$$

Учтем, что для стационарного пуассоновского потока с интенсивностью  $\lambda$  вероятность  $P_x(t)$  наступления  $x$  отказов за время  $t$  подчиняется закону Пуассона:

$$P_x(t) = \frac{(\lambda t)^x}{x!} e^{-\lambda t}. \tag{5}$$

Тогда, согласно выражению (3), имеем:

$$\begin{aligned}
 \bar{y}(t) &= \sum_{x=0}^{s-1} (s - x) P_x(t) + \sum_{x=s}^{\infty} P_x(t) = \\
 &= \sum_{x=0}^{s-1} (s - x) P_x(t) + 1 - \sum_{x=0}^{s-1} P_x(t) = \\
 &= 1 + \sum_{x=0}^{s-1} (s - x - 1) P_x(t).
 \end{aligned} \tag{6}$$

Выражения (2), (5), (6) позволяют приближенно определять  $\bar{y}$  по заданным  $\lambda$ ,  $s$  и  $\theta$ .

Таблица 1. Связь между параметрами системы управления запасами

$x(t)$	0	1	2	...	$s - 1$	$s$	$s + 1$	$s + 2$	...
$y(t)$	$s$	$s - 1$	$s - 2$	...	1	1	1	1	...
$v(t)$	0	0	0	...	0	1	2	3	...

Так как по определению  $\bar{v} \equiv \bar{v}(t = \theta) = \bar{v}(\theta)$ , из выражения (4) получаем:

$$\begin{aligned} \bar{v} &= \bar{v}(\theta) = \sum_{x=s}^{\infty} (x - s + 1)P_x(\theta) = \\ &= \sum_{x=s}^{\infty} xP_x(\theta) + (1-s)\sum_{x=s}^{\infty} P_x(\theta). \end{aligned} \quad (7)$$

Чтобы избавиться от сумм с бесконечным числом слагаемых в формуле (7), используем известные формулы сумм членов бесконечных рядов [12]:

$$\sum_{x=0}^{\infty} \frac{a^x}{x!} = e^a, \quad \sum_{x=0}^{\infty} x \frac{a^x}{x!} = ae^a, \quad a \in \mathbf{R}.$$

После подстановки (5) в (7) и проведения необходимых преобразований получим расчетную формулу для  $\bar{v}$ :

$$\begin{aligned} \bar{v} &= e^{-\lambda\theta} \sum_{x=s}^{\infty} x \frac{(\lambda\theta)^x}{x!} + e^{-\lambda\theta} (1-s) \sum_{x=s}^{\infty} \frac{(\lambda\theta)^x}{x!} = \\ &= e^{-\lambda\theta} \left( \sum_{x=0}^{\infty} x \frac{(\lambda\theta)^x}{x!} - \sum_{x=0}^{s-1} x \frac{(\lambda\theta)^x}{x!} \right) + \\ &+ (1-s)e^{-\lambda\theta} \left( \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\lambda\theta)^x}{x!} - \sum_{x=0}^{s-1} \frac{(\lambda\theta)^x}{x!} \right) = \\ &= \lambda\theta - e^{-\lambda\theta} \sum_{x=0}^{s-1} x \frac{(\lambda\theta)^x}{x!} + (1-s) \left( 1 - e^{-\lambda\theta} \sum_{x=0}^{s-1} \frac{(\lambda\theta)^x}{x!} \right) = \\ &= \lambda\theta + 1 - s - e^{-\lambda\theta} \sum_{x=0}^{s-1} (x+1-s) \frac{(\lambda\theta)^x}{x!}. \end{aligned}$$

Используем полученные выражения для определения величин  $\bar{y}_{hi}$  и  $\bar{v}_{hi}$ ,  $h = 2, 3, \dots, H$ , в модели эшелонированной системы обеспечения ЗЧ. При переходе к введенным ранее обозначениям эти выражения принимают вид:

$$\bar{y}_{hi} = \frac{1}{\theta} \int_0^{\theta} \left( 1 + \sum_{x=0}^{s_{hi}-1} (s_{hi} - x - 1) \frac{(\lambda_{hi}t)^x}{x!} e^{-\lambda_{hi}t} \right) dt, \quad (8)$$

$$\bar{v}_{hi} = 1 + \lambda_{hi}\theta - s_{hi} - e^{-\lambda_{hi}\theta} \sum_{x=0}^{s_{hi}-1} (1 + x - s_{hi}) \frac{\lambda_{hi}\theta^x}{x!}. \quad (9)$$

Скорректированная с учетом оперативных поставок на базы величина  $\bar{y}'_{h=1,i}$  среднего запаса ЗЧ типа  $i$  в ДНУ приближенно определяется по формуле (8), в которой вместо  $s_{h=1,i}$  используется значение  $s'_{h=1,i}$ , полученное в результате коррекции  $s_{h=1,i}$ :

$$s'_{h=1,i} = s_{h=1,i} - \sum_{h=2}^H \bar{v}_{hi}, \quad i = 1, \dots, I. \quad (10)$$

Если величина  $s'_{h=1,i}$  не является целым числом, то применяется следующий приближенный прием: подсчитываются величины скорректированного среднего запаса для  $[s'_{h=1,i}]$  и  $[s'_{h=1,i}] + 1$ , где  $[\cdot]$  – целая часть числа, и проводится линейная интерполяция.

Поскольку сверхплановые ЗЧ экстренно поставляются в ДНУ с целью компенсировать там дефицит, то среднее число  $\bar{v}_{h=1,i}$  ЗЧ типа  $i$ , экстренно поставленных в ДНУ за период  $q$ , может быть определено по формуле (9), в которой вместо  $s_{h=1,i}$  используется скорректированное по формуле (10) значение  $s'_{h=1,i}$ .

Предполагается, что стоимость поставки  $c_h^d$ ,  $d \in \{ "П", "О" \}$  определяется в первую очередь транспортными тарифами, которые зависят от вида транспорта, дальности  $l_h^d$  перевозки и массы  $m_h^d$  перевозимого груза. Эта зависимость может быть аппроксимирована степенной функцией двух аргументов:

$$c_h^d = (\alpha_1^d \cdot l_h^d + \alpha_0^d)(m_h^d)^{(\beta_1^d \cdot l_h^d + \beta_0^d)}, \quad d \in \{ "П", "О" \},$$

где  $\alpha_0^d, \alpha_1^d, \beta_0^d, \beta_1^d$  – коэффициенты, зависящие от того, является ли поставка периодической или оперативной (либо экстренной), а следовательно – от вида транспорта, определенные методами регрессионного анализа по данным Интернет-ресурсов транспортных предприятий. Расстояние перевозки и масса перевозимого груза также зависят от вида поставки. В рамках периодической поставки из ДНУ на  $h$ -ю базу перевозятся ЗЧ различных типов общей массой  $m_h^P = \sum_{i=1}^I s_{hi} m_i$ . В случае оперативной

(или экстренной) поставки предполагается, что перевозятся отдельные ЗЧ.

Затраты  $c_{\Sigma 0}^X$  на хранение ЗЧ в ДВУ определены в предположении равномерной поставки на склад выпущенных по плану ЗЧ, периодического вывоза всех выпущенных по плану ЗЧ через промежутки времени  $\theta$ , немедленного экстренного вывоза без необходимости хранения на складе всех выпущенных вне плана ЗЧ.

Другие стоимостные и массовые величины из выражения (1) либо задаются, либо определяются из очевидных соображений.

Вводится следующее ограничение на нижний уровень технической надежности компонентов СОБ, который должен поддерживаться системой обеспечения ЗЧ:

$$K_{hi}^{\Gamma} \geq K_{hi}^{\Gamma \min}, \quad h = 1, \dots, H, \quad i = 1, \dots, I, \quad (11)$$

где  $K_{hi}^{\Gamma}$  – стационарный коэффициент готовности компонента  $i$ -го типа в  $h$ -м аэропорту,  $K_{hi}^{\Gamma \min}$  – заданное минимально допустимое значение  $K_{hi}^{\Gamma}$ . Величина  $K_{hi}^{\Gamma}$  определяется с использованием среднего времени  $T_{hi}^P$  ремонта компонента и среднего времени  $T_{hi}^A$  непроизводительного простоя компонента в ожидании ремонта, связанного с возможным дефицитом ЗЧ в момент отказа и необходимостью доставки ЗЧ (а возможно, и изготовления или приобретения) для ремонта:

**МОДЕЛЬНЫЙ ПРИМЕР**

$$K_{hi}^{\Gamma} = \frac{1}{\lambda_i(T_i^P + T_{hi}^D) + 1}.$$

Среднее время  $T_{hi}^D$  непроизводительного простоя по причине отсутствия ЗЧ  $i$ -го типа в  $h$ -м аэропорту определяется как средневзвешенные затраты времени на ликвидацию дефицита путем периодических, оперативных или экстренных поставок. Для простейшего потока отказов, комбинированной стратегии поставок и введенных допущений получены следующие выражения для оценки  $T_{hi}^D$ , которые будут различаться для случаев узлового и периферийных аэропортов:

$$T_{hi}^D = \left. \begin{cases} T_{hi}^{D\Delta} \bar{v}_{h=1,i}, & h=1 \\ \lambda_{h=1,i} \theta, & h=1 \\ T_{hi}^{DO} \bar{v}_{hi} (1 - e^{-\lambda_{hi} T_{hi}^{DO}}), & h=2, \dots, H \\ \lambda_{hi} \theta, & h=2, \dots, H \end{cases} \right\} i=1, \dots, I$$

где  $T_{hi}^{DO}$ ,  $T_{hi}^{D\Delta}$  – величины среднего времени ликвидации дефицита ЗЧ  $i$ -го типа в  $h$ -м аэропорту (в случае его возникновения) путем, соответственно, оперативных и экстренных поставок. Величины  $T_{hi}^{DO}$  и  $T_{hi}^{D\Delta}$  задаются. Например, случаю одного ежедневного рейса из узлового в периферийный аэропорт соответствует  $T_{hi}^{DO} \approx 12$  ч.

Учитывается также ограничение на производственные возможности производителя, предполагающее, что производитель-поставщик способен произвести в течение промежутка времени  $q$  не более  $s_i^{\max}$  единиц ЗЧ типа  $i$ :

$$\sum_{h=1}^H s_{hi} \leq s_i^{\max}, \quad i=1, \dots, I. \quad (12)$$

Задача оптимизации системы обеспечения запчастями СОБ группы «хаб – периферийные аэропорты», решаемая производителем СОБ на ранних этапах проектирования такой системы, состоит в определении целых неотрицательных величин  $s_{hi}$  ( $h=1, \dots, H$ ,  $i=1, \dots, I$ ), минимизирующих значение целевой функции  $c_{\Sigma}$  при ограничениях (11) и (12).

Для оценки эффекта от использования хаба в качестве депо была решена модельная задача в описанной выше постановке для группы аэропортов в составе хаба и шести периферийных аэропортов с циклом работы системы обеспечения ЗЧ, равным одному месяцу (30 дням). Предполагалось, что аэропорты необходимо обеспечивать ЗЧ для восстановления таких составных частей багажных конвейеров, как конвейерная лента ( $i=1$ ), металлоконструкция ( $i=2$ ), электродвигатель ( $i=3$ ) и редуктор ( $i=4$ ). Величины интенсивности потоков отказов и характеристики аэропортов сведены в таблицу 2, технико-экономические параметры ЗЧ – в таблицу 3.

Считалось, что рейсы из хаба в периферийные аэропорты выполняются не реже одного раза в сутки. Среднее время ликвидации дефицита путем экстренных поставок принято равным 72 ч. Минимально допустимый стационарный коэффициент готовности принят равным достаточно высокому значению  $K_{hi}^{\Gamma \min} = 0.995$  для всех  $h=1, \dots, H$ ,  $i=1, \dots, I$ . Оптимальное значение целевой функции, составившее около 18.3 млн.руб., было получено в результате решения оптимизационной задачи с использованием программной надстройки «Поиск решения» табличного процессора Microsoft Excel. Оптимальный ежемесячный объем производства и периодических поставок ЗЧ приведен в таблице 4. Периодические поставки ЗЧ в хаб, объем которых значительно превосходит объемы поставок в другие аэропорты, включают также ЗЧ, предназначенные для оперативных поставок в периферийные аэропорты.

Для сравнения была рассмотрена система, в которой хаб уже не служил депо, а, наряду с другими аэропортами, играл роль «рядовой» базы, при этом предполагались только периодические и экстренные поставки. При заданных выше исходных данных ухудшение по критерию минимума затрат  $c_{\Sigma}$  составило около 15%, что гово-

**Таблица 2.** Интенсивности потоков отказов и параметры аэропортов

h	$\lambda_{hi}$ , 1/мес.				$l_h^P$ , км	$l_h^O$ , км	$c_h^X$ , $\frac{\text{руб.}}{\text{кг} \cdot \text{нед.}}$
	i						
	1	2	3	4			
1	34	3	15	12	1000	900	5.0
2	8	1	3	3	2820	2000	4.0
3	18	1	7	6	1429	1150	3.0
4	13	1	5	4	2100	1630	4.0
5	21	2	8	7	1660	1320	3.0
6	50	5	35	30	1840	1360	7.0
7	19	1	8	7	2050	1800	6.0

Таблица 3. Характеристики ЗЧ

Параметр	<i>i</i>			
	1	2	3	4
$m_i$ , кг.	15.9	19.8	12.1	8.2
$c_i^B$ , тыс.руб.	43.0	101.1	42.8	47.4
$c_i^O$ , тыс.руб.	214.0	505.6	213.9	237.2
$T_i^P$ , ч.	8.4	10.0	4.7	1.8
$\lambda_i$ , 1/мес.	0.26	0.02	0.13	0.11

Таблица 4. Оптимальные значения  $s_{hi}$ , шт.

<i>h</i> \ <i>i</i>	1	2	3	4
1	75	16	85	72
2	4	1	1	1
3	14	1	1	0
4	9	1	1	1
5	17	1	1	2
6	40	1	2	1
7	16	1	1	1

рит о целесообразности создания депо в хабе. Результаты решения задачи позволяют сформировать оптимальный план производства ЗЧ по типам, спрогнозировать уровни периодических, оперативных и экстренных поставок ЗЧ с распределением их по видам транспорта и производственным подразделениям аэропортов сети хабообразующей авиакомпании.

**ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

Предложенная комбинированная стратегия, сочетающая периодические, оперативные и экстренные поставки запчастей для СОБ, с организацией депо в узловом аэропорту позволяет сократить затраты на производство, хранение и пополнение ЗЧ подразделений ТОиР СОБ аэропортовой сети хабообразующей авиакомпании. Область применения сформированной оптимизационной модели не ограничивается только багажными системами и может быть расширена на другие типы аэропортовой техники.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Романенко, В.А. Математические модели функционирования узловых аэропортов в условиях современного авиатранспортного рынка: монография / В.А. Романенко. – Самара: Изд-во «Ас Гард», 2010. – 244 с.
2. Рыжиков, Ю.И. Теория очередей и управление запасами / Ю.И. Рыжиков. СПб.: Питер, 2001. 384 с.
3. Sherbrooke C.C. Metric: A multi-echelon technique for recoverable item control // *Operations Research*. 1968. V.16. No.1. P.122–141.

4. Sherbrooke C.C. Optimal Inventory Modeling of Systems. Multi-Echelon Techniques. Springer, 2004. – 368 p.
5. Miller B.L. Dispatching from depot repair in a recoverable item inventory system: on the optimality of a heuristic rule // *Management Science*. – 1974. – V.21. – Issue 3. – P.316-325.
6. Muckstadt J.A. Analysis and Algorithms for Service Parts Supply Chains. – Springer, 2005. – 277 p.
7. Petrovic R., Senborn A., Vujosevic M. Hierarchical Spare Parts Inventory Systems. – Amsterdam etc: Elsevier, 1986. – 296 p.
8. Zhang S., Huang K., Yuan Y. Spare Parts Inventory Management: A Literature Review // *Sustainability*. – 2021. – V.13(5). – P.1-23. – DOI: <https://doi.org/10.3390/su13052460>.
9. Арифуллин, И.В. Методика организации поставок запасных частей для специальных автомобилей, эксплуатирующихся в аэропортах / И.В. Арифуллин // *Вестник гражданских инженеров*. – 2017. – №3(62). – С.211-215. – DOI: 10.23968/1999-5571-2017-14-3-211-215
10. Арифуллин, И.В. Оптимизация технического обслуживания автомобилей (на примере аэродромных машин) с использованием основ логистических принципов доставки запасных частей / И.В. Арифуллин // *Вестник гражданских инженеров*. – 2016. №3(56). – С.218-220.
11. Rui Wang, Yicong Qin, Hui Sun. Research on Location Selection Strategy for Airlines Spare Parts Central Warehouse Based on METRIC // *Computational Intelligence and Neuroscience*. 2021. V.2021. P.1-16. DOI: <https://doi.org/10.1155/2021/4737700>.
12. Прудников, А.П. Интегралы и ряды / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев. – М.: Наука, 1981.

## OPTIMIZATION OF SPARE PARTS SUPPLY SYSTEM FOR PRODUCTION DIVISIONS OF AIRPORT NETWORK

© 2023 I.V. Koltsov, V.A. Romanenko

Samara National Research University, Samara, Russia

The problem of optimal design of the spare parts supply system for the baggage handling systems of a group of airports is solved. It is assumed that the airports belonging to the group will be equipped with baggage systems of one manufacturer, which will supply them with spare parts during the operational phase. One of the airports will function as a passenger transfer center (hub) for a hub-forming airline, which will organize mass transfer flights between the airports of the group. The proposed system will consist of a tiered system for spare parts supply, including warehouses at the manufacturer's, hub airport and other (peripheral) airports, and a combined strategy of spare parts supplies, including periodic supplies from the manufacturer's warehouse to the warehouses of airports, on-line supplies from the hub warehouse to the warehouses of peripheral airports, and, in case of deficit, on-line supplies to the hub airport's warehouse. The aim of the solution of the problem is to determine the volume of spare parts production which is optimal by the criterion of minimum costs of production, storage and stock replenishment. The results of model examples, testifying to the validity of the considered statement of the problem and efficiency of the proposed system of spare parts supply, are presented.

*Keywords:* Spare parts supply system; optimization; hub airport; hub-forming airline; baggage handling system.

DOI: 10.37313/1990-5378-2023-25-3-50-56

EDN: KJBCBQ

### REFERENCES

1. Romanenko, V.A. Matematicheskie modeli funkcionirovaniya uzlovyh aeroportov v usloviyah sovremennogo aviatransportnogo rynka: monografiya / V.A. Romanenko. – Samara: Izd-vo «As Gard», 2010. – 244 s.
2. Ryzhikov, Yu.I. Teoriya ocheredey i upravlenie zapasami / Yu.I. Ryzhikov. SPb.: Piter, 2001. 384 s.
3. Sherbrooke C.C. Metric: A multi-echelon technique for recoverable item control // Operations Research. 1968. V.16. No.1. P.122–141.
4. Sherbrooke C.C. Optimal Inventory Modeling of Systems. Multi-Echelon Techniques. Springer, 2004. – 368 p.
5. Miller B.L. Dispatching from depot repair in a recoverable item inventory system: on the optimality of a heuristic rule // Management Science. – 1974. – V.21. – Issue 3. – P.316-325
6. Muckstadt J.A. Analysis and Algorithms for Service Parts Supply Chains. – Springer, 2005. – 277 p.
7. Petrovic R., Senborn A., Vujosevic M. Hierarchical Spare Parts Inventory Systems. – Amsterdam etc: Elsevier, 1986. – 296 p.
8. Zhang S., Huang K., Yuan Y. Spare Parts Inventory Management: A Literature Review // Sustainability. – 2021. – V.13(5). – P. 1-23. – DOI: <https://doi.org/10.3390/su13052460>.
9. Arifullin, I.V. Metodika organizatsii postavok zapasnyh chastej dlya special'nyh avtomobilej, ekspluatiruyushchihsya v aeroportah / I.V. Arifullin // Vestnik grazhdanskih inzhenerov. – 2017. – № 3(62). – S.211-215. – DOI: 10.23968/1999-5571-2017-14-3-211-215
10. Arifullin, I.V. Optimizatsiya tekhnicheskogo obsluzhivaniya avtomobilej (na primere aerodromnyh mashin) s ispol'zovaniem osnov logisticheskikh principov dostavki zapasnyh chastej / I.V. Arifullin // Vestnik grazhdanskih inzhenerov. – 2016. № 3(56). – S. 218-220.
11. Rui Wang, Yicong Qin, Hui Sun. Research on Location Selection Strategy for Airlines Spare Parts Central Warehouse Based on METRIC // Computational Intelligence and Neuroscience. 2021. V.2021. P.1-16. DOI: <https://doi.org/10.1155/2021/4737700>.
12. Prudnikov, A.P. Integraly i ryady / A.P. Prudnikov, Yu.A. Brychkov, O.I. Marichev. – M.: Nauka, 1981.

Vladimir Romanenko, Candidate of Science (Engineering), Associate Professor, Associate Professor of the Department of Transportation Management and Control.

E-mail: [vla\\_rom@mail.ru](mailto:vla_rom@mail.ru)

Ivan Koltsov, Senior Lecturer of the Department of Transportation Management and Control.

E-mail: [koltsov.iv@ssau.ru](mailto:koltsov.iv@ssau.ru)

УДК 621.9 : 539.4

**РАЗРАБОТКА МЕТОДИКИ ПО ОЦЕНКЕ НАПРЯЖЁННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ИЗДЕЛИЙ С УЧЁТОМ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОЙ НАСЛЕДСТВЕННОСТИ**© 2023 Д.В. Евдокимов<sup>1,2</sup>, А.А. Алексенцев<sup>1</sup>, А.С. Букатый<sup>1,2</sup>, Р.М. Ахтамянов<sup>2</sup>, Д.А. Бычков<sup>2</sup><sup>1</sup>Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва, г. Самара, Россия<sup>2</sup>АО «Авиаагрегат», г. Самара, Россия

Статья поступила в редакцию 15.05.2023

В статье представлена методика, позволяющая оценивать напряжённо-деформированное состояние изделий как на этапах технологических операций, так и по завершению технологического процесса изготовления. Методика базируется на конечно-элементной модели, позволяющей получать поля напряжений и деформаций в зависимости от нагруженных эпюр остаточных напряжений, которые формируются в процессе исследуемой технологической операции. Таким образом, разработанная методика может служить эффективным инструментом к оптимизации технологических операций, а значит и технологического процесса в целом. В качестве примера в работе рассматривается оптимизация технологического процесса траверсы передней опоры отечественного перспективного самолёта. В результате использования представленной методики получается определить наиболее выгодные режимы обработки проблемного участка траверсы, что позволило увеличить рабочий ресурс детали до требуемого значения.

*Ключевые слова:* Обработка резанием, остаточные напряжения, прочность, деформация, геометрическая точность, конечно-элементный анализ, трещинообразование.

DOI: 10.37313/1990-5378-2023-25-3-57-63

EDN: KUXEKK

**ВВЕДЕНИЕ**

С техническим развитием изделий машиностроения возрастает количество сложнопрофильных и труднообрабатываемых заготовок. Как правило, данная тенденция связана с конструктивным усложнением узлов и агрегатов, особенно ярко заметным в авиационной промышленности [1, 2].

Значительная доля деталей этого производственного сегмента является ответственной, где вместе с высокой трудностью их изготовления появляются и трудности обеспечения заданного ресурса работы.

*Евдокимов Дмитрий Викторович, кандидат технических наук, ведущий инженер АО «Авиаагрегат», доцент кафедр технологий производства двигателей и сопротивления материалов Самарского университета. E-mail: dmitry.evd.ssau@gmail.com*

*Алексенцев Артём Алексеевич, аспирант кафедры технологий производства двигателей Самарского университета. E-mail: artem2000samara@gmail.com*

*Букатый Алексей Станиславович, доктор технических наук, начальник лаборатории технологических проблем АО «Авиаагрегат», профессор кафедры сопротивления материалов Самарского университета. E-mail: bukaty@inbox.ru*

*Ахтамянов Рамиль Маратович, начальник отдела гидроагрегатов ОКБ АО «Авиаагрегат», аспирант кафедры сопротивления материалов Самарского университета. E-mail: art102bash@yandex.ru*

*Бычков Дмитрий Анатольевич, ведущий инженер АО «Авиаагрегат». E-mail: db2009@bk.ru*

Известно, что на ресурс детали будет влиять не только её конструктивная продуманность, но и качество её поверхностного слоя, сформированного на этапах технологического процесса. Исходя из этого, востребованными на производстве являются такие методики, которые позволяют определять на этапах проектирования детали величины параметров, с помощью которых возможно оценивать её ресурс. При этом, особенно важно, если методика дополнительно позволяет учитывать влияние технологических факторов, что, несомненно, оказывает положительное влияние на точность получаемых с помощью такой методики результатов.

Практически более значимыми являются методики, имеющие возможность оценки влияния отдельных технологических процессов на ресурс детали, так как это является инструментом к оптимизации каждого в отдельности участка технологического процесса с позиции рабочего ресурса детали.

**РАЗРАБОТКА МЕТОДИКИ ПО ОЦЕНКЕ НАПРЯЖЁННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ИЗДЕЛИЙ НА ПРИМЕРЕ ТРАВЕРСЫ ВЗЛЁТНО-ПОСАДОЧНОГО УСТРОЙСТВА**

В данной работе представлена расчётная методика, позволяющая оценивать напряжённо-деформированное состояние изделий от дей-

ствия технологических остаточных напряжений. В качестве примера была рассмотрена траверса взлётно-посадочного устройства отечественного перспективного самолета, выполненного из ковочного алюминиевого сплава марки 1933. Общий вид изделия представлен на рис. 1.

Основной проблемой, связанной с эксплуатацией данной детали являлось возникновение трещин в месте установки кронштейнов, которые представлены на рис. 2, а сами посадочные отверстия, куда выполняется монтаж кронштейнов по посадке с зазором, изображены на рис. 1, а.

Характер разрушения представленной на рис. 1, а, зоны выражен трещинообразованием на посадочных поясках отверстий. Стоит отметить, что прочностной численный анализ статического и динамического нагружения траверсы

показал достаточный коэффициент запаса по прочности для разрушающегося участка. Исходя из этого было принято решение проанализировать технологический процесс получения проблемных посадочных отверстий (рис. 1, а). При этом особое внимание уделялось величине, знаку и характеру распределения остаточных напряжений в поверхностном слое зоны при исследуемых отверстиях траверсы [3]. В соответствии с работами [4-10], для каждой операции механической обработки были выписаны наиболее вероятные значения величин остаточных напряжений, для соответствующих технологических операций. На основании проанализированной литературы был сделан вывод, что в результате механической обработки зоны возле посадочных отверстий под кронштейны располагается поле растягивающих остаточных

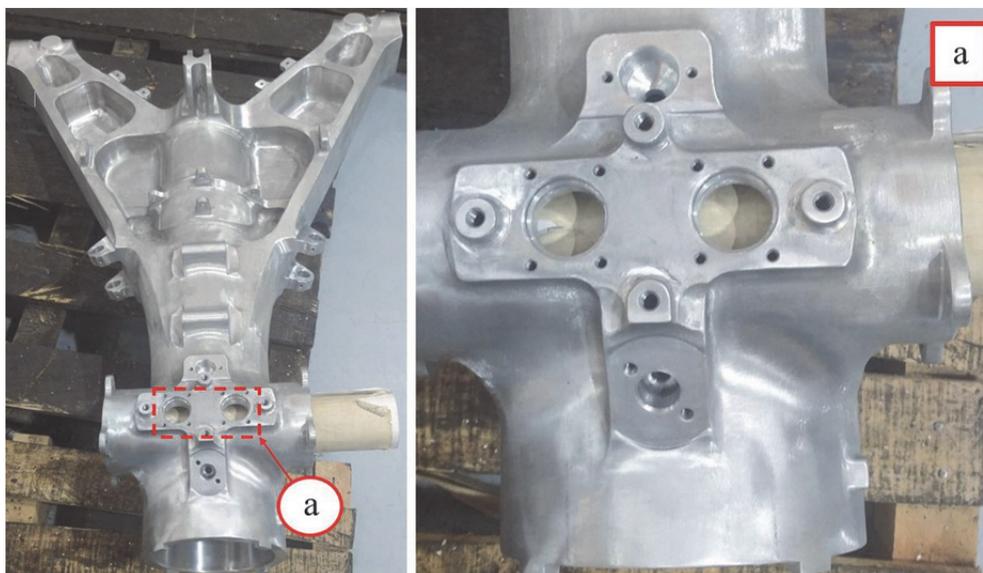


Рис. 1. Общий вид траверсы передней опоры отечественного перспективного самолёта и увеличенным изображением проблемного участка (а)

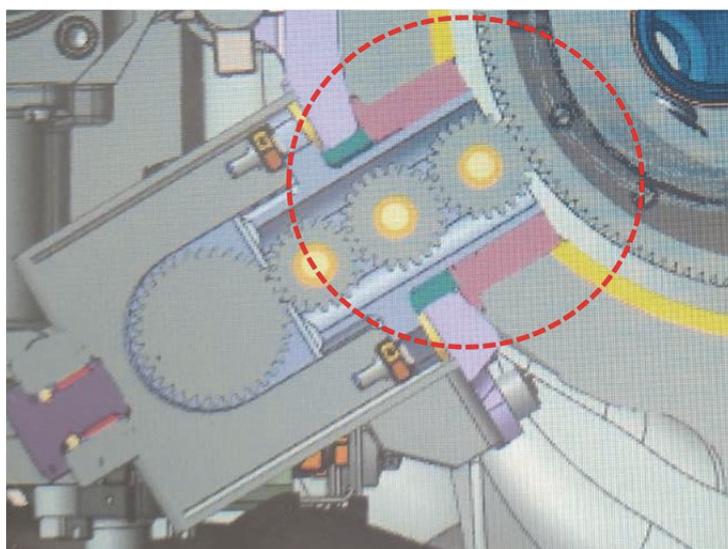


Рис. 2. Вид на разрез проблемной зоны траверсы (пунктирной окружностью указан участок крепления кронштейна с траверсой)

напряжений, что несомненно способствует процессу трещинообразования, тем самым снижая ресурс детали. Для решения данной проблемы стало обоснованным использование методов поверхностного пластического деформирования, с целью наведения на разрушающемся участке траверсы полей сжимающих остаточных напряжений. Однако, на данном этапе важным было не только назначение оптимальных режимов упрочнения поверхностного слоя, но и отслеживание технологических деформаций изделия, чтобы деталь находилась в своих контролируемых размерах внутри допускаемых значений согласно конструкторской документации. Выбор метода поверхностного пластического деформирования был остановлен на дробеструйной обработке, что наилучшим образом

подходит для детали, имеющей представленную конфигурацию (рис. 1).

Для более детального анализа полей растягивающих остаточных напряжений, а также деформаций детали, которые они вызывают на этапах механической обработки, была разработана виртуальная конечно-элементная модель. Её особенностью является возможность оценки напряжённо-деформированного состояния изделия в зависимости от каждой применённой технологической операции для его изготовления в отдельности. Конечно-элементная модель состоит из трех основных виртуальных тел, а именно поверхностные слои первого и второго исследуемых разрушающихся отверстий, а также остальное тело траверсы (рис. 3).

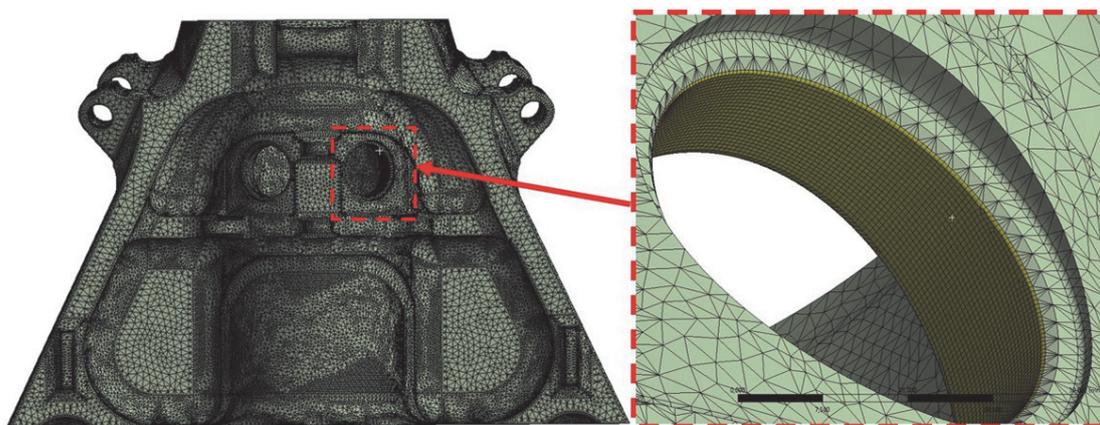


Рис. 3. Общий вид конечно-элементной модели траверсы передней опоры самолёта и увеличенный вид монтажного разрушающегося отверстия

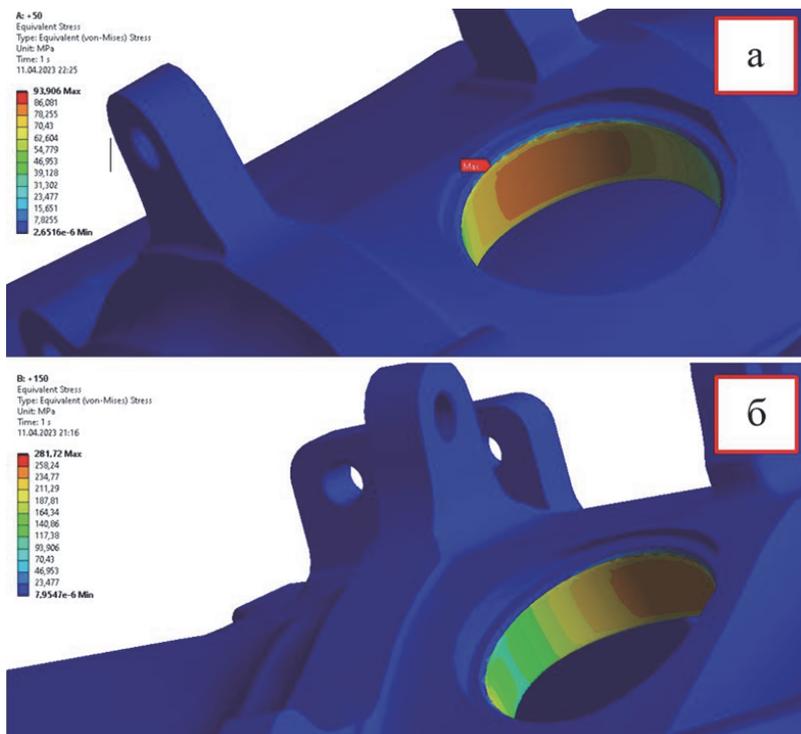


Рис. 4. Поля эквивалентных напряжений в зонах исследуемых монтажных отверстий, где были загружены в поверхностный слой эпюры остаточных напряжений, с максимальными значениями: +50 МПа (а) и +150 МПа (б)

## ПЛАНИРОВАНИЕ ЧИСЛЕННОГО ЭКСПЕРИМЕНТА И ЕГО РЕЗУЛЬТАТЫ

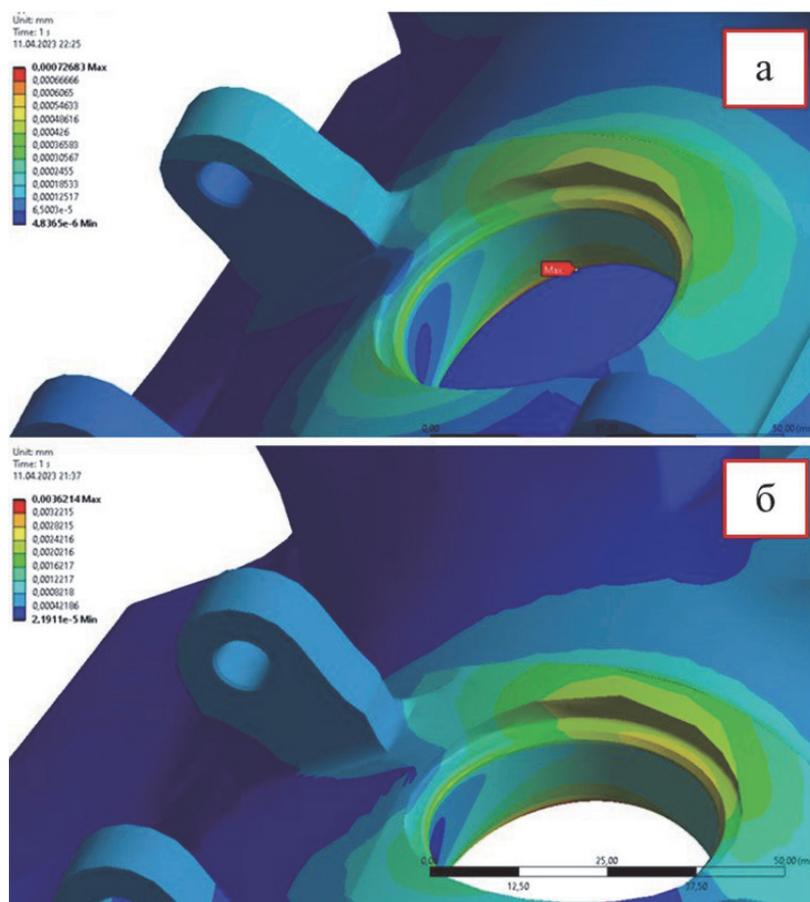
С целью апробации виртуальной модели, в поверхностные слои проблемных монтажных отверстий загружались эпюры остаточных напряжений [4-10], с максимумом, изменяющимся в диапазоне от +50 МПа до +250 МПа. Характер распределения эпюр напряжений соответствовал механической обработке из базового технологического процесса [3-6]. Примеры компьютерных вычислений по конечно-элементной модели возможно видеть на рис. 4 и рис. 5.

В ходе численного эксперимента были получены: график изменения максимальной величины эквивалентных напряжений, распределенных по проблемному участку траверсы в зависимости от пикового значения растягивающих остаточных напряжений, загруженных в поверхностный слой посадочных поясков разрушающихся отверстий и аналогичный график, но для полей деформации (рис. 6).

Как уже отмечалось ранее, в ходе анализа литературы была подобрана эпюра остаточных напряжений, соответствующая тем операциям механической обработки, которые были применены при формообразовании проблемного

участка траверсы. Максимальное значение подобранной эпюры растягивающих остаточных напряжений соответствует +180 МПа (рис. 6). Данная эпюра была загружена в поверхностный слой проблемных отверстий конечно-элементной модели. Следующим шагом, с целью поиска оптимального режима дробеструйного упрочнения, производилась загрузка эпюры остаточных напряжений, формирующихся в поверхностном слое изделия при дробеструйном упрочнении [11-13]. В процессе проведения вычислений по конечно-элементной модели производилось варьирование максимального значения эпюры напряжений, формирующихся в процессе поверхностного пластического деформирования. По результатам расчётов были построены графики, аналогично графикам из рис. 6, с той разницей, что в процессе вычислений первичная эпюра распределения остаточных напряжений, формирующихся в процессе формообразующей механической обработки, оставалась без изменений, но изменялась эпюра остаточных напряжений, формирующихся при дробеструйной обработке. Ознакомиться с полученными результатами возможно на рис. 7.

Исходя из требуемой геометрической точности изготовления траверсы передней опоры,



**Рис. 5.** Распределение полей деформации в зонах исследуемых монтажных отверстий, где были загружены в поверхностный слой эпюры остаточных напряжений, с максимальными значениями: +50 МПа (а) и +150 МПа (б)

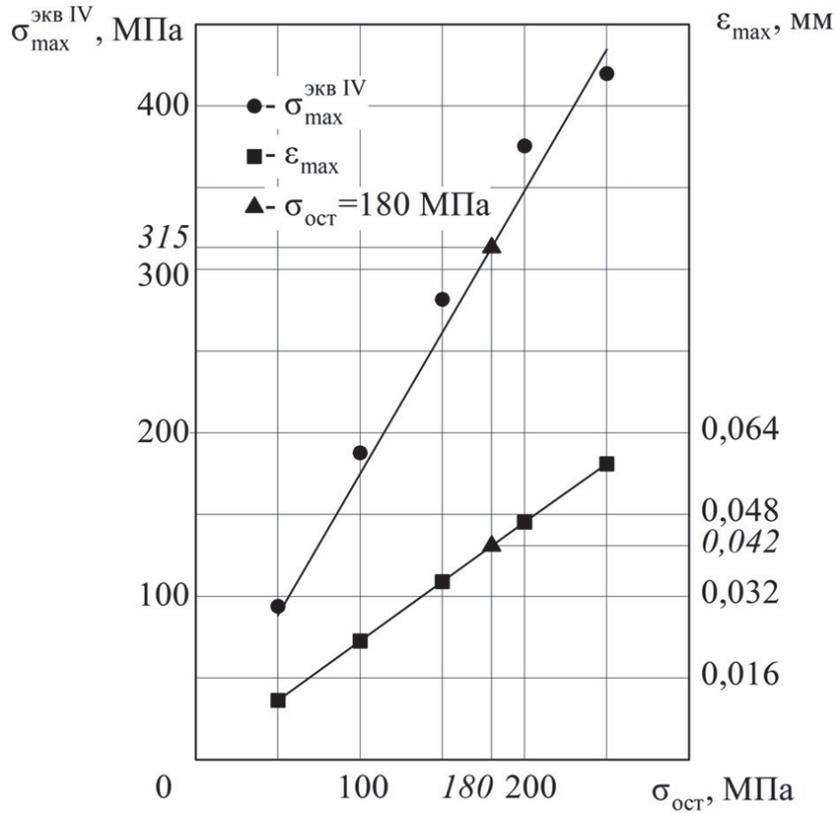


Рис. 6. Графики изменения максимальной величины эквивалентных напряжений и деформации, распределенных по проблемному участку траверсы в зависимости от пикового значения растягивающих остаточных напряжений, загруженных в поверхностный слой посадочных поясков разрушающихся отверстий

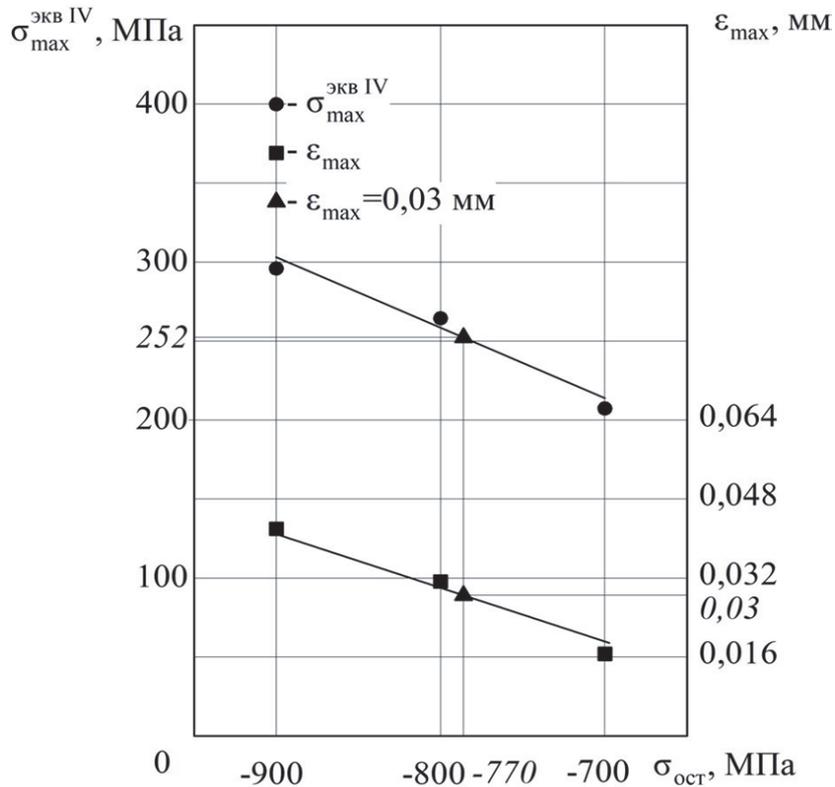


Рис. 7. Графики изменения максимальной величины эквивалентных напряжений и деформации, распределенных по проблемному участку траверсы в зависимости от пикового значения сжимающих остаточных напряжений, загруженных в поверхностный слой посадочных поясков разрушающихся отверстий

а также максимально возможного уровня сжимающих остаточных напряжений, был подобран оптимальный режим дробеструйного упрочнения. На рис. 7 показаны величины максимальных эквивалентных напряжений, максимальной деформации и максимальных сжимающих остаточных напряжений в проблемной зоне траверсы, соответствующие оптимальному режиму упрочнения, при котором рабочий ресурс детали возрастает до требуемого значения.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Использование расчётной методики, представленной в данной работе, позволило оптимизировать технологический процесс изготовления траверсы передней опоры, что повысило рабочий ресурс детали до требуемого значения. Важной особенностью представленной методики является возможность оценки напряжённо-деформированного состояния изделия как на этапе отдельно взятой технологической операции, так и в зависимости от совокупного влияния технологических операций, что означает возможность оценки напряжённо-деформированного состояния изделия в процессе его изменения от одной технологической операции к другой.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Акимов, В.М.* Основы надежности газотурбинных двигателей / В.М. Акимов. – М.: Машиностроение, 1981. – 207 с.
2. *Антонюк, В.Е.* Технологические возможности повышения точности изготовления дисков и валов / В.Е. Антонюк // *Технология машиностроения.* – 2005. – № 6. – С. 43-48.
3. *Овсенко, А.Н.* Технологические основы методов снижения остаточных деформаций и обеспечения качества обработки высоконагруженных деталей энергомашин: автореф. дис. ... докт. техн. наук: 05.02.08: защищена 01.02.06 / Овсенко Александр Николаевич. – М., 2006. – 32 с.
4. *Yong L., Wann G., Wenbin Z., Dongsheng L.* Review on residual stress and its effects on manufacturing of aluminium alloy structural panels with typical multi-process // *Chinese Journal of Aeronautics, Chinese Society of Aeronautics and Astronautics & Beihang University.* – 2023. – V. 36, no. 4. – P. 324-327.
5. *Campbell F.C.* Manufacturing Technology for Aerospace Structural Materials. Elsevier Science, 2006. – 616 p.
6. *Cerutti X, Mocellin K.* Influence of the machining sequence on the residual stress redistribution and machining quality: analysis and improvement using numerical simulations // *Int J Adv Manuf Technol.* – 2016. – V. 83. – No. 1. – P. 489-503.
7. *Evdokimov D.V., Skuratov D.L., Bukatj A.S.* Development of a Finite Element Models and Method for Determining Residual Stresses in the Workpiece after the End Milling Operation // *International Conference on Dynamics and Vibroacoustics of Machines (DVM).* – 2022. – P. 1-7.
8. *Евдокимов, Д.В.* Расчетное прогнозирование технологических остаточных деформаций лопаток ГТД на этапе конечного фрезерования / Д.В. Евдокимов, Д.Л. Скуратов, А.С. Букатый // *Известия Самарского научного центра Российской академии наук.* – 2022. – Т.24. – № 1. – С. 11-19
9. *Кравченко, Б.А.* Механизм формирования остаточных напряжений при свободном резании закаленных сталей / Б.А. Кравченко, В.Г. Круцило // *Обработка высокопрочных сталей и сплавов инструментами из сверхтвердых синтетических материалов: межвуз. (межвед.) тематич. сб. науч. тр.* – 1980. – №2. – С. 91-97.
10. *Li J.G., Wang S.Q.* Distortion caused by residual stresses in machining aeronautical aluminum alloy parts: recent advances // *Int J Adv Manuf Technol.* – 2017. – V. 89. – No. 1. – P. 997-1012.
11. *Букатый, С.А.* Прогнозирование технологических остаточных деформаций тонкостенных дисков после упрочнения методом поверхностного пластического деформирования / С.А. Букатый, А.П. Кондратов, А.С. Букатый // *Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета имени академика С.П. Королёва.* – 2006. № 2(10). – Ч.2. – С. 91-95.
12. *Букатый, С.А.* Энергетический метод определения рациональных режимов упрочнения тонкостенных и маложестких деталей ГТД поверхностным пластическим деформированием / С.А. Букатый, А.С. Букатый // *Авиационно-космическая техника и технология.* – 2009. – №10(67). – С. 45-49.
13. *Букатый, С.А.* Общий подход к определению остаточных деформаций деталей после упрочнения поверхностным и объемным пластическим деформированием / С.А. Букатый // *Повышение качества деталей машин пластическим деформированием: тез. докл. республ. науч.-техн. конф. Фрунзе, 1988.* – С. 88-90.

## DEVELOPMENT OF THE METHOD ON THE STRESS-STRAIN STATE ASSESSMENT OF PRODUCTS TAKING INTO ACCOUNT TECHNOLOGICAL HEREDITY

© 2023 D.V. Evdokimov<sup>1,2</sup>, A.A. Aleksencev<sup>1</sup>, A.S. Bukatyj<sup>1,2</sup>, R.M. Ahtamjanov<sup>2</sup>, D.A. Bychkov<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Samara National Research University, Samara, Russia

<sup>2</sup>JSC Aviaagregat, Samara, Russia

The article presents a technique that allows assessing the stress-strain state of products both at the stages of technological operations and upon completion of the manufacturing process. The technique is based on a finite element model, which makes it possible to obtain stress and strain fields depending on the loaded diagrams of residual stresses that are formed during the process of the technological operation under study. Thus, the developed technique can serve as an effective tool for optimizing technological operations, and hence the technological process as a whole. As an example, the paper considers the optimization of the technological process of the front support traverse of a domestic advanced aircraft. As a result of using the presented methodology, it turns out to determine the most advantageous modes of processing the problem area of the traverse, which made it possible to increase the working life of the part to the required value.

**Keywords:** Machining, residual stresses, strength, deformation, geometric accuracy, finite element analysis, crack formation.

DOI: 10.37313/1990-5378-2023-25-3-57-63

EDN: KUXEKK

### REFERENCES

1. Akimov, V.M. Osnovy nadezhnosti gazoturbinnih dvigatelej / V.M. Akimov. – M.: Mashinostroenie, 1981. – 207 s.
2. Antonyuk, V.E. Tekhnologicheskie vozmozhnosti povysheniya tochnosti izgotovleniya diskov i valov / V.E. Antonyuk // Tekhnologiya mashinostroeniya. – 2005. – № 6. – S. 43-48.
3. Ovseenko, A.N. Tekhnologicheskie osnovy metodov snizheniya ostatochnyh deformacij i obespecheniya kachestva obrabotki vysokonagruzhennyh detalej energomashin: avtoref. dis. ... dokt. tekhn. nauk: 05.02.08: zashchishchena 01.02.06 / Ovseenko Aleksandr Nikolaevich. – M., 2006. – 32 s.
4. Yong L., Wann G., Wenbin Z., Dongsheng L. Review on residual stress and its effects on manufacturing of aluminium alloy structural panels with typical multi-process // Chinese Journal of Aeronautics, Chinese Society of Aeronautics and Astronautics & Beihang University. – 2023. – V. 36, no. 4. – P. 324-327.
5. Campbell F.C. Manufacturing Technology for Aerospace Structural Materials. Elsevier Science, 2006. – 616 p.
6. Cerutti X, Mocellin K. Influence of the machining sequence on the residual stress redistribution and machining quality: analysis and improvement using numerical simulations // Int J Adv Manuf Technol. – 2016. – V. 83. – No. 1. – P. 489-503.
7. Evdokimov D.V., Skuratov D.L., Bukatyj A.S. Development of a Finite Element Models and Method for Determining Residual Stresses in the Workpiece after the End Milling Operation // International Conference on Dynamics and Vibroacoustics of Machines (DVM). – 2022. – P. 1-7.
8. Evdokimov, D.V. Raschetnoe prognozirovanie tekhnologicheskikh ostatochnyh deformacij lopatok GTD na etape koncevogo frezerovaniya / D.V. Evdokimov, D.L. Skuratov, A.S. Bukatyj // Izvestiya Samarskogo nauchnogo centra Rossijskoj akademii nauk. – 2022. – T.24. – № 1. – S. 11-19
9. Kravchenko, B.A. Mekhanizm formirovaniya ostatochnyh napryazhenij pri svobodnom rezanii zakalennyh stalej / B.A. Kravchenko, V.G. Krucilo // Obrabotka vysokoprochnyh stalej i splavov instrumentami iz sverhtverdyh sinteticheskikh materialov: mezhvuz. (mezhved.) tematich. sb. nauch. tr. – 1980. – №2. – S. 91-97.
10. Li J.G., Wang S.Q. Distortion caused by residual stresses in machining aeronautical aluminum alloy parts: recent advances // Int J Adv Manuf Technol. – 2017. – V. 89. – No. 1. – P. 997-1012.
11. Bukatyj, S.A. Prognozirovanie tekhnologicheskikh ostatochnyh deformacij tonkostennyh diskov posle uprochneniya metodom poverhnostnogo plasticheskogo deformirovaniya / S.A. Bukatyj, A.P. Kondratov, A.S. Bukatyj // Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo aerokosmicheskogo universiteta imeni akademika S.P. Korolyova. – 2006. № 2(10). – CH.2. – S. 91-95.
12. Bukatyj, S.A. Energeticheskij metod opredeleniya racional'nyh rezhimov uprochneniya tonkostennyh i malozhestkih detalej GTD poverhnostnym plasticheskim deformirovanijem / S.A. Bukatyj, A.S. Bukatyj // Aviacionno-kosmicheskaya tekhnika i tekhnologiya. – 2009. – №10(67). – S. 45-49.
13. Bukatyj, S.A. Obshchij podhod k opredeleniyu ostatochnyh deformacij detalej posle uprochneniya poverhnostnym i ob'emnym plasticheskim deformirovanijem / S.A. Bukatyj // Povyshenie kachestva detalej mashin plasticheskim deformirovanijem: tez. dokl. respubl. nauch.-tekhn. konf. Frunze, 1988. – S. 88-90.

Dmitry Evdokimov, Senior Project Engineer of JSC Aviaagregat, Senior Lecturer of the Material Resistance and Engine Production Technologies Departments of Samara National Research University.

E-mail: dmitry.evd.ssau@gmail.com

Artem Aleksencev, Post Graduate Student at the Engine Production Technologies Department of Samara National Research University. E-mail: artem2000samara@gmail.com

Aleksey Bukatyj, Doctor of Technics, Professor at the Material

Resistance Department of Samara National Research University, Head of the Technology Problems Department of JSC Aviaagregat. E-mail: bukatyj@inbox.ru

Ramil' Ahtamjanov, Head of the Department of Hydro Units of the Design Bureau of JSC Aviaagregat, Postgraduate Student of the Department of Strength of Materials, Samara University. E-mail: arm102bash@yandex.ru

Dmitry Bychkov, Senior Project Engineer of JSC Aviaagregat. E-mail: db2009@bk.ru

УДК 621.7.044.7

## ВОЗДУШНОЕ КАНАЛЬНОЕ ОХЛАЖДЕНИЕ ОДНОВИТКОВОГО ИНДУКТОРА ДЛЯ МАГНИТНО-ИМПУЛЬСНОЙ ОБРАБОТКИ МЕТАЛЛОВ

© 2023 В.Н. Самохвалов, Д.Г. Черников, Р.Ю. Юсупов

Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева,  
г. Самара, Россия

Статья поступила в редакцию 23.05.2023

В работе представлены результаты исследования эффективности охлаждения токопровода одновиткового индуктора для магнитно-импульсной обработки материалов, имеющего внутренний канал, воздухом низкой температуры от вихревой трубы, в том числе при использовании эжектора. Экспериментально полученные зависимости показывают, что наибольшая эффективность охлаждения и наибольшая интенсивность охлаждения токопровода одновиткового индуктора достигается при значениях  $\beta > 1$  (отношение площадей проходных сечений диафрагмы и сопла эжектора) при всех исследованных отношениях относительного диаметра диафрагмы вихревой трубы, при неизменной величине давления на ее входе. В результате исследований установлено, что канальное охлаждение токопровода одновиткового индуктора охлажденным воздухом от вихревой трубы обладает достаточно высокой эффективностью при высокой степени безопасности.

*Ключевые слова:* магнитно-импульсная обработка, индуктор, токопровод, охлаждение, вихревая труба, эжектор.

DOI: 10.37313/1990-5378-2023-25-3-64-71

EDN: KWKMSA

### ВВЕДЕНИЕ

При разряде батареи конденсаторов магнитно-импульсной установки (МИУ), в процессе высокоскоростного деформирования заготовок давлением импульсного магнитного поля, по скин-слою в материале токопровода индуктора протекает импульсный ток высокой плотности. Это приводит к выделению большого количества тепла от омического нагрева. Температура нагрева зависит, в первую очередь, от величины энергии разряда МИУ, а также от материала токопровода индуктора и обрабатываемой заготовки, размеров (диаметра) и геометрии токопровода индуктора, толщины стенки обрабатываемой заготовки, частоты разрядного тока [1]. Даже при небольших энергиях однократного разряда МИУ, скин-слой материала токопровода индуктора может нагреваться до температур порядка 100 °С и выше. При больших значениях энергий разряда, к концу процесса протекания импульсного тока после однократного разряда

МИУ температура в скин-слое материала токопровода может возрастать до 300 – 500 °С [2, 3]. Это приводит к последующему значительному нагреву всего объема материала токопровода индуктора и его изоляции.

При эксплуатации индукторов в условиях серийного производства изделий, нагрев материала токопровода, его витковой изоляции, а также корпусных элементов существенно влияет на допустимую частоту следования импульсов разряда и на ресурс работы индукторных систем. Для увеличения срока службы индукторов в условиях интенсивной эксплуатации их необходимо охлаждать.

### СУЩЕСТВУЮЩИЕ КОНСТРУКЦИЯ И МЕТОДЫ ОХЛАЖДЕНИЯ ИНДУКТОРОВ

Токопровод одновиткового индуктора для магнитно-импульсной обработки материалов необходимо монтировать в специальном корпусе, который, кроме высоких электрических показателей, должен иметь достаточную толщину – для механической прочности. Это затрудняет охлаждение токопровода индуктора за счет теплопередачи от токопровода на корпус и его последующего конвективного или принудительного внешнего охлаждения обдувом воздухом. Известны возможные конструкторские решения охлаждаемых одновитковых индукторов, например, одновитковый индуктор с отводом тепла с боковой, нерабочей поверхности токопровода [4].

*Самохвалов Владимир Николаевич, доктор технических наук, профессор кафедры производства летательных аппаратов и управления качеством в машиностроении. E-mail: samokhvalov.vn@ssau.ru*

*Черников Дмитрий Геннадьевич, кандидат технических наук, научный руководитель лаборатории прогрессивных технологических процессов пластического деформирования. E-mail: chernikov.dg@ssau.ru*

*Юсупов Ринат Юнусович, научный сотрудник лаборатории прогрессивных технологических процессов пластического деформирования.*

*E-mail: vvz@ssau.ru*

Охлаждение токопровода одновиткового индуктора происходит наиболее интенсивно при использовании охлаждающей среды проходящей по каналу в относительной близости к скин-слою. В индукторах с динамическим охлаждением, охлаждающей средой является специальная не электропроводная жидкость (деминерализованная вода, масло или др.), с широким диапазоном рабочих температур и имеющая низкое поверхностное натяжение (низкую вязкость). Такие индукторы необходимо охлаждать с применением внешнего устройства – водяного или масляного радиатора с вентилятором. Применение таких устройств требует высокой степени герметичности всей системы охлаждения индуктора, работающего в условиях больших динамических нагрузок. Нарушение герметичности соединений или разрушение токопровода индуктора в процессе разряда может приводить к серьезным последствиям.

Целью настоящей работы является исследование эффективности охлаждения токопровода одновиткового индуктора, имеющего внутренний канал, воздухом низкой температуры от вихревой трубы (ВТ), в том числе при использовании эжектора [5, 6]. В этом случае нарушение герметичности канала токопровода и выход ох-

лаждающей воздушной среды не нарушает работу МИУ с индуктором для магнитно-импульсной обработки.

### ОБОРУДОВАНИЕ И МЕТОДИКА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАНИЯ

Принципиальная схема экспериментального устройства показана на рис. 1. Выход охлажденного воздуха из вихревой трубы (1) через гибкие трубопроводы подключен к входному каналу токопровода индуктора (3). Выходной канал токопровода соединен с низконапорным входом эжектора (2) – это схема работы вихревой трубы с эжектором. При отсоединении выходного канала от эжектора и заглушенном низконапорном входе эжектора – схема работы вихревой трубы без эжектора.

В экспериментальном устройстве использовалась ВТ совмещенная с эжектором (рис. 2). Камера расширения вихревой трубы образована стальным корпусом (1), передним (2) и задним (3) фланцами. На заднем фланце (3) выполнен щелевой развихритель потока. К корпусу (1) фланцем (2) плотно прижата улитка (4) закручивающего соплового входа, толщиной 2,5 мм, профилированная по спирали Архимеда. Внутренний диаметр цилиндрической камеры рас-

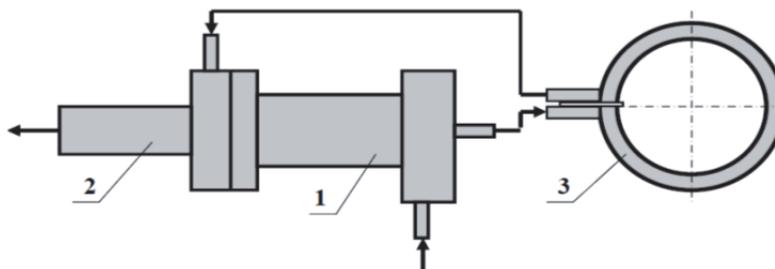


Рис. 1. Принципиальная схема экспериментального устройства:  
1 – вихревая труба, 2 – эжектор, 3 – охлаждаемый токопровод одновиткового индуктора

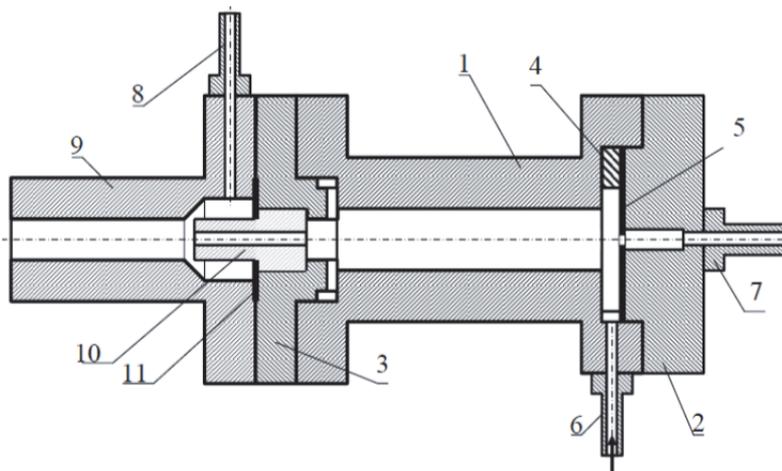


Рис. 2. Схема вихревой трубы с встроенным эжектором:  
1 – камера расширения ВТ, 2 – передний фланец ВТ, 3 – задний фланец ВТ с развихрителем потока, 4 – закручивающее устройство (улитка), 5 – сменная диафрагма; 6 – входной штуцер ВТ, 7 – выходной штуцер охлажденного воздуха, 8 – входной (низконапорный) штуцер эжектора, 9 – корпус эжектора, 10 – сменное сопло эжектора (выход нагретого воздуха из ВТ), 11 – шайба

ширения ВТ  $D$  равен 10 мм, а ее длина – 76 мм. Диаметры проходных отверстий штуцеров равны 5 мм. Диаметр смесительной камеры эжектора (9)  $D_k$  равен 8 мм, а ее длина – 80 мм.

Были использованы сменные диафрагмы (5), изготовленные из нержавеющей стали толщиной 0,25 мм, с диаметром отверстия  $d$ , равном 3, 4, 4,5 и 5 мм. Таким образом относительный диаметр диафрагмы ВТ  $d_{до} = d/D$  в экспериментах изменялся от 0,3 до 0,5. Применялись сменные сопла эжектора (10) с диаметром проходного отверстия  $D_c$ , равном 2,5; 3; 3,5; 4; 4,5; 5 и 6 мм.

Оценка эффективности воздушного канального охлаждения токопровода индуктора, при различных параметрах работы вихревой трубы и эжектора, была выполнена на модели одновиткового индуктора «на обжим» с внутренним диаметром 60 мм (рис. 3).

Охлаждаемый открытый токопровод одновиткового индуктора изготовлен из медной трубки диаметром 8 мм с толщиной стенки 1 мм. Для повышения контрастности теплового поля и точности измерения температур при работе тепловизора, поверхность токопровода была предварительно зачернена. Индуктор через токоподводы подключался к источнику постоянного тока и нагревался до заданной температуры поверхности токопровода. Постоянство первоначальной температуры нагрева токопровода (равенство нагрева и конвективного и лучевого теплоотвода) во всех экспериментах, до включения вихревой трубы, обеспечивалось подбором силы тока с использованием ЛАТРа.

Температура охлажденного воздуха на выходе из вихревой трубы  $T_n$  и после выхода из канала индуктора  $T_k$  измерялась электронными термометрами Digital Thermometer Mastech MS6500 с применением термопар. Спай термопар размещался в центре резиновой трубки. Температура нагрева поверхности токопрово-

да индуктора до включения вихревой трубы, а также после стабилизации температуры на поверхности токопровода при его охлаждении протекающим внутри трубки воздухом, измерялась с применением тепловизора FLIR SC7000. Ось объектива тепловизора была нормальна плоскости токопровода индуктора. Индуктор был жестко зафиксирован относительно тепловизора на расстоянии 1,2 м. Для проведения детального анализа температур, получаемых с тепловизора, и построения графиков нагрева и охлаждения выбранных зон и точек на поверхности токопровода применялась программа ThermoCAM Resercher Professional 2.8 SR-1. Измерение температуры, при всех режимах работы ВТ с эжектором и без эжектора, производилось в трех сечениях (I, II, III), а также дополнительно в точках  $T_1 - T_5$  на середине поверхности токопровода (И) индуктора в этих сечениях (рис. 4).

Рандомизированные эксперименты проводились при постоянном давлении сжатого воздуха на входе в вихревую трубу  $P = 0,6$  МПа, поддерживаемым с помощью редуктора. Варьируемыми факторами были диаметр отверстия диафрагмы  $d$  (на «холодном» выходе ВТ) и диаметр отверстия сопла  $D_c$ , выполняющего одновременно роль диффузора, на «горячем» выходе ВТ. Это позволяло изменять относительный весовой расход холодного потока:

$$\mu = G_x / G, \quad (1)$$

где  $G$  – весовой расход сжатого воздуха на входе ВТ,  $G_x$  – расход холодного потока.

При постоянном давлении и температуре воздуха  $T_0$  на входе ВТ это позволяло изменять величину снижения температуры охлажденного потока  $\Delta T_x = T_x - T_0$ , обусловленную вихревым эффектом.

Варьирование диаметром отверстия сопла  $D_c$  (10), при постоянном диаметре смесительной

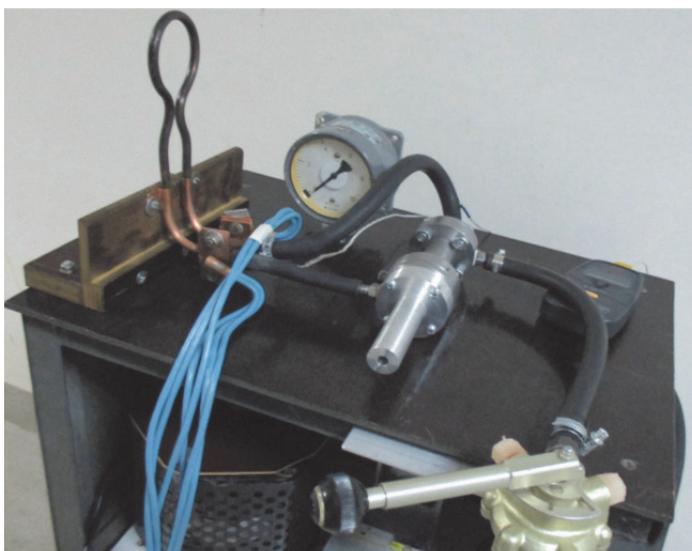
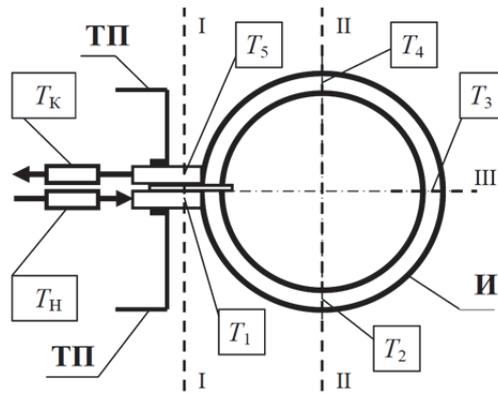


Рис. 3. Тепловой стенд с моделью охлаждаемого одновиткового индуктора



**Рис. 4.** Точки измерения температуры воздуха в трубопроводах и на поверхности модели охлаждаемого одновиткового индуктора: И – индуктор (токопровод), ТП – токоподводы индуктора

камеры  $D_k$  эжектора (9), позволяло также изменять величину основной геометрической характеристики эжектора  $m$ :

$$m = \frac{F_k}{F_c} = \frac{D_k^2}{D_c^2}, \quad (2)$$

где  $F_k$  – площадь сечения камеры смешения,  $F_c$  – площадь сечения сопла активного потока

При увеличении  $m$  растет величина коэффициента эжекции [7]:

$$k = G_2/G_1, \quad (3)$$

где объем  $G_1$  – расход эжектирующего потока,  $G_2$  – объем эжектируемого газа.

В проведенных экспериментах:  $G_1$  – расход «горячего» воздуха из ВТ,  $G_2$  – объем охлаждающего воздуха из канала токопровода индуктора.

Переменной геометрической характеристикой используемого устройства  $\beta$  является отношение площадей проходных сечений диафрагмы (охлажденный поток) и сопла эжектора, выполняющего роль диффузора ВТ (подогретый поток):

$$\beta = \frac{F_d}{F_c} = \frac{d^2}{D_c^2}, \quad (4)$$

В качестве показателя эффективности охлаждения принята величина снижения средней температуры токопровода индуктора  $\Delta T_{xc}$ , определяемая на основе измерений температуры в пяти точках на поверхности токопровода, при достижении теплового равновесия после включения вихревой трубы:

$$\Delta T_{xc} = T_0 - \frac{T_1 + \dots + T_5}{5}, \quad (5)$$

В качестве показателя интенсивности охлаждения  $\Omega$  взята скорость охлаждения, т.е. отношение величины снижения средней температуры токопровода  $\Delta T_{xc}$  к времени достижения теплового равновесия в охлажденном состоянии, от момента включения вихревой трубы  $\Delta \tau$ :

$$\Omega = \Delta T_{xc} / \Delta \tau, \text{ [}^\circ\text{C/мин]}, \quad (6)$$

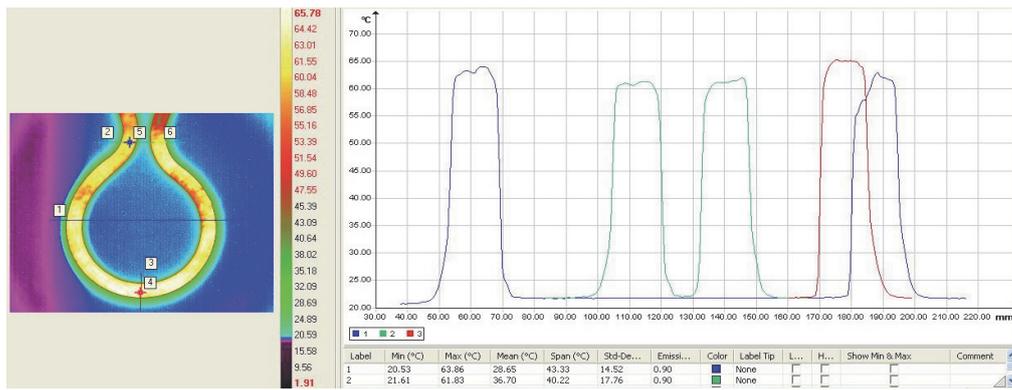
### РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Все опыты проводились после достижения установившейся температуры в точке 3 (рис. 4) токопровода  $T_0 = 65^\circ\text{C}$ , при постоянно включенном источнике питания и неизменной величине силы тока. С применением тепловизора производилось измерение установившейся температуры нагрева токопровода в контрольных точках на его поверхности (рис. 5, а).

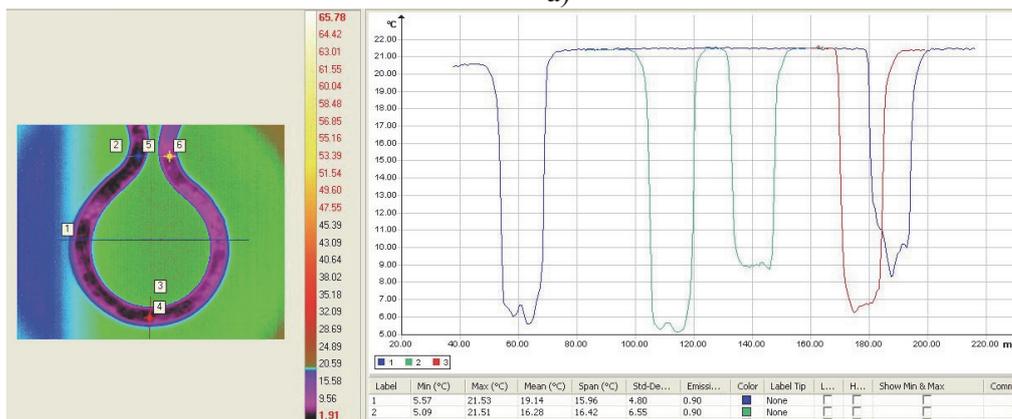
Затем, без отключения питания индуктора, запускалась вихревая труба. Измерялась начальная температура воздуха на входе в токопровод  $T_n$ . Время выхода вихревой трубы на номинальный режим работы от момента подачи сжатого воздуха составляет 1 – 2 секунды [8]. Это позволяло измерять время до момента стабилизации температуры в точке 3 токопровода (по данным с тепловизора) в процессе его охлаждения при постоянной холодопроизводительности ВТ. При стабилизации температуры в контрольных точках (равенства нагрева и общего теплоотвода) фиксировалось время  $\Delta \tau$ . Производилось измерение температур охлажденного токопровода в контрольных сечениях и точках (рис. 5, б). По электронным термометрам снимались показания температуры воздуха в трубках на входе и выходе в токопровод ( $T_{nx}$  и  $T_{kx}$ ). Одновременно с помощью тепловизора регистрировалась общая картина теплового поля на поверхности токопровода индуктора.

Затем вихревая труба отключалась и следующий опыт производился после достижения установившейся температуры  $T_0 = 65^\circ\text{C}$  в точке (3) токопровода. Источник электрического нагрева токопровода стабильно работал в течении всего периода проведения экспериментов, без отключения между опытами.

На рис. 6 показана зависимость эффективности охлаждения  $\Delta T_{xc}$  от величины  $\beta$ , при различных относительных диаметрах диафрагмы  $d_{до}$ , при работе вихревой трубы с эжектором.



а)



б)

Рис. 5. Температура токопровода индуктора в контрольных сечениях:  
а) до включения вихревой трубы,  
б) при стабилизации температуры после включения вихревой трубы

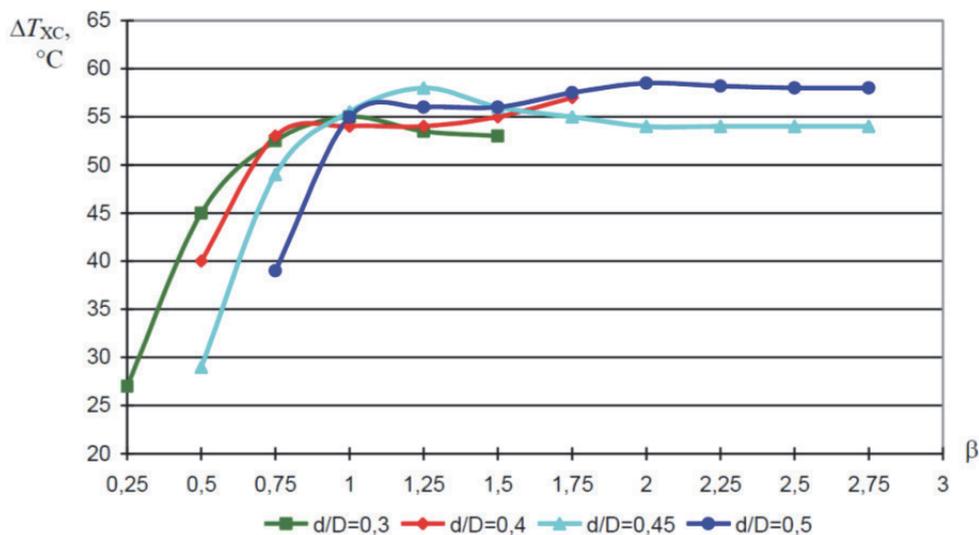


Рис. 6. Зависимость эффективности охлаждения токопровода  $\Delta T_{xc}$  от величины относительной площади  $\beta$  при изменении относительного диаметра диафрагмы ВТ

С учетом длительности процесса охлаждения токопровода до стабилизации его температуры (рис. 5, б) получены зависимости интенсивности охлаждения токопровода  $\Omega$  к времени достижения теплового равновесия от величины  $\sigma$ , при различных значениях  $d_{до}$  при работе вихревой трубы с эжектором (рис. 7).

Для оценки эффективности работы вихревой трубы с эжектором и без эжектора (с осевым диффузором) были проведены эксперименты при относительном диаметре диафрагмы  $d_{до}=0,45$ , при котором достигается максимальный эффект охлаждения вихревой трубы без эжектора [5]. Результаты представлены на рис. 8.

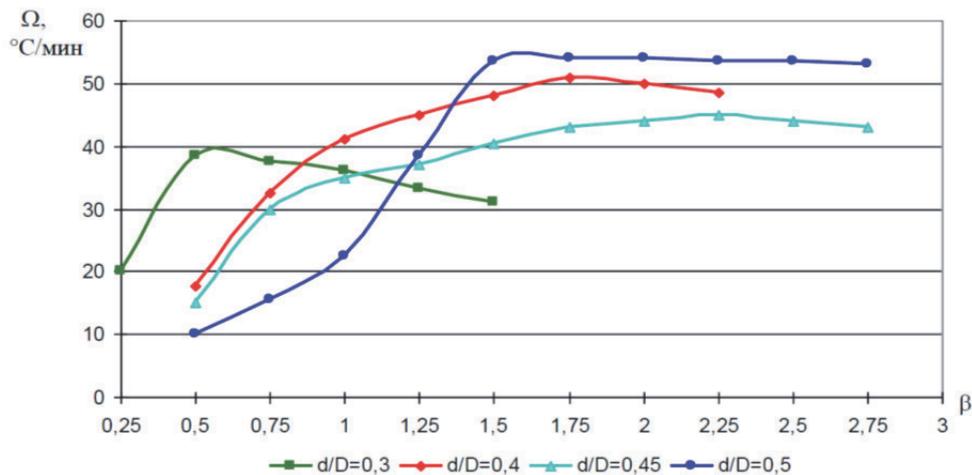


Рис. 7. Зависимость интенсивности охлаждения токопровода Ω от величины относительной площади β при изменении относительного диаметра диафрагмы ВТ

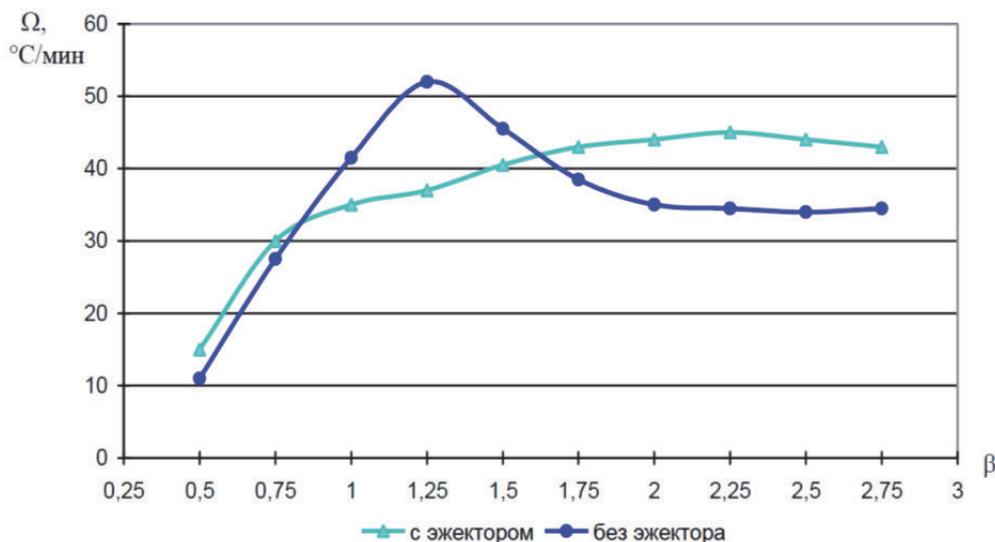


Рис. 8. Сравнение эффективности охлаждения токопровода одновиткового индуктора Ω при работе ВТ с эжектором и без эжектора

### ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Экспериментально полученные зависимости (рисунки 6 и 7) показывают, что наибольшая эффективность охлаждения (снижение средней температуры  $\Delta T_{xc}$ , °С) и наибольшая интенсивность охлаждения (скорость охлаждения Ω, °С/мин) токопровода одновиткового индуктора достигается при значениях  $\beta > 1$  (отношение площадей проходных сечений диафрагмы и сопла эжектора) при всех исследованных отношениях относительного диаметра диафрагмы ВТ  $d_{до}$ , при неизменной величине давления на входе ВТ.

Относительно низкая эффективность и интенсивность охлаждения токопровода одновиткового индуктора при малых значениях β обусловлена снижением относительного весового расхода холодного потока μ ВТ при увеличении площади проходного сечения диффузора ВТ (сопла эжектора).

Наибольшее снижение температуры токопровода (рис. 6) получено при  $d_{до} = 0,5$ , что больше эффективного значения  $d_{до} = 0,45$  для случая работы ВТ без эжектора [5]. За счет эффекта эжектирования увеличивается степень расширения газа π в вихревой трубе (отношение полного давления сжатого газа к давлению в холодном потоке). С ростом степени расширения растет эффект охлаждения [5]. Это, очевидно, приводит к увеличению наиболее эффективного значения  $d_{до}$ .

Относительное постоянство величин  $\Delta T_{xc}$  и Ω при изменении β в исследованном диапазоне от 1 до 2,25 очевидно обусловлено тем, что при увеличении геометрической характеристики  $m$  эжектора (вследствие уменьшения  $D_c$ ) растет коэффициент эжекции. Увеличивается подсос воздуха из ВТ. Увеличенный объем прокачиваемого охлаждающего воздуха компенсирует уменьшение температуры охлажденного воздуха на вы-

ходе ВТ, обусловленное ростом относительного диаметра диафрагмы  $d_{до}$  при увеличении  $\beta$ . Как показано в [5], при увеличении степени расширения более  $\pi = 3 - 6$  темп роста эффекта охлаждения в ВТ уменьшается и при больших значениях  $\pi$  за счет этого не наблюдается значительного прироста эффекта охлаждения. Наибольшая скорость охлаждения при работе вихревой трубы с эжектором получена при  $\beta > 1,5$  (рис. 7).

Эксперименты по сравнительной оценке эффективности системы охлаждения с вихревой трубой с эжектором и без эжектора (рис. 8) показали, что применение эжектора эффективно при  $\beta > 1,6$ . Наиболее эффективное использование эжектора для утилизации энергии горячего потока наблюдается при  $\pi = 3...6$  и  $\mu = 0,3...0,4$  [5], а как показано там же при работе вихревой трубы без эжектора максимум эффекта охлаждения достигается при  $\mu \approx 0,25$ . Очевидно, что при работе использованной вихревой трубы с эжектором при  $\beta = 1,6 - 2,75$  выполняется условие  $\pi = 3...6$  и  $\mu = 0,3...0,4$ . Это обеспечивает высокую эффективность используемого охлаждающего устройства в этом диапазоне величины  $\beta$ . При  $\beta = 1,25$ , очевидно реализуется  $\mu \approx 0,25$ , т.к. достигается максимум эффекта охлаждения токопровода одновиткового индуктора той же вихревой трубой, но без эжектора.

### ВЫВОДЫ

Экспериментально полученные результаты позволяют сделать вывод, что каналное охлаждение токопровода одновиткового индуктора охлажденным воздухом от вихревой трубы обладает достаточно высокой эффективностью при высокой степени безопасности.

С целью повышения эффективности охлаждения токопровода одновиткового индуктора работу ВТ с эжектором необходимо вести при больших значениях отношения площадей проходного сечений диафрагмы ВТ и сопла эжектора ( $\beta = 1,6 - 2,75$ ).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Желтков, В. И. Методика проектирования температурных условий работы индукторов для обжима при магнитно-импульсной обработке металлов / В.И. Желтков, А.Е. Киреева, В.Д. Кухарь // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. – 2009. – № 2-2. – С. 79-83.
2. Барвинок, В.А. Исследование тепловых явлений в индукторных системах при магнитно-импульсной обработке / В.А. Барвинок, А.Н. Кирилин, В.П. Самохвалов, В.М. Вершигоров // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2008. – № 5. – С. 95-99.
3. Барвинок, В.А. Экспериментальные исследования тепловых полей в индукторных системах при магнитно-импульсной штамповке / В.А. Барвинок, Ю.Е. Паламарчук, А.Н. Кирилин [и др.] // Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета им. академика С.П. Королёва. – 2008. – № 1(14). – С. 103-110.
4. Глушечков, В.А. Основные направления совершенствования индукторов для магнитно-импульсной обработки. Повышение их прочности и ресурса / В.А. Глушечков, И.В. Зверев, В.И. Песоцкий // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. – 2021. – Т. 23. – № 6(104). – С. 67-71. – DOI 10.37313/1990-5378-2021-23-6-67-71
5. Меркулов, А.П. Вихревой эффект и его применение в технике / А.П. Меркулов. – Москва: Машиностроение, 1969. – 183 с.
6. Пиралишвили, Ш.А. Вихревой эффект. Эксперимент, теория, технические решения / Ш. А. Пиралишвили, В. М. Поляев, М. Н. Сергеев / Под. ред. А. И. Леонтьева. – М.: УНПЦ «Энергомаш», 2000. – 412 с.
7. Александров, В.Ю. Оптимальные эжекторы (теория и расчет) / В.Ю. Александров, К.К. Климовский. – Москва: Машиностроение, 2012. – 136 с.
8. Самохвалов, В.Н. Распределение температуры на оси камеры расширения при различных схемах работы вихревой трубы / В.Н. Самохвалов // Письма в журнал технической физики, 2021. – Т. 47. – № 19. – С. 41-43. – DOI: 10.21883/PJTF.2021.19.51513.18786.

### AIR CHANNEL COOLING OF ONE-TURN INDUCTOR FOR ELECTROMAGNETIC METAL FORMING

© 2023 V.N. Samokhvalov, D.G. Chernikov, R.Yu. Yusupov

Samara National Research University, Samara, Russia

This paper evaluates the efficiency of cooling a coil, fitted with an internal channel, for a one-turn inductor for electromagnetic metal forming, using a low-temperature air from a vortex tube, with and without an ejector. The experiment data shows that at constant pressure on the vortex tube entrance the highest cooling efficiency and intensity are reached at values  $\beta > 1$ , where  $\beta$  is an ejector diaphragm to nozzle section area relation. The results show that air channel cooling of a coil for a one-turn inductor using air from vortex tube has considerably high efficiency and high safety parameters.

**Keywords.** Electromagnetic metal forming, inductor, inductor coil, cooling, vortex tube, ejector.

DOI: 10.37313/1990-5378-2023-25-3-64-71

EDN: KWKMSA

## REFERENCES

1. Zheltkov, V. I. Metodika proektirovaniya temperaturnyh uslovij raboty induktorov dlya obzhima pri magnitno-impul'snoj obrabotke metallov / V.I. Zheltkov, A.E. Kireeva, V.D. Kuhar' // Izvestiya Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Tekhnicheskie nauki. – 2009. – № 2-2. – S. 79-83.
2. Barvinok, B.A. Issledovanie teplovyh yavlenij v induktornyh sistemah pri magnitno-impul'snoj obrabotke / B.A. Barvinok, A.N. Kirilin, V.P. Samohvalov, V.M. Vershigorov // Problemy mashinostroeniya i avtomatizacii. – 2008. – № S. – S. 95-99.
3. Barvinok, B.A. Eksperimental'nye issledovaniya teplovyh polej v induktornyh sistemah pri magnitno-impul'snoj shtampovke / V.A. Barvinok, YU.E. Palamarchuk, A.N. Kirilin [i dr.] // Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo aerokosmicheskogo universiteta im. akademika S.P. Korolyova. – 2008. – № 1(14). – S. 103-110.
4. Glushchenkov, V.A. Osnovnye napravleniya sovershenstvovaniya induktorov dlya magnitno-impul'snoj obrabotki. Povyshenie ih prochnosti i resursa / V.A. Glushchenkov, I.V. Zverev, V.I. Pesockij // Izvestiya Samarskogo nauchnogo centra Rossijskoj akademii nauk. – 2021. – T. 23. – № 6(104). – S. 67-71. – DOI 10.37313/1990-5378-2021-23-6-67-71
5. Merkulov, A.P. Vihrevoj effekt i ego primenenie v tekhnike /, A.P. Merkulov. – M.: Mashinostroenie, 1969. – 183 s.
6. Piralishvili, Sh.A. Vihrevoj effekt. Eksperiment, teoriya, tekhnicheskie resheniya/ SH. A. Piralishvili, V. M. Polyayev, M. N. Sergeev / Pod. red. A. I. Leont'eva. – M.: UNPC «Energomash», 2000. – 412 s.
7. Aleksandrov, V.Yu. Optimal'nye ezhektory (teoriya i raschet) / V.Yu. Aleksandrov, K.K. Klimovskij. – Moskva: Mashinostroenie, 2012. – 136 s.
8. Samohvalov, V.N. Raspredelenie temperatury na osi kamery rasshireniya pri razlichnyh skemah raboty vihrevoj trubyy / V.N. Samohvalov // Pis'ma v zhurnal tekhnicheskoy fiziki. – 2021. – T. 47. – № 19. – S. 41–43. – DOI: 10.21883/PJTF.2021.19.51513.18786.

---

*Vladimir Samokhvalov, Doctor of Technical Sciences, Professor of Department of Aircraft Production and Quality Control in Mechanical Engineering.*

*E-mail: samokhvalov.vn@ssau.ru*

*Dmitrii Chernikov, Candidate Degree in Engineering, Associate Professor of Department of Metal Forming, Head of Laboratory of Advanced Technological Processes of Plastic Deformation (SRL-41) of Samara University.*

*E-mail: chernikov.dg@ssau.ru*

*Rinat Yusupov, Researcher of Laboratory of Advanced Technological Processes of Plastic Deformation (SRL-41) of Samara University. E-mail: vvz@ssau.ru*

УДК 539.4.014.13

## РАСЧЁТНОЕ ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ОСТАТОЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ ПРИ ИЗГОТОВЛЕНИИ ДЕТАЛЕЙ, ПОДВЕРГАЕМЫХ УПРОЧНЕНИЮ ПОВЕРХНОСТНЫМ ПЛАСТИЧЕСКИМ ДЕФОРМИРОВАНИЕМ

© 2023 А.С. Букатый<sup>1,2</sup>, Д.В. Евдокимов<sup>1,2</sup>, Д. А. Бычков<sup>2</sup>, Shudjairi Marwan<sup>1</sup>, А.С. Сараев<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва,  
г. Самара, Россия

<sup>2</sup>АО «Авиаагрегат», г. Самара, Россия

Статья поступила в редакцию 15.05.2023

Обеспечение геометрической точности особо ответственных деталей является актуальной задачей предприятий авиационной отрасли. Лопатки газотурбинных двигателей являются особо ответственными и технологически сложными деталями. Как правило, поверхностному дробеструйному упрочнению подвергаются замковые соединения лопаток, а также перо. Остаточные напряжения являются следствием появления технологических остаточных деформаций. Именно остаточные деформации, вызванные действием остаточных напряжений, в большинстве случаев являются причиной брака. Таким образом, разработка научно обоснованных подходов к моделированию остаточных напряжений и расчёту технологических остаточных деформаций является актуальной задачей. В работе изложен подход, позволяющий на стадии механической обработки учитывать деформации, которые могут быть получены на заключительных этапах изготовления деталей после упрочнения поверхностным пластическим деформированием. Подход основан на предварительном расчётном прогнозировании технологических остаточных деформаций от действия остаточных напряжений на основе аналитических и конечно-элементных методов. Реализация подхода показана на примере лопатки компрессора газотурбинного двигателя, подвергаемой упрочнению дробеструйной обработкой по всей поверхности детали.

*Ключевые слова:* остаточные деформации, остаточные напряжения, технологические допуски, дробеструйное упрочнение, моделирование.

DOI: 10.37313/1990-5378-2023-25-3-72-76

EDN: KYZ OCD

### ВВЕДЕНИЕ

Важной задачей авиадвигателестроения является повышение надёжности и долговечности изделий. Сложность указанной задачи заключается в обеспечении таких параметров как характеристики сопротивления усталости и соответствие геометрических размеров и формы деталей конструкторской документации.

*Букатый Алексей Станиславович, доктор технических наук, начальник лаборатории технологических проблем АО «Авиаагрегат», профессор кафедры сопротивления материалов Самарского университета. E-mail: bukaty@inbox.ru*

*Евдокимов Дмитрий Викторович, кандидат технических наук, ведущий инженер АО «Авиаагрегат», доцент кафедр технологий производства двигателей и сопротивления материалов Самарского университета. E-mail: dmitry.evd.ssau@gmail.com*

*Бычков Дмитрий Анатольевич, ведущий инженер АО «Авиаагрегат». E-mail: db2009@bk.ru*

*Марван Шуджаири, аспирант кафедры сопротивления материалов Самарского университета. E-mail: sopromat@ssau.ru*

*Сараев Алексей Сергеевич, аспирант кафедры сопротивления материалов Самарского университета. E-mail: sasss84@yandex.ru*

Одним из наиболее распространённых методов повышения сопротивления усталости является упрочнение методами поверхностного пластического деформирования (ППД). Назначение оптимальных режимов обработки необходимо ввиду того, что упрочняемые детали подвержены короблению от воздействия остаточных напряжений (ОН), создаваемых в поверхностном слое материала.

Изменение размеров и формы деталей при упрочнении на режимах, обеспечивающих наибольший уровень сопротивления усталости, зачастую превышает установленные технологические допуски. Поэтому целью данной работы является разработка методов прогнозирования технологических остаточных деформаций (ТОД) и методик назначения режимов обработки. Применение расчётных методик прогнозирования ТОД на стадии назначения технологических допусков позволяет учесть остаточные деформации деталей после упрочнения и получить соответствие их размеров установленным требованиям, а также компенсировать возможные отклонения, получаемые на предыдущих этапах технологического процесса.

**МЕТОДИКА ПРОГНОЗИРОВАНИЯ  
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ОСТАТОЧНЫХ  
ДЕФОРМАЦИЙ**

В основу методики прогнозирования ТОД положена удельная энергия упругой деформации поверхностного слоя лопаток ГТД и энергетический метод назначения оптимальных режимов упрочнения [1], базирующийся на энергии поверхностного пластически деформированного слоя деталей. В качестве начальных напряжений (НН)  $\sigma_n$  в расчётах используются эквивалентные по энергии начальные напряжения, распределённые равномерно по толщине поверхностного слоя. Эквивалентные начальные напряжения позволяют без потери точности значительно упростить расчёты остаточных деформаций, что особенно важно при прогнозировании коробления деталей сложной формы, таких как диски и лопатки ГТД.

Учёт рассчитанных остаточных деформаций, получаемых после упрочнения, необходимо осуществлять на стадии механической обработки. В качестве примера рассмотрена лопатка компрессора газотурбинного двигателя, подвергаемая упрочнению пневмодробеструйной обработкой стальными микрошариками. Основными деформациями, возникающими на заключительной стадии изготовления лопаток ГТД при упрочнении дробеструйной обработкой, являются изгиб пера лопатки и поворот поперечных сечений. Предварительно рассчитывается уровень деформаций, после чего производится корректировка исходных технологических допусков для упреждения изменения размеров и формы лопаток от последующей упрочняющей обработки. Важным преимуществом предложенного метода является возможность его применения в серийном производстве. Упреждение изменения геометрии лопаток позволяет проводить последующую упрочняющую обработку на одном выбранном режиме, обеспечивающем необходимый уровень предела выносливости.

Расчёт остаточных деформаций деталей может осуществляться с помощью аналитических методов, а также с использованием конечно-элементных моделей упрочняемых деталей. Особенностью аналитических методов является небольшая трудоёмкость и простота расчётных схем, отображающих совокупность силовых факторов от воздействия ОН в материале поверхностного слоя детали. Повышение точности расчётов достигается путём использования НН, определяемых методом последовательных приближений из эпюры ОН, полученной с помощью электролитического травления [2]. Результаты предварительных исследований и расчётов показывают, что для деталей, у которых отношение толщины упрочнённого поверхностного слоя к

толщине детали  $a/h \leq 0,05$  различие между ОН и НН незначительно и им можно пренебречь.

При прогнозировании ТОД лопаток компрессора ГТД после упрочнения на заданных режимах, необходимо максимально повысить точность расчётов, по результатам которых будет осуществлена корректировка исходных допусков. Повышение точности разработанного метода и упрощение расчётов достигается путём введения понятия удельной энергии поверхностного пластически деформированного слоя  $a$  [3]. Использование в расчётах постоянных по толщине слоя эквивалентных начальных напряжений

$$\sigma_3 = \sqrt{\frac{1}{a} \int_0^a \sigma_n^2 d\xi}, \quad (1)$$

позволяет повысить точность как аналитических, так и конечно-элементных расчётов.

Лопатки ГТД с небольшими углами закрутки поперечных сечений относятся к деталям типа «стержень», так как их поперечные размеры значительно меньше длины. Для оценки возможных ТОД лопаток используются следующие выражения для определения удлинения и прогибов:

$$\begin{aligned} \Delta l &= -\sigma_3 a \int_0^l \frac{S}{EF} dz, \\ f_x &= \sigma_3 a \int_0^l \frac{(l-z)}{EI_y} \oint_S x ds dz, \\ f_y &= \sigma_3 a \int_0^l \frac{(l-z)}{EI_x} \oint_S y ds dz, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $F, I_x, I_y$  – площадь и осевые моменты инерции поперечных сечений лопатки;  $l$  – длина лопатки,  $S$  – длина контура поперечных сечений лопатки,  $\Delta l, f_x, f_y$  – удлинение и прогибы лопатки, подвергаемой упрочнению. Выражения для силовых факторов (осевой силы  $N_z$  и изгибающих моментов  $M_\eta, M_\xi$ ) имеют вид:

$$\begin{aligned} N_z &= -\sigma_3 a S, \\ M_\eta &= -\sigma_3 a \oint_S \xi ds, \\ M_\xi &= -\sigma_3 a \oint_S \theta r^2 ds. \end{aligned} \quad (3)$$

Аналитический метод прогнозирования ТОД применяется в расчётах, предполагающих равномерный уровень ОН по всей поверхности лопатки. Этот метод позволяет осуществлять быструю оценку ТОД по представленной расчётной схеме (рис. 1).

В производственных условиях обеспечение геометрической точности лопаток на заключительной стадии изготовления путём смещения исходных технологических допусков требует повышенной точности расчётов. Существую-

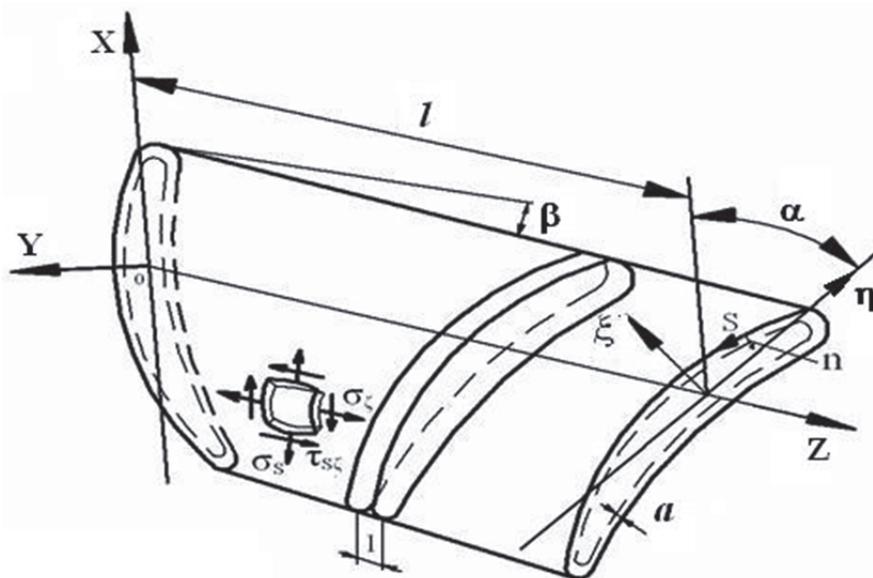


Рис. 1. Система координат естественно закрученного стержня

щие методы, положенные в основу исследований остаточных напряжений и деформаций, основаны на различных теориях и допущениях, позволяющих с определённой точностью моделировать ОН в поверхностном слое деталей. При этом в расчётах может быть использована интегральная величина ОН [4], интегральная величина начальных напряжений НН [5], эквивалентные НН [1]. Усложнение конструкции деталей, технологических процессов и оборудования [6] привело к необходимости совершенствования методов моделирования исследуемых процессов, в результате чего возникла необходимость в использовании численных методов расчёта.

Моделирование НДС деталей с использованием конечно-элементного метода позволило значительно повысить точность вычислений. При этом, помимо уже упомянутых величин напряжений, средства МКЭ позволяют осуществлять загрузку заданной эпюры напряжений в материал поверхностного слоя модели и провести дальнейшие расчёты, моделирующие перераспределение напряжений. Итогом конечно-элементного анализа являются результирующие остаточные напряжения и остаточные деформации детали, используемые при корректировке исходных технологических допусков. Оценочные расчёты позволяют прогнозировать деформации пера лопатки после упрочнения на

двух режимах – минимальном и максимальном, возможных для данной лопатки.

В качестве примера приведена лопатка длиной 120 мм. Построение конечно-элементной модели осуществлялось в системе ANSYS. Упрочнённый поверхностный слой был смоделирован в виде отдельно выделенного объёма, толщина которого равна толщине залегания НН. Объёмы соединены операцией Glue. Для разметки основного объёма лопатки использовались элементы Solid 45. Упрочнённый поверхностный слой размечен элементами Solid-Shell 190. В соответствии с энергетическим методом назначения оптимальных режимов упрочнения в поверхностный слой загружались эквивалентные НН, постоянные по толщине поверхностного слоя, после чего в результате расчёта были получены деформации лопатки и остаточное напряжённое состояние поверхностного слоя.

### РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЁТНОГО ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ОСТАТОЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ

Результаты расчётов представлены в таблице 1, где  $\sigma$  – эквивалентные НН, моделируемые в поверхностном слое лопатки,  $\Delta l$  – удлинение лопатки,  $f$  – изменение прогиба,  $\phi$  – изменение угла закрутки пера лопатки. Деформации ко-

Таблица 1. Деформации лопатки газотурбинного двигателя

$\sigma$ , МПа	$\Delta l$ , мм	$f$ , мм	$\phi$ , рад
300	0,3166735	0,317115	0,003216
600	0,039322	0,63423	0,006433

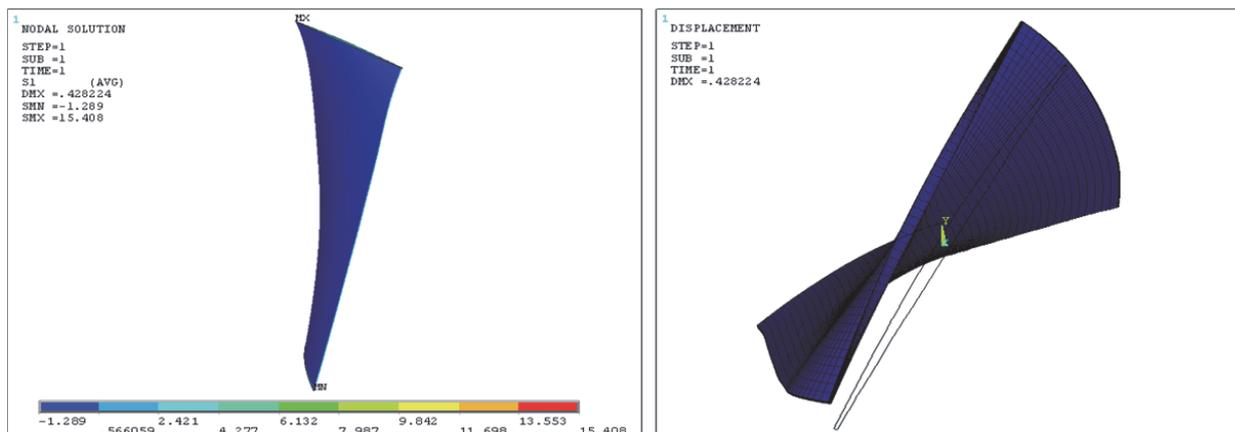


Рис. 2. Деформации лопатки ГТД от ОН после упрочнения ППД

нечно-элементной модели лопатки показаны на рис. 2.

В результате расчётов получены данные, согласно которым, на стадии механической обработки, смещая технологические допуски, представляется возможным изготавливать лопатки с упреждением возможного коробления, получаемого при последующей обработке методами ППД.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Определение упреждающих технологических допусков, основанное на энергетическом методе прогнозирования ТОД деталей после упрочнения методами ППД, позволяет обеспечить геометрические размеры и форму деталей в соответствии с требованиями конструкторской документации, а также устранить отклонения от заданных размеров, возникающие на предыдущих стадиях технологического процесса.

Разработанные подходы применимы в производственных условиях при изготовлении деталей сложной формы, подверженных короблению.

Применение разработанной методики определения эквивалентных начальных напряжений позволяет значительно упростить и ускорить расчёты ТОД методом конечных элементов в системе ANSYS.

Проведённые расчёты указывают на возможность применения постоянного режима упрочнения для всех поверхностей при обработке деталей сложной формы, что значительно уменьшает трудоёмкость работ по обеспечению их геометрической точности и доказывает возможность применения представленных методов в серийном производстве.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Букатый, С.А. Энергетический метод определения рациональных режимов упрочнения тонкостен-

ных и маложёстких деталей ГТД поверхностным пластическим деформированием / С.А. Букатый, А.С. Букатый // *Авиационно-космическая техника и технология*. – 2009. – № 10(67). – С. 45–49.

2. Букатый, С.А. Автоматизированная система определения остаточных напряжений / С.А. Букатый, А. С. Букатый // *Механика и процессы управления. Труды XXXVIII Уральского семинара. Том 1.* – Екатеринбург: УрО РАН, Миасс – 2008. – 258 с. С. 191–194.
3. Букатый А.С. Применение удельной энергии упругой деформации поверхностного слоя для прогнозирования технологических остаточных деформаций деталей после упрочнения методом ППД / А.С. Букатый, А.А. Иванов // *Механика и процессы управления. Труды XXXIX Уральского семинара, посвящённого 85-летию со дня рожд. акад. В.П. Макеева.* – Екатеринбург: УрО РАН, 2009. – 422 с. С.88 – 95.
4. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в трёх томах. Том 1. Под ред. И.А. Биргера и Я.Г. Пановко. – М.: Машиностроение, 1968. – 831с.
5. Овсеенко, А. Н. Технологические остаточные деформации и методы их снижения / А.Н. Овсеенко // *Вестник машиностроения.* – М.: Машиностроение, 1991. № 2. – С. 58–61.
6. Смирнов, Г.В. Совершенствование технологии окончательной электрохимической размерной обработки лопаток ГТД с учётом технологической наследственности: Монография / Г.В. Смирнов. – Самара: СНЦ РАН, 2004. – 112 с.

## TECHNOLOGICAL RESIDUAL DEFORMATIONS CALCULATING FOR AVIATION PARTS SUBJECTED TO SHOT PEENING STRENGTHENING

© 2023 A.S. Bukaty<sup>1,2</sup>, D.V. Evdokimov<sup>1,2</sup>, D.A. Bychkov<sup>2</sup>, Shudjairi Marwan<sup>1</sup>, A.S. Saraev<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Samara National Research University, Samara, Russia

<sup>2</sup> JSC Aviaagregat, Samara, Russia

Ensuring the geometric accuracy of critical parts is an actual problem for aviation industry enterprises. The blades of gas turbine engines are particularly critical and technologically complex parts. In most cases, the interlocks of the blades, as well as the blade, are subjected to surface shot peening. Residual stresses are the first cause of the appearance of technological residual deformations. It is the residual deformations caused by the action of residual stresses that in most cases are the cause of critical defects of parts. Thus, the development of scientifically based approaches to modeling residual stresses and calculating technological residual deformations is an actual task. The paper presents an approach that allows at the stage of machining to take into account the deformations that can be obtained at the final stages of manufacturing parts after shot peening strengthening. The approach is based on preliminary computational prediction of technological residual deformations from the action of residual stresses based on analytical and finite element methods. The implementation of the approach is shown on the example of a compressor blade of a gas turbine engine, subjected to hardening by shot peening over the entire surface of the part.

**Keywords:** residual deformations, residual stresses, technological tolerances, shot peening strengthening, modeling.

DOI: 10.37313/1990-5378-2023-25-3-72-76

EDN: KYZOC

### REFERENCES

1. Bukatyj S.A. Energeticheskiy metod opredeleniya racional'nykh rezhimov uprochneniya tonkostennykh i malozhyostkiy detalej GTD poverhnostnym plasticheskim deformirovaniem / S.A. Bukatyj, A.S. Bukatyj // Aviacionno-kosmicheskaya tekhnika i tekhnologiya. – 2009. – № 10(67). – S. 45–49.
2. Bukatyj, S.A. Avtomatizirovannaya sistema opredeleniya ostatochnykh napryazhenij / S.A. Bukatyj, A.S. Bukatyj // Mekhanika i processy upravleniya. Trudy XXXVIII Ural'skogo seminar. Tom 1. – Ekaterinburg: UrO RAN, Miass – 2008. – S. 191–194.
3. Bukatyj, A.S. Primenenie udel'noy energii uprugoy deformatsii poverhnostnogo sloya dlya prognozirovaniya tekhnologicheskikh ostatochnykh deformatsiy detalej posle uprochneniya metodom PPD / A.S. Bukatyj, A.A. Ivanov // Mekhanika i processy upravleniya. Trudy HKHKHIIH Ural'skogo seminar, posvyashchyonnogo 85-letiyu so dnya rozhd. akad. V.P. Makeeva. – Ekaterinburg: UrO RAN, 2009. – S. 88–95.
4. Prochnost', ustojchivost', kolebaniya. Spravochnik v trykh tomah. Tom 1. Pod red. I.A. Birgera i YA.G. Panovko. – M.: Mashinostroenie, 1968. – 831 s.
5. Ovseenko, A.N. Tekhnologicheskie ostatochnye deformatsii i metody ih snizheniya [Tekst] / A.N. Ovseenko // Vestnik mashinostroeniya. – M.: Mashinostroenie, – 1991. – № 2. – S. 58–61.
6. Smirnov, G.V. Sovershenstvovanie tekhnologii okonchatel'noy elektrohimicheskoy razmernoy obrabotki lopatok GTD s uchytom tekhnologicheskoy nasledstvennosti: Monografiya / G.V. Smirnov. – Samara: SNC RAN, 2004. – 112 s.

*Aleksey Bukaty, Doctor of Technics, Professor at the Material Resistance Department of Samara National Research University, Head of the Technology Problems Department of JSC Aviaagregat. E-mail: bukaty@inbox.ru*

*Dmitry Evdokimov, Ph. D. of Engineering Sciences, Senior Project Engineer of JSC Aviaagregat, Assistant Professor of the Material Resistance and Engine production technologies Departments of Samara National Research University. E-mail: dmitry.evd.ssau@gmail.com*

*Dmitry Bychkov, Senior Project Engineer of JSC Aviaagregat. E-mail: db2009@bk.ru*

*Shudjairi Marwan Adil Hashim, Ph. D. Student of the Material Resistance Department of Samara National Research University. E-mail: sopromat@ssau.ru*

*Aleksey Saraev, Ph. D. Student of the Material Resistance Department of Samara National Research University. E-mail: sasss84@yandex.ru*

**К ВОПРОСУ О ПЕРЕХОДЕ ПРЕДПРИЯТИЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ  
К ЗАМКНУТОМУ ПРОИЗВОДСТВЕННОМУ ЦИКЛУ**

© 2023 О.В. Минулина

Казанский национальный исследовательский технологический университет, г. Казань, Россия

Статья поступила в редакцию 11.04.2023

В новых условиях ведения производственно-хозяйственной деятельности повышается значимость и актуальность повышения ресурсоэффективности и экологичности производственных процессов, что в рамках концепции устойчивого развития и ESG-повестки имеет критически важное значение для нефтехимических предприятий. На современных промышленных предприятиях стоит острая необходимость проектирования и внедрения в процессы управления замкнутых производственных циклов, повышающих ресурсоэффективность производства и промышленности в целом. Цель статьи заключается в разработке концептуальной модели управления процессом перехода предприятий нефтехимии на замкнутый цикл. Объектом исследования выступают нефтехимические предприятия, предметом – производственные циклы. Задачи статьи сводятся к следующим: описать методику разработки модели управления процессом перехода предприятий нефтехимии на замкнутый цикл; представить характеристику безотходного замкнутого производственного процесса; выстроить схему проектирования абсолютно замкнутого или безотходного технологического цикла. Результаты проведенного исследования позволили систематизировать следующие выводы: 1) под замкнутым производственным циклом предложено понимать форму организации производства нефтехимической продукции при котором ресурсы производства (сырье, энергия) используются в производственном процессе многократно, предварительно пройдя очистку, оснастку, охлаждение и т.п., возвращающему ресурсу производства требуемое качество в рамках данной технологии производства с последующим поступлением его на первую, либо предыдущие стадии производственно-сбытовой цепочки; 2) специфика организации замкнутого цикла на предприятиях нефтехимической промышленности связана с образованием значительного количества побочных продуктов в ходе основного химического процесса, что позволяет получать побочные виды продуктов, которые также могут использоваться в производственно-сбытовых цепочках (например, минеральные удобрения, серная кислота и т.п.); 3) преимущество химического рециклинга состоит в возможности переработки смешанных, многокомпонентных и загрязненных отходов, а также получения вторичного сырья, практически не отличимое по свойствам от исходного первичного сырья, следствием чего является не ограниченное количество циклов переработки; 4) основу концептуальной модели управления процессом перехода предприятий нефтехимии на замкнутый цикл составляют такие элементы управления, как цель, критерии, субъект и объект управления, методы и инструменты системной инженерии; проблемы реорганизации производственных процессов, а также задачи и технологии перехода к замкнутым производственным процессам. Теоретическая значимость исследования состоит в систематизации концептуальных основ управления процессом перехода предприятий нефтехимии на замкнутый цикл, что позволит в дальнейших научных изысканиях разработать практические аспекты управления замыканием производственных циклов, переходом к безотходным производствам на микроуровне.

*Ключевые слова:* замкнутый производственный цикл, промышленное производство, нефтехимическое предприятие, ресурсосбережение, производственно-сбытовые цепочки, модель управления.

DOI: 10.37313/1990-5378-2023-25-3-77-83

EDN: KZMLHB

**ВВЕДЕНИЕ**

В новых условиях ведения производственно-хозяйственной деятельности повышается значимость и актуальность повышения ресурсоэффективности и экологичности производственных процессов, что в рамках концепции устойчивого развития [1] имеет критически важ-

*Минулина Ольга Васильевна, соискатель кафедры логики и управления. E-mail: olga.minulina@bk.ru*

ное значение для нефтехимических предприятий. Рынки нефтегазохимической продукции отличает большое число промышленных переделов, повышающих добавленную стоимость нефтехимической продукции. Это обуславливает то, что на рынок поставляются полуфабрикаты разной ступени переделов, являющиеся входным потоком для предприятий, осуществляющих их дальнейшую переработку в зависимости от имеющихся у них производственных

мощностей по использованию всех компонентов переработки сырья нефтегазохимического производства. Также на рынке присутствует и готовая конечная продукция с разной величиной добавленной стоимости в зависимости от уровня ее переработки.

В настоящее время для нефтехимической промышленности задача прироста создаваемой добавленной стоимости решается в рамках формирования и обеспечения синергии производственно-сбытовых цепочек, охватывающих сопряженные производства: отрасль создания технологий – газодобыча и нефтепереработка; отрасль производства оборудования – нефтепереработка; строительная отрасль – газохимия и нефтехимия. Каждая из обозначенных отраслей при движении вдоль прямой создания добавленной стоимости повышает стоимость конечной продукции, которая используется как входной поток в виде полуфабрикатов для последующих отраслей в рамках единой цепочки, замыкаясь на рынке сбыта в виде инновационной продукции с высокой добавленной стоимостью.

Вместе с тем, на современных промышленных предприятиях стоит острая необходимость проектирования и внедрения в процессы управления замкнутых производственных циклов, повышающих ресурсоэффективность производства и промышленности в целом. Указанные аспекты предопределили выбор тематики исследования, постановку его целей и задач. Цель статьи заключается в разработке концептуальной модели управления процессом перехода предприятий нефтехимии на замкнутый цикл. Объектом исследования выступают нефтехимические предприятия, предметом – производственные циклы. Задачи статьи сводятся к следующим:

– описать методику разработки модели управления процессом перехода предприятий нефтехимии на замкнутый цикл;

– представить характеристику безотходного замкнутого производственного процесса;

– выстроить схему проектирования абсолютно замкнутого или безотходного технологического цикла.

### МЕТОДИКА ИССЛЕДОВАНИЯ

Информационную базу исследования составили открытые источники информации по нефтехимическим предприятиям, в частности, за основу изучения замкнутых производственных процессов взят опыт группы компания «Сибур». При разработке концептуальной модели управления процессом перехода предприятий нефтехимии на замкнутый цикл использовались методы описания, сравнения и системного анализа для таких элементов процесса управления, как:

- цель, критерии управления, субъект и объект управления;
- методы и инструменты системной инженерии;
- проблемы реорганизации производственных процессов;
- задачи и технологии перехода к замкнутым производственным процессам.

### ХАРАКТЕРИСТИКА БЕЗОТХОДНОГО ЗАМКНУТОГО ПРОИЗВОДСТВЕННОГО ПРОЦЕССА

Каждая стадия производственно-сбытовой цепочки сопровождается образованием отходов, минимизация которых в рамках политики ресурсосбережения предполагает внедрение замкнутых производственных циклов, при которых отходы производства и потребления энергии и материалов на технологические нужды после переработки снова поступают в процесс производства, формируя производство замкнутого цикла (рис. 1).

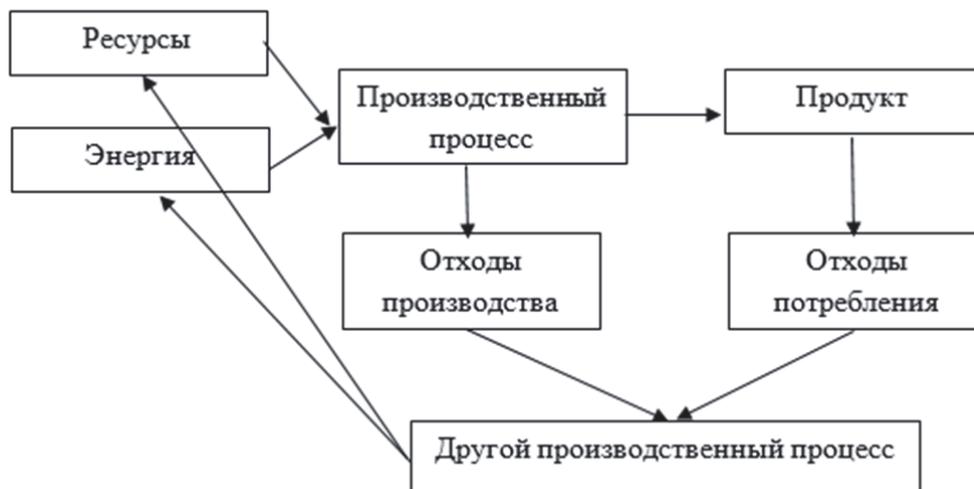


Рис. 1. Схема безотходного замкнутого производственного процесса [обобщено автором]

Таким образом, применительно к нефтехимической промышленности замкнутый производственный цикл представляет собой форму организации производства нефтехимической продукции при котором ресурсы производства (сырье, энергия) используются в производственном процессе многократно, предварительно пройдя очистку, оснастку, охлаждение и т.п., возвращающему ресурсу производства требуемое качество в рамках данной технологии производства с последующим поступлением его на первую, либо предыдущие стадии производственно-сбытовой цепочки.

### СПЕЦИФИКА ЗАМКНУТОГО ИЛИ БЕЗОТХОДНОГО ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ЦИКЛА

В вопросах организации производственных систем в нефтехимической промышленности с практической точки зрения важным является провести сравнительный анализ существующей технологии производства и технологической схемы производственного процесса с эталонной схемой безотходного замкнутого производственного процесса со стадиями: «ресурсы и энергия – производство – потребление – вторичное сырье – ресурсы и энергия», для которого характерно замкнутое движение поток ресурсов и энергии. Базовым принципом проектирования и внедрения безотходного замкнутого производственного процесса в нефтехимической промышленности считается обеспечение цикличности потоков ресурсов и энергии, примерами которых для нефтехимических предприятий могут быть замкнутые водо- и газооборотные циклы, составляющую наибольшую долю ресурсов и источников энергии в нефтехимическом производстве [2-4].

Замкнутый производственный цикл и малоотходные технологии активно внедряются на предприятиях нефтехимической промышленности. Замкнутая организация производственного процесса в пределах структурных единиц (цеха) или предприятия в целом способствует сокращению производственного цикла, снижению отходности производства, уменьшению затрат на перемещение сырья и материалов, повышению технической и экономической эффективности.

Особенность организации замкнутого цикла в нефтехимии обусловлена образованием значительного количества побочных продуктов в ходе основного химического процесса. К примеру, образующийся в технологическом процессе диоксид серы вступает в реакцию с жидкостями различного химического состава, что дает возможность получать минеральные удобрения (сернокислый аммоний, суперфосфат и др.), при контакте с водой – серную кислоту как востребованное сырье для многих производств [5]. В общем виде принцип проектирования абсолютно замкнутого или безотходного технологического цикла показан на рисунке (рис. 2).

В замкнутом технологическом цикле не образуются отходы производства, поскольку выходные потоки одного производственного процесса являются входными потоками (сырьем) для другого производства. Однако, существующие химические и механические технологии рециклинга не позволяют создать абсолютно безотходное производство, т.к. не на все конечные продукты и отходы имеются разработанные способы и процессы переработки. В этой связи, не все отходы удается эффективно извлекать из отходящих материальных потоков.

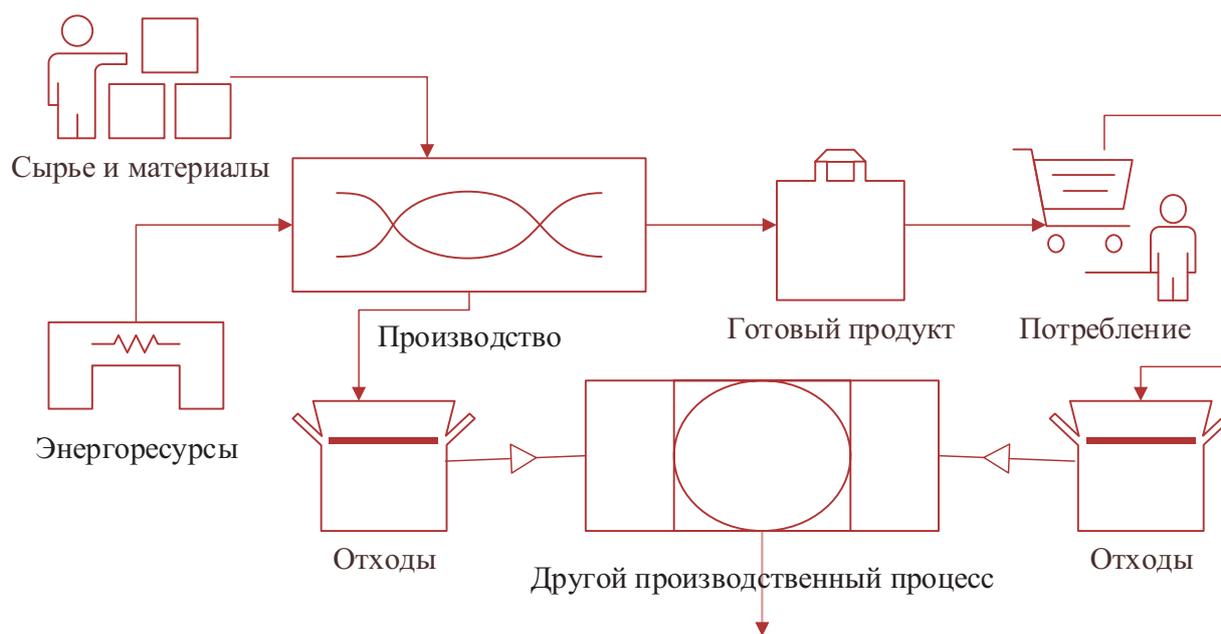


Рис. 2. Общая схема проектирования абсолютно замкнутого или безотходного технологического цикла [составлено автором по материалам [6]]

Ресурсами для производственного процесса являются не только первичное сырье, но и вторичные ресурсы, образованные в результате рециклинга отходов. В качестве примера возврата отходов производства в тот же производственный цикл в нефтехимии отметим производство продукции из полиэтилена и полипропилена. Продукция, утратившая свои потребительские свойства, может быть повторно переработана в основном технологическом процессе. Кроме того, отходы производства могут являться сырьем для смежных производств, или производств иной товарной группы.

### ОСОБЕННОСТИ ЗАМКНУТОГО ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ЦИКЛА НА НЕФТЕХИМИЧЕСКИХ ПРЕДПРИЯТИЯХ

Нефтехимическое производство обладает наибольшим потенциалом в организации замкнутого технологического цикла и производства продукции с содержанием вторичного сырья. Это обусловлено уникальностью свойств полимеров к многократной переработке и существующим технологиям, которые позволяют вовлечь полимерные отходы в производственный цикл. Термоэластопластичные эластомеры при воздействии высокой температуры переходят в вязкотекучее состояние и изменяют свою форму. Данное свойство позволяет чаще всего использовать термоэластопласты для вторичной переработки. К примеру, в группе компаний «Сибур» разработана новая продукция вторичных полимеров Vivilen с содержанием вторичных материальных ресурсов до 25-50% [7].

Обобщая опыт крупнейших производителей продукции нефтехимии, можно выделить следующие проблемы перехода предприятий на замкнутый технологический цикл:

1) низкий уровень развития технологий и, соответственно, низкий охват нефтехимических производств технологиями, которые позволяют возвращать вторичные материалы в производственный цикл в качестве исходного сырья;

2) при некотором наличии технологий механического рециклинга (уменьшение и укрупнение размеров частиц, обезвоживание, обогащение и пр.) наблюдается практически отсутствие эффективных технологий химического рециклинга;

3) отсутствие взаимосвязанных стабильных и управляемых технологических цепочек ресурсных потоков как внутри производства, так и в сети со смежными производителями (для обеспечения стабильных объемов поставок вторичного сырья);

4) необходимость адаптации организационных и экономических механизмов управления производств под новый формат работы со вторичным сырьем (регулятор, налоговые приоритеты);

5) повышение качества или улучшение физико-химических свойств вторичных материальных ресурсов путем их дополнительной обработки производителями.

Наиболее сложной из перечисленных проблем является задача развития термохимических методов рециклинга, который позволит существенно нарастить объемы перерабатываемой полимерной продукции. ЕС декларирует увеличение доли перерабатываемого пластика до 50% к 2030 году. Данный показатель может быть достигнут только в случае дальнейшего развития технологий химического рециклинга и масштабирования новых решений.

Преимущество химического рециклинга заключается, во-первых, в возможности переработки смешанных, многокомпонентных и загрязненных отходов. Таким образом, появляется возможность перерабатывать отходы, которые считаются на большинстве предприятий «не перерабатываемыми» отходами. Например, имеется положительный зарубежный опыт технологий переработки пластика химическим методом – Европа, Америка и азиатские страны (Япония, Корея). В российской науке и промышленности есть соответствующие наработки, но нет эффективного трансфера лабораторных исследований к пилотным и промышленным решениям.

Во-вторых, в отличие от механической переработки отходов, химический рециклинг позволяет получать вторичное сырье, практически не отличимое по свойствам от исходного первичного сырья. В результате подобных технологий не ограничивается количество циклов переработки.

На нефтехимических предприятиях существуют следующие универсальные для нефтехимии технологии зацикливания производства с вовлечением побочных продуктов:

– переработка попутного нефтяного газа путем производства широкой фракции летучих углеводородов (ШФЛУ), производство электроэнергии, химическая переработка в смесь ароматических углеводородов и пр.;

– улавливание CO<sub>2</sub> от сжигания топлива или технологических процессов в формате технологии CCUS, т.е. включая транспортировку углекислого газа, подземное хранение и использование в качестве ресурса в производстве продукции;

– очистка воды и ее рециркуляция.

### КОНЦЕПТУАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ УПРАВЛЕНИЯ ПРОЦЕССОМ ПЕРЕХОДА ПРЕДПРИЯТИЙ НЕФТЕХИМИИ НА ЗАМКНУТЫЙ ЦИКЛ

Концептуальная (содержательная) модель управления процессом перехода предприятий нефтехимии на замкнутый цикл представлена нами на рисунке (рис. 3). Это абстрактная модель, определяющая элементы моделируемой производственной системы и причинно-следственные связи, существенные для достижения цели. Модель состоит из двух ключевых блоков:

блок «Система управления реорганизацией процессов производства в замкнутый цикл» и блок «Система принятия решений по реорганизации процессов производства в замкнутый цикл».

Блок «Система управления реорганизацией процессов производства в замкнутый цикл» включает цель управления, субъект и объект управления, а также критерии управления – показатели удельного веса переработанных отходов производства, ресурсоемкость производства (первичное сырье), энергоемкость производства (первичная приобретаемая тепловая и электрическая энергия).

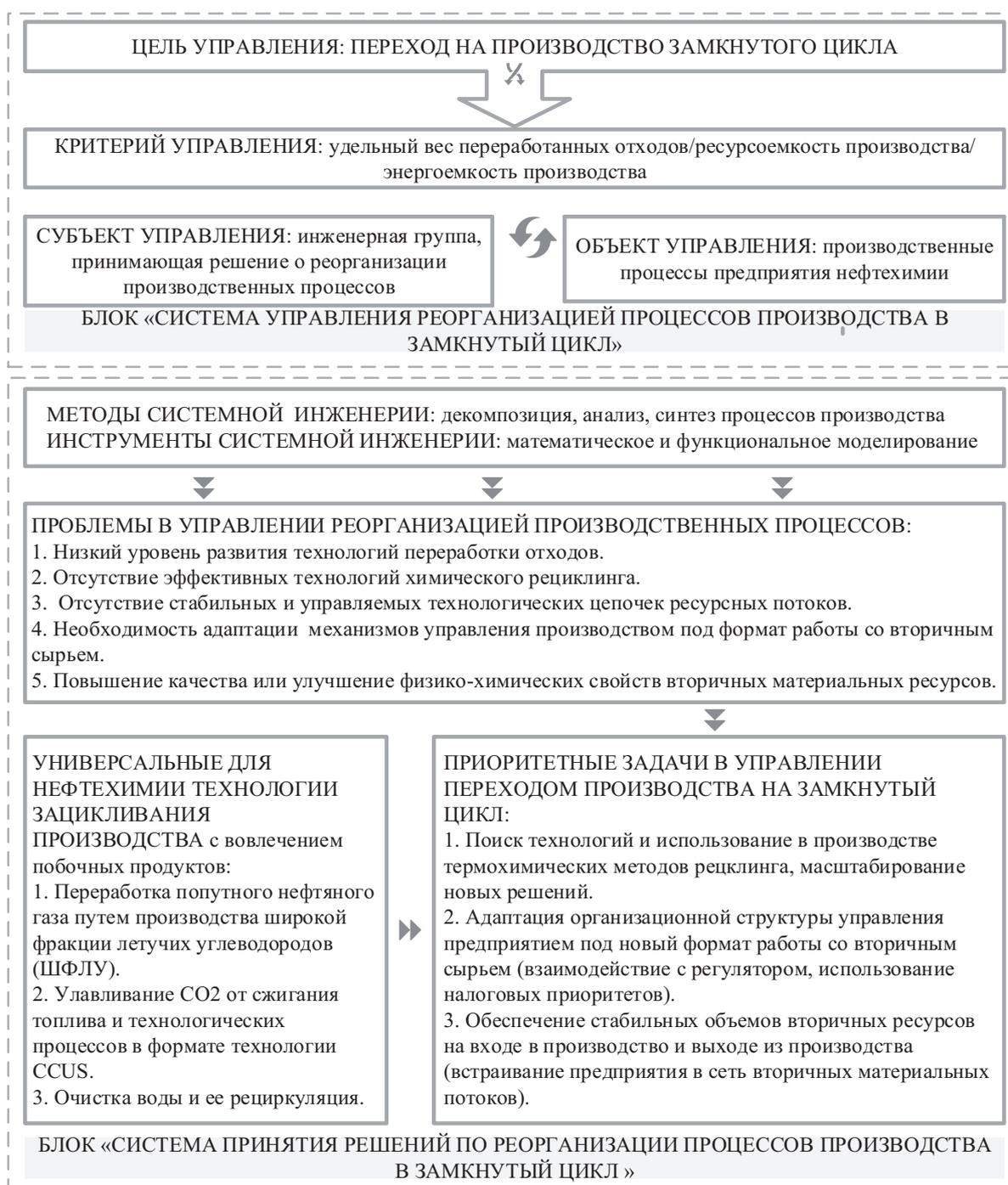


Рис. 3. Концептуальная модель управления процессом перехода предприятий нефтехимии на замкнутый цикл [составлено автором]

Блок «Система принятия решений по реорганизации процессов производства в замкнутый цикл» основан на методах и инструментах системной инженерии, а именно итерационного цикла «декомпозиция – анализ – синтез» и методах математического и функционального моделирования. В результате декомпозиции и анализа производственной системы определяются ключевые проблемы в управлении реорганизацией производственных процессов. В результате анализа химических технологий, выделены возможности, способствующие ускорению процесса заикливания производства. Данные технологии универсальны для нефтехимических производств, вырабатывающих попутный нефтяной газ, выделяющих углекислый газ.

Исходя из обозначенных проблем и имеющихся универсальных технологий полагаем, что ключевыми задачами в управлении переходом производства на замкнутый цикл должно стать: поиск технологий и использование в производстве термохимических методов рециклинга, масштабирование новых решений; адаптация организационной структуры управления предприятием под новый формат работы со вторичным сырьем (взаимодействие с регулятором, использование налоговых приоритетов); обеспечение стабильных объемов вторичных ресурсов на входе в производство и выходе из производства (встраивание предприятия в сеть вторичных материальных потоков).

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, результаты проведенного исследования позволяют систематизировать следующие выводы.

1) Под замкнутым производственным циклом предложено понимать форму организации производства нефтехимической продукции при котором ресурсы производства (сырье, энергия) используются в производственном процессе многократно, предварительно пройдя очистку, оснастку, охлаждение и т.п., возвращающему ресурсу производства требуемое качество в рамках данной технологии производства с последующим поступлением его на первую, либо предыдущие стадии производственно-сбытовой цепочки.

2) Специфика организации замкнутого цикла на предприятиях нефтехимической промышленности связана с образованием значительного количества побочных продуктов в ходе основного химического процесса, что позволяет получать побочные виды продуктов, которые также могут использоваться в производственно-сбытовых цепочках (например, минеральные удобрения, серная кислота и т.п.).

3) Преимущество химического рециклинга состоит в возможности переработки смешанных, многокомпонентных и загрязненных отходов, а также получения вторичного сырья, практически не отличимое по свойствам от исходного первичного сырья, следствием чего является неограниченное количество циклов переработки.

4) Основу концептуальной модели управления процессом перехода предприятий нефтехимии на замкнутый цикл составляют такие элементы управления, как цель, критерии, субъект и объект управления, методы и инструменты системной инженерии; проблемы реорганизации производственных процессов, а также задачи и технологии перехода к замкнутым производственным процессам.

Полагаем, что теоретическая значимость исследования состоит в систематизации концептуальных основ управления процессом перехода предприятий нефтехимии на замкнутый цикл, что позволит в дальнейших научных изысканиях разработать практические аспекты управления замыканием производственных циклов, переходом к безотходным производствам на микроуровне.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Концепция устойчивого развития Концепция устойчивого развития ООН. URL: <https://sdgs.un.org/goals> (дата обращения: 15.12.2022)
2. Барсеян, Н.В. Специфика бережливой организации структуры управления нефтехимическим предприятием / Н.В. Барсеян // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. – 2020. – Т. 22. – № 2 (94). – С. 100-106.
3. Кудрявцева, С.С. Научно-технический потенциал России как фактор экономического роста в экономике знаний / С.С. Кудрявцева, К.К. Неганов // Экономический вестник Республики Татарстан. – 2016. – № 2. – С. 61-65.
4. Кудрявцева, С.С. Системный инжиниринг в развитии высокотехнологичной промышленности / С.С. Кудрявцева, М.В. Шинкевич, И.И. Ишмурадова // Наука и бизнес: пути развития. – 2020. – № 9 (111). – С. 99-103.
5. Недельченко, С.И. Система глобальной динамической оптимизации и система оптимизации в реальном времени: критерии выбора системы управления технологическими процессами / С.И. Недельченко, М.С. Гайфуллин, Е.С. Головина, Ю.А. Ергомышев, В.А. Лаврентьев, А.В. Комогоров // Территория Нефтегаз. – 2019. – № 12. – С. 12-17.
6. Хайрутдинов, И.Р. Циркулярная экономика нефтехимической промышленности / И.Р. Хайрутдинов // Журнал правовых и экономических исследований. – 2020. – № 3. – С. 197-199.
7. Гурьева, М.А. Механизм адаптации элементов циркулярной экономики в бизнес-модель промышленного холдинга (на примере компании ПАО «Сибур») / М.А. Гурьева, В.В. Бутко // Креативная экономика. – 2021. – Т. 15. – № 3. – С. 837-860.

## METHODOLOGY FOR ASSESSING RESOURCE-SAVING PRODUCTION SYSTEMS IN A CIRCULAR ECONOMY

© 2023 O.V. Minulina

Kazan National Research Technological University, Kazan, Russia

In the new conditions of conducting production and economic activities, the importance and relevance of increasing the resource efficiency and environmental friendliness of production processes is increasing, which, within the framework of the concept of sustainable development and the ESG agenda, is of critical importance for petrochemical enterprises. At modern industrial enterprises, there is an urgent need to design and implement closed production cycles in management processes that increase the resource efficiency of production and industry as a whole. The purpose of the article is to develop a conceptual model for managing the process of transition of petrochemical enterprises to a closed cycle. The object of the study is petrochemical enterprises, the subject is production cycles. The objectives of the article are as follows: to describe the methodology for developing a management model for the process of transition of petrochemical enterprises to a closed cycle; present a description of a waste-free closed production process; build a design scheme for an absolutely closed or waste-free technological cycle. The results of the study made it possible to systematize the following conclusions: 1) a closed production cycle is proposed to be understood as a form of organizing the production of petrochemical products, in which production resources (raw materials, energy) are used repeatedly in the production process, having previously undergone cleaning, tooling, cooling, etc., returning the required quality of the production resource within the framework of this production technology with its subsequent entry to the first or previous stages of the value chain; 2) the specificity of the organization of a closed cycle in the petrochemical industry is associated with the formation of a significant amount of by-products during the main chemical process, which makes it possible to obtain by-products that can also be used in value chains (for example, mineral fertilizers, sulfuric acid, etc.). P.); 3) the advantage of chemical recycling is the possibility of processing mixed, multi-component and contaminated waste, as well as obtaining secondary raw materials that are practically indistinguishable in properties from the original primary raw materials, resulting in an unlimited number of processing cycles; 4) the basis of the conceptual model for managing the process of transition of petrochemical enterprises to a closed cycle is such management elements as the goal, criteria, subject and object of management, methods and tools of system engineering; problems of reorganization of production processes, as well as tasks and technologies for the transition to closed production processes. The theoretical significance of the study lies in the systematization of the conceptual foundations for managing the process of transition of petrochemical enterprises to a closed cycle, which will allow in further scientific research to develop practical aspects of managing the closure of production cycles, the transition to waste-free production at the micro level.

*Keywords:* closed production cycle, industrial production, petrochemical enterprise, resource saving, value chains, management model.

DOI: 10.37313/1990-5378-2023-25-3-77-83

EDN: KZMLHB

### REFERENCES

1. *Koncepciya ustojchivogo razvitiya Koncepciya ustojchivogo razvitiya OON.* URL: <https://sdgs.un.org/goals> (data obrashcheniya: 15.12.2022)
2. *Barsegyan, N.V.* Specifika berezhlivoj organizacii struktury upravleniya neftekhimicheskim predpriyatiem / N.V. Barsegyan // *Izvestiya Samarskogo nauchnogo centra Rossijskoj akademii nauk.* – 2020. – T. 22. – № 2 (94). – S. 100-106.
3. *Kudryavceva, S.S.* Nauchno-tehnicheskij potencial Rossii kak faktor ekonomicheskogo rosta v ekonomike znaniy / S.S. Kudryavceva, K.K. Neganov // *Ekonomicheskij vestnik Respubliki Tatarstan.* – 2016. – № 2. – S. 61-65.
4. *Kudryavceva, S.S.* Sistemnyj inzhiniring v razvitii vysokotekhnologichnoj promyshlennosti / S.S. Kudryavceva, M.V. SHinkevich, I.I. Ishmuradova // *Nauka i biznes: puti razvitiya.* – 2020. – № 9 (111). – S. 99-103.
5. *Nedel'chenko, S.I.* Sistema global'noj dinamicheskoy optimizacii i sistema optimizacii v real'nom vremeni: kriterii vybora sistemy upravleniya tekhnologicheskimi processami / S.I. Nedel'chenko, M.S. Gajfullin, E.S. Golovina, YU.A. Ergomyshev, V.A. Lavrent'ev, A.V. Komogorov // *Territoriya Neftegaz.* – 2019. – № 12. – S. 12-17.
6. *Hajrutdinov, I.R.* Cirkulyarnaya ekonomika neftekhimicheskoy promyshlennosti / I.R. Hajrutdinov // *ZHurnal pravovyh i ekonomicheskikh issledovanij.* – 2020. – № 3. – S. 197-199.
7. *Gur'eva, M.A.* Mekhanizm adaptacii elementov cirkulyarnoj ekonomiki v biznes-model' promyshlennogo holdinga (na primere kompanii PAO «Sibur») / M.A. Gur'eva, V.V. Butko // *Kreativnaya ekonomika.* – 2021. – T. 15. – № 3. – S. 837-860.

УДК 004.413

**ВЕРОЯТНОСТНЫЙ РАСЧЕТНО-СТАТИСТИЧЕСКИЙ ИНСТРУМЕНТАРИЙ  
ОЦЕНКИ ВЛИЯНИЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА ПРОИЗВОДСТВА  
НА СТАБИЛЬНОСТЬ ОСНОВНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК АВТОМОБИЛЬНОГО ГЕНЕРАТОРА**

© 2023 А.С. Саксонов, В.Н. Козловский, К. В. Киреев

Самарский государственный технический университет, г. Самара, Россия

Статья поступила в редакцию 15.05.2023

В статье представлены результаты разработки вероятностного расчетно-статистического инструментария для оценки влияния стабильности технологического процесса изготовления автомобильного генератора на вариабельность его электротехнических характеристик.

*Ключевые слова:* конкурентоспособность, качество, автосборочное производство, электрокомпоненты.

DOI: 10.37313/1990-5378-2023-25-3-84-89

EDN: LGJNGV

Автомобильный генератор (АГ) продукт, выпускающийся массово, на который во время осуществления технологического процесса оказывает влияние группа случайных факторов, под действием которых возникают технологические погрешности геометрических размерных параметров, определяющих формирование несоосности статора и ротора. [1, 2]. Важным является то, что ни один из влияющих на технологический процесс факторов не вносит решающего вклада в формирование несоосности статора и ротора [3].

На возникновение технологических погрешностей геометрических размерных параметров, определяющих формирование несоосности статора и ротора, оказывает влияние стабильность технологического процесса [4, 5]. Из этого следует, что с учетом массовости производства для прогнозирования стабильности основных электротехнических и электромеханических характеристик АГ в зависимости от стабильности технологического процесса, необходимо использовать методы математической статистики [6, 7]. Одним из наиболее удобных методов оценки случайных процессов выступает метод Монте-Карло в силу его простоты и универсальности. Метод Монте-Карло сводится к оцениванию плотности распределения некоторой случайной величины, определенной на вероятностном пространстве с использованием интеграла типа Лебега-Стилтьеса:

$$I = \int f(x)\mu dx, \tag{1}$$

где  $f(x)$  – плотность распределения оцениваемого параметра;  $\mu$  – сигма-конечная мера.

В рамках исследования следует прибегнуть к использованию метода Монте-Карло в его упрощенном виде, когда вышеописанный интеграл оценивается средним арифметическим плотностей распределения:

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i), \tag{2}$$

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(y_i), \tag{3}$$

где  $N$  – размер выборки;  $f(x_i)$  – плотность распределения входной случайной величины с  $i$ -ой относительной частотой;  $x_i$  – входная случайная оцениваемая величина;  $f(y_i)$  – плотность распределения выходной случайной величины с  $i$ -ой относительной частотой;  $y_i$  – выходная случайная оцениваемая величина.

Для того, чтобы выполнять оценку распределения случайных величин, необходимо знать, какому закону распределения подчиняется разброс этих случайных величин [8, 9]. В рамках исследования предполагается отталкиваться от нормального закона распределения, в силу ряда причин: во-первых, на процесс изготовления АГ воздействует группа случайных факторов, во-вторых, ни один из них не вносит решающего вклада, значит, плотности распределения параметров несоосности статора и ротора и основных электротехнических и электромеханических характеристик оцениваются формулами:

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{\sigma_\varepsilon \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\varepsilon - \varepsilon_{cp})^2}{2\sigma_\varepsilon^2}}, \tag{4}$$

$$f(U_{m\phi}) = \frac{1}{\sigma_{U_{m\phi}} \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(U_{m\phi} - U_{m\phi_{cp}})^2}{2\sigma_{U_{m\phi}}^2}}, \tag{5}$$

Саксонов Александр Сергеевич, аспирант.

E-mail: a.s.saksonoff@yandex.ru

Козловский Владимир Николаевич, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой.

E-mail: Kozlovskiy-76@mail.ru

Киреев Кирилл Владимирович, кандидат технических наук, доцент. E-mail: cir-cir@lenta.ru

$$f(\vec{f}_{\text{рез}}) = \frac{1}{\sigma_{\vec{f}_{\text{рез}}} \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\vec{f}_{\text{рез}} - \vec{f}_{\text{рез, ср}})^2}{2\sigma_{\vec{f}_{\text{рез}}}^2}}, \quad (6)$$

где  $\sigma_{\varepsilon}$  – среднеквадратичное отклонение величины смещения геометрической оси ротора, м;  $\varepsilon_{\text{ср}}$  – среднее значение величины смещения геометрической оси ротора по выборке АГ, м;  $\sigma_{U_{\text{мф}}}$  – среднеквадратичное отклонение величины амплитудного значения фазного статорного напряжения, В;  $U_{\text{мф, ср}}$  – среднее значение величины амплитудного значения фазного статорного напряжения, В;  $\sigma_{\vec{f}_{\text{рез}}}$  – среднеквадратичное отклонение величины амплитудного значения результирующей силы, воздействующей на подшипниковые узлы АГ, Н;  $\vec{f}_{\text{рез, ср}}$  – среднее значение величины амплитудного значения результирующей силы, воздействующей на подшипниковые узлы АГ.

Для установления взаимосвязи стабильности технологического процесса и стабильности основных электротехнических и электромеханических характеристик АГ следует оценивать плотности распределения величин смещения геометрической оси ротора и основных электротехнических и электромеханических характеристик:

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(\varepsilon), \quad (7)$$

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(U_{\text{мф}}), \quad (8)$$

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(\vec{f}_{\text{рез}}), \quad (9)$$

где  $f(U_{\text{мф}})$  – плотность распределения величин амплитудного значения фазного статорного напряжения выборки АГ;  $f(\vec{f}_{\text{рез}})$  – плотность распределения величин значений результирующей силы, воздействующей на подшипниковые узлы АГ.

Автомобильный генератор – продукт, выпускаемый массово, воздействие группы факторов, влияющих на возникновение технологических погрешностей во время процесса производства индивидуально для каждого отдельно взятого АГ. Повышение стабильности технологического процесса, путем перехода от 8 качества к 7 качеству (сужение поля допуска на посадку подшипников автомобильного генератора (АГ) до 50 % относительно существующего значения) позволит повысить стабильность основных электротехнических и электромеханических характеристик АГ, а значит и повысить вероятность безотказной работы подшипниковых узлов.

Проведем вероятностного расчетно-статистический эксперимент по методу Монте-Карло. Для этого разработана программа расчета основных электротехнических характеристик автомобильного генератора, в которую интегрирована подпрограмма генератора случайных

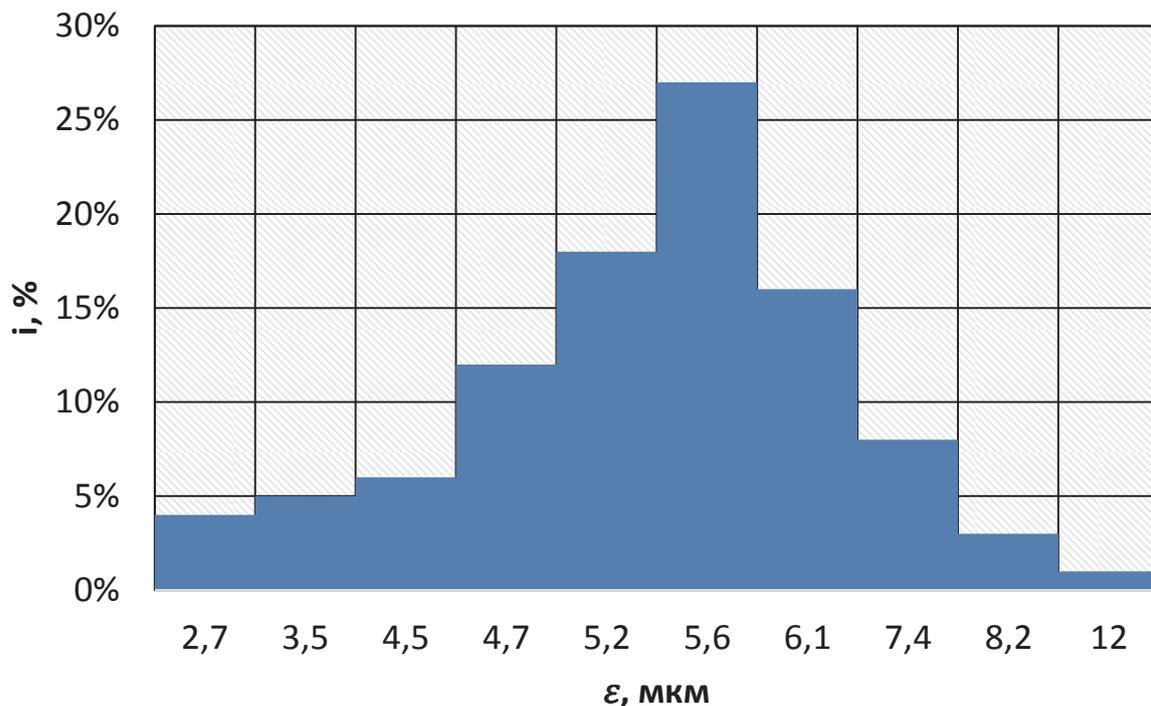
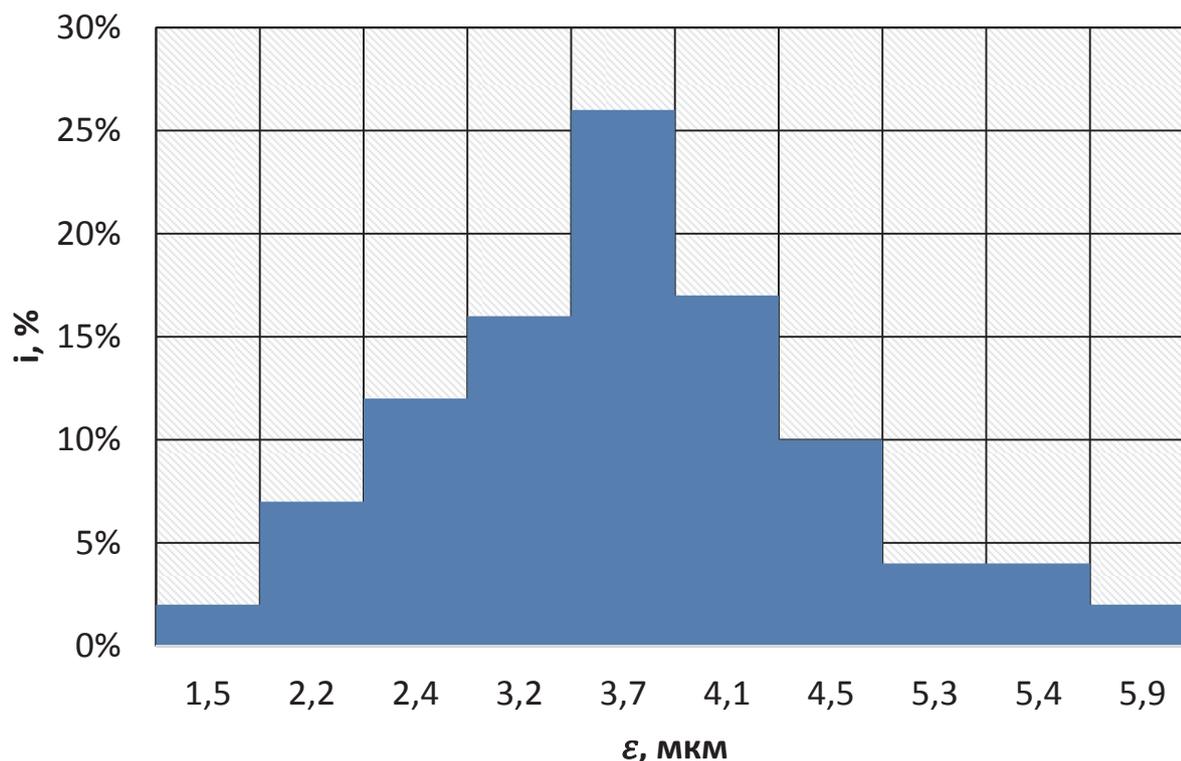


Рисунок 1 – Гистограмма диапазона значений смещений геометрической оси вращения ротора относительно статора первой выборки АГ



**Рисунок 2** – Гистограмма диапазона значений смещений геометрической оси вращения ротора относительно статора второй выборки АГ

чисел, реализующая нормальный закон распределения.

Подпрограмма генератора случайных чисел создает две выборки АГ с различными значениями смещения геометрической оси ротора, значения первой выборки лежат в диапазоне установленного в ТУ поля допуска на посадку подшипников в щиты, значения второй – в диапазоне суженого на 50 % поля допуска на посадку подшипников в щиты. Число АГ в каждой выборке – 100 штук.

Теперь следует выполнить оценку результатов, полученных в ходе вероятностного расчетно-статистического эксперимента по методу Монте-Карло (рисунки 1, 2).

В результате анализа рисунков 1 и 2, установлено, что первая выборка АГ имеет меньшую суммарную плотность распределения величин смещения геометрической оси ротора сравнительно со второй выборкой АГ. Суммарная плотность распределения величин смещения геометрической оси ротора первой выборки АГ равна 0,7513, второй – 0,80. Большая суммарная плотность распределения величин смещения геометрической оси ротора АГ свидетельствует о том, что при суженом на 50 % поле допуска на посадку подшипников в щиты технологический процесс становится более стабильным.

При повышении стабильности технологического процесса должна повышаться стабильность основных электротехнических и электро-механических характеристик.

Управлять стабильностью процесса изготовления АГ возможно путем изменения ширины поля допуска на посадку подшипников в щиты. Для оценки влияния стабильности технологического процесса на стабильность основных электротехнических и электро-механических характеристик АГ следует ввести количественный критерий, показывающий степень влияния входного параметра на выходные параметры [10]. В качестве инструмента оценки следует использовать коэффициент влияния, который в общем виде выражается формулой:

$$C_{ij} = \frac{\Delta f(x_1 \dots x_j)}{\Delta x_j} \cdot \frac{x_j}{f(x_1 \dots x_j)}, \quad (10)$$

где  $\Delta f(x_1 \dots x_j)$  – приращение выходного параметра;  $\Delta x_j$  – приращение входного параметра;  $x_j$  – номинальное значение входного параметра;  $f(x_1 \dots x_j)$  – номинальное значение выходного параметра.

В контексте исследования входным параметром выступает смещение геометрической оси ротора, а выходными параметрами – основные электротехнические и электро-механические характеристики АГ:

$$C_{ij1} = \frac{\Delta U_{m\phi}}{\varepsilon} \cdot \frac{\delta_{ном}}{U_{m\phi}}, \quad (11)$$

$$C_{ij2} = \frac{\Delta f_{рез}}{\varepsilon} \cdot \frac{\delta_{ном}}{f_p}, \quad (12)$$

где  $\Delta U_{m\phi}$  – приращение амплитудного значения фазного статорного напряжения, В;  $\varepsilon$  –

смещение геометрической оси ротора,  $m$ ;  $\Delta f_{рез}$  – приращение результирующей силы, воздействующей на подшипниковые узлы АГ, Н.

Коэффициент влияния выступает в качестве универсального инструмента оценки весомости влияния входного параметра на формирование выходных параметров. Анализируя формулу коэффициента влияния для общего случая видно, что малое приращение выходного параметра к малому приращению входного параметра даст малое значение коэффициента. Таким же образом, большое приращение выходного параметра к большому приращению входного параметра даст большое значение коэффициента, а значит, оценка весомости влияния параметров несоосности статора и ротора на основные электротехнические и электромеханические характеристики будет иметь однозначный характер.

Для прогнозирования стабильности технологического процесса производства генератора в зависимости от установленной ширины поля допуска на посадку подшипников в щиты следует использовать подпрограмму генератора случайных чисел. Генератор случайных чисел создает выборку величин смещения геометрической оси ротора в пределах установленного поля допуска на посадку подшипников в щиты, затем программа выполняет расчет основных электротехнических и электромеханических характеристик генератора, а также вероятность безотказной работы подшипниковых узлов в

течение заданного промежутка времени при каждом значении смещения геометрической оси ротора. Используя полученные результаты расчетов определяются значения коэффициентов влияния величин смещения геометрической оси ротора на основные электротехнические и электромеханические характеристики. По полученным результатам строятся графики зависимостей коэффициентов влияния от амплитудных значений фазного статорного напряжения и результирующей силы, воздействующей на подшипниковые узлы. Затем определяется разница между крайними значениями коэффициента влияния для той или иной характеристики генератора, чем меньше разница – тем стабильнее технологический процесс и соответственно стабильнее основные электротехнические и электромеханические характеристики генератора.

В графическом формате концепция методики прогнозирования и управления качеством генератора по ключевым параметрам, охватывающая предлагаемые вероятностные и расчетно-статистические инструменты может быть представлена в виде схемы (рисунок 3).

Применение разработанного инструментария в практике проектирования и производства автомобильных генераторов обеспечивает возможности для своевременной корректировки разрабатываемой конструкции, с точки зрения обеспечения стабильности требуемых характеристик.

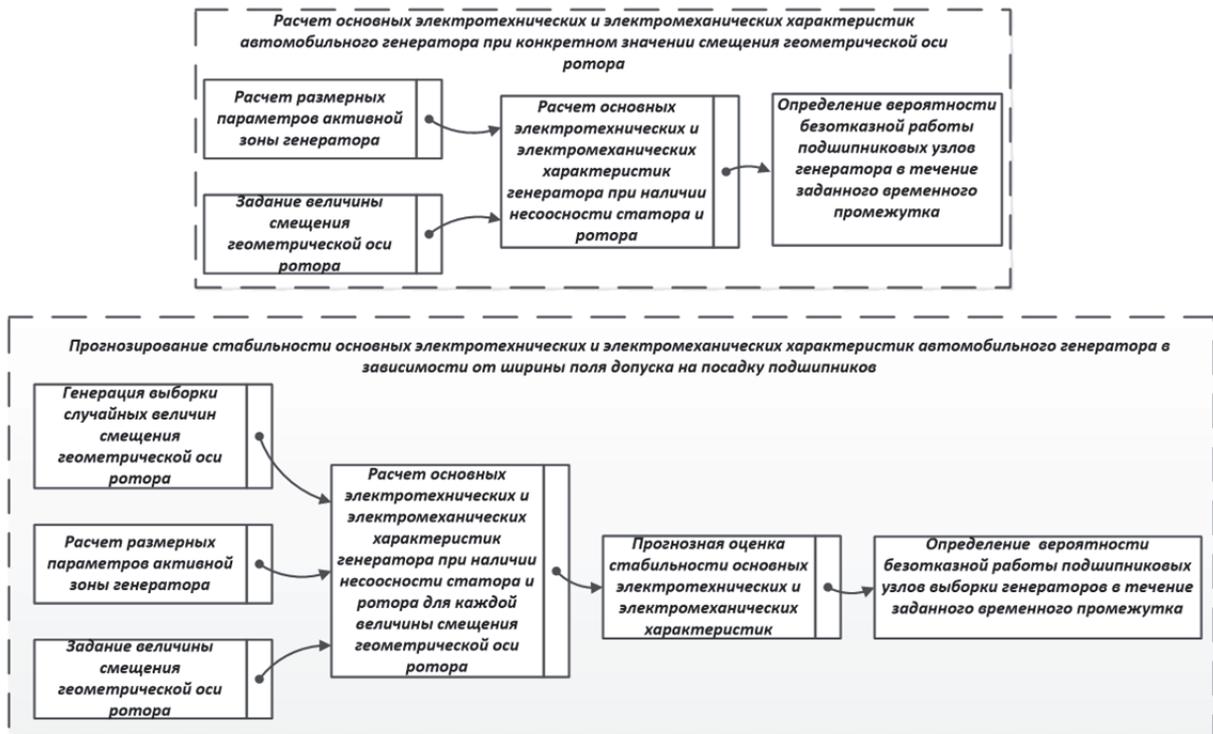


Рисунок 3 – Концепция методики обеспечения качества АГ по параметрам несоосности статора и ротора

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Козловский, В.Н. Компьютерное моделирование влияния технологических особенностей формирования эллипсности статора на электромеханические характеристики автомобильной синхронной генераторной установки / В.Н. Козловский, А.С. Саксонов // Вопросы электротехнологии. – 2021. – № 3(32). – С. 74-80.
2. Саксонов, А.С. Расчетно-статистический эксперимент по методу Монте-Карло как основа инструмента управления качеством транспортных электромеханических преобразователей / А.С. Саксонов, В.Н. Козловский, А.В. Крицкий // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. – 2022. – № 6. – С. 286-292.
3. Калабро С.Р. Принципы и практические вопросы надежности / С.Р. Калабро. – Москва: Машиностроение, 1966. 376 с.
4. Козловский В.Н. Методология анализа и прогнозирования качества автомобилей в эксплуатации / В.Н. Козловский, Д.В. Антипов, А.В. Зятров // Актуальные проблемы экономики. – 2016. – Т.186 – №12. – С. 387-398.
5. Козловский, В.Н. Обеспечение качества и надежности электрооборудования автомобилей: монография / В.Н. Козловский. – Тольятти: ТГУ, 2009. – 273 с.
6. Карасев, В.А. Теория вероятностей и математическая статистика. Математическая статистика: Практикум / В. А. Карасев, Г. Д. Левшина. – Москва: Издательский Дом МИСиС, 2016. – 120 с.
7. Трофимова Е.А. Теория вероятностей и математическая статистика / Е.А. Трофимова, Н.В. Кисляк, Д.В. Гилев. – Екатеринбург: Уральский федеральный университет, 2018, 164 с.
8. Козловский, В.Н. Обеспечение качества и надежности системы электрооборудования автомобилей / В.Н. Козловский // автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора технических наук / Моск. гос. автомобил.-дорож. ин-т (техн. ун-т). – Тольятти, 2010
9. Козловский, В.Н. Перспективные системы диагностики управления автономным транспортным объектом / В.Н. Козловский, В.В. Дебелов, О.И. Деев, А.Ф. Колбасов, С.В. Петровский, А.П. Новикова // Грузовик. – 2017. – № 6. – С. 21-28.
10. Козловский, В.Н. Развитие проектов электромобилей и автомобилей с комбинированной энергоустановкой / В.Н. Козловский, Д.В. Айдаров, М.М. Васильев, В.В. Дебелов // Грузовик. – 2018. – № 6. – С. 18-21.

## PROBABILISTIC CALCULATION AND STATISTICAL TOOL FOR ASSESSING THE INFLUENCE OF A TECHNOLOGICAL PROCESS ON THE STABILITY OF THE MAIN ELECTRICAL CHARACTERISTICS OF A VEHICLE GENERATOR

© 2023 A.S. Saxonov, V.N. Kozlovsky, K.V. Kireev

Samara State Technical University, Samara, Russia

The article presents the results of the development of probabilistic calculation and statistical tools for assessing the impact of the stability of the technological process of manufacturing an automobile generator on the variability of its electrical characteristics.

*Keywords:* competitiveness, quality, car assembly production, electrical components.

DOI: 10.37313/1990-5378-2023-25-3-84-89

EDN: LGJNGV

## REFERENCES

1. Kozlovskij, V.N. Komp'yuternoe modelirovanie vliyaniya tekhnologicheskikh osobennostej formirovaniya ellipsnosti statora na elektromekhanicheskie harakteristiki avtomobil'noj sinhronnoj generatornoj ustanovki / V.N. Kozlovskij, A.S. Saksonov // Voprosy elektrotekhnologii. – 2021. – № 3(32). – С. 74-80.
2. Saksonov, A.S. Raschetno-statisticheskij eksperiment po metodu Monte-Karlo kak osnova instrumenta upravleniya kachestvom transportnyh elektromekhanicheskikh preobrazovatelej / A.S. Saksonov, V.N. Kozlovskij, A.V. Krickij // Izvestiya Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Tekhnicheskie nauki. – 2022. – № 6. – С. 286-292.
3. Kalabro S.R. Principy i prakticheskie voprosy nadezhnosti / S.R. Kalabro. – Moskva: Mashinostroenie, 1966. 376 s.
4. Kozlovskij V.N. Metodologiya analiza i prognozirovaniya kachestva avtomobilej v ekspluatatsii / V.N. Kozlovskij, D.V. Antipov, A.V. Zayatrov // Aktual'nye problemy ekonomiki. – 2016. – Т.186. – №12. – С. 387-398.
5. Kozlovskij, V.N. Obespechenie kachestva i nadezhnosti elektrooborudovaniya avtomobilej: monografiya / V.N. Kozlovskij. – Tol'yatti: TGU, 2009. – 273 s.
6. Karasev, V.A. Teoriya veroyatnostej i matematicheskaya statistika. Matematicheskaya statistika: Praktikum / V. A. Karasev, G. D. Levshina. – Moskva: Izdatel'skij Dom MISiS, 2016. – 120 s.
7. Trofimova E.A. Teoriya veroyatnostej i matematicheskaya statistika / E.A. Trofimova, N.V. Kislyak, D.V. Gilev. – Ekaterinburg: Ural'skij federal'nyj universitet, 2018, 164 s.
8. Kozlovskij, V.N. Obespechenie kachestva i nadezhnosti sistemy elektrooborudovaniya avtomobilej / V.N.

- Kozlovskij // avtoreferat dissertacii na soiskanie uchenoj stepeni doktora tekhnicheskikh nauk / Mosk. gos. avtomobil.-dorozh. in-t (tekh. un-t). – Tol'yatti, 2010
9. Kozlovskij, V.N. Perspektivnye sistemy diagnostiki upravleniya avtonomnym transportnym ob'ektom / V.N. Kozlovskij, V.V. Debelov, O.I. Deev, A.F. Kolbasov, S.V. Petrovskij, A.P. Novikova // Gruzovik. – 2017. – № 6. – S. 21-28.
10. Kozlovskij, V.N. Razvitie proektov elektromobilej i avtomobilej s kombinirovannoj energoustanovkoj / V.N. Kozlovskij, D.V. Ajdarov, M.M. Vasil'ev, V.V. Debelov // Gruzovik. – 2018. – № 6. – S. 18-21.

---

*Alexander Saxonov, PhD Student.*

*E-mail: a.s.saksonoff@yandex.ru, Russia, Samara, Samara State Technical University*

*Vladimir Kozlovsky, Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of the Department. E-mail: Kozlovskiy-76@mail.ru*

*Kirill Kireev, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor. E-mail: cir-cir@lenta.ru*

УДК 004.942 : 519.876.5

## КОНЦЕПТУАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ ЦИФРОВОГО ЗАВОДА ПРОИЗВОДСТВЕННОГО ПРЕДПРИЯТИЯ АЭРОКОСМИЧЕСКОЙ ОТРАСЛИ

© 2023 И.С. Ткаченко, Д.В. Антипов, А.В. Куприянов, В.Г. Смелов, В.В. Кокарева

Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева,  
г. Самара, Россия

Статья поступила в редакцию 08.06.2023

В статье рассматривается концептуальная модель цифрового завода производственного предприятия аэрокосмической отрасли, приводится описание ключевых элементов и их взаимосвязи  
*Ключевые слова:* киберфизическая система, цифровая фабрика, умная фабрика, виртуальная фабрика, цифровой завод, киберфизический полигон.

DOI: 10.37313/1990-5378-2023-25-3-90-106

EDN: LGNIZM

Ключевым трендом Российской и мировой промышленности является цифровая трансформация и создание киберфизических систем, интегрирующих цифровые (виртуальные) и физические компоненты, для повышения скорости проектирования, разработки и производства высокотехнологичной продукции. Создаваемым на предприятии киберфизические системы для решения задач повышения эффективности деятельности называются цифровыми заводами. Концепция цифрового завода предусматривает создание комплексных технологических решений, позволяющих разрабатывать и использовать в виде единого объекта все организационные, технологические, логистические процессы и процессы управления производственной средой за счет интеграции виртуальных моделей и киберфизических систем.

Отличительными особенностями цифрового завода являются:

- Единая система управления информацией о производстве, единое информационное пространство;

- Цифровое моделирование бизнес-процессов и технологических процессов;

- Конвергенция цифрового и физического описаний изделий. (комплексный цифровой двойник);

- Цифровой реверс инжиниринг, формирование базы данных электронных составов продукции, прототипов с использованием средств неразрушающего и разрушающего контроля, оборудования анализа физико-химических составов материалов;

- Внедрение передовых производственных технологий, включая аддитивное производство, новые виды сварки, сборки, механической обработки деталей и др.;

- Автоматизированные рабочие места (АРМ) производства, сбор данных от средств производства (MDC) и дополненная реальность (Computer Aided Workshops, CAW) с целью создания единой среды управления производственными участками, технического перевооружения и автоматизации производственных участков.

Аэрокосмическая промышленность России сегодня представлена более чем сотней крупных предприятий только в структурах Госкорпораций. Это, как правило, предприятия, которые выпускают конечную продукцию и являются звеньями сложных коопераций. Российские авиастроение и космическое машиностроение являются конкурентоспособными на мировом рынке и приводят к мультипликативным эффектам в других высокотехнологичных отраслях, однако, существует определенный комплекс проблем, затрудняющих модернизацию и технологическое развитие, среди которых: особые условия для развития научно-технологического потенциала вследствие проводимой государством политики импортозамещения; нарастающий кризис информационно-коммуникационной и энергетической инфраструкту-

---

Ткаченко Иван Сергеевич, кандидат технических наук, доцент, заместитель ректора Самарского университета, директор Передовой инженерной аэрокосмической школы, E-mail: tkachenko.is@ssau.ru

Антипов Дмитрий Вячеславович, доктор технических наук, доцент, заведующий кафедрой Производства летательных аппаратов и управления качеством в машиностроении Самарского университета. E-mail: antipov.dv@ssau.ru

Куприянов Александр Викторович, доктор технических наук, доцент, директор Института информатики и кибернетики Самарского университета. E-mail: akupr@ssau.ru

Смелов Виталий Геннадиевич, кандидат технических наук, доцент, директор Института двигателей и энергетических установок Самарского университета. E-mail: smelov@ssau.ru

Кокарева Виктория Валерьевна, кандидат технических наук, доцент кафедры технологий производства двигателей Самарского университета. E-mail: kokareva.vv@ssau.ru

ры и производственных мощностей, требующий применения технологий цифрового завода

На сегодняшний день отсутствует единая методология и стандарты создания модели цифрового завода. Каждая организация, по – своему понимают и создают элементы цифрового завода. Также существуют отраслевые особенности, влияющие на цифровую трансформацию предприятий и цели поставок. В аэрокосмической отрасли фронтальной задачей является интенсификации процессов создания и модернизации глобально конкурентоспособной, кастомизированной продукции нового поколения на основе интеграции интеллектуальных производственных и информационных технологий. Решение данной задачи экстенсивным путем, т.е. увеличение объёмов производства за счёт наращивания одинаковых в качественном отношении факторов производства, невозможно ввиду отсутствия отдельных видов ресурсов, главными из которых является время и кадры. Совершенствование технологий, развитие инженерной науки и техники и применение их достижений в производстве, развитие инженерного образования и подготовка высококвалифицированных кадров, характерные для интенсивного пути, – единственный рациональный способ решения вышеуказанной задачи.

Поэтому создание концептуальной модели цифрового завода для предприятий аэрокосмической отрасли является актуальной задачей. При создании концептуальной модели цифрового завода необходимо установить роль, место и причинно-следственные связи между широко применяемыми понятиями, такими как киберфизическая фабрика, цифровая фабрика, умная фабрика, виртуальная фабрика, цифровой завод и киберфизический полигон.

Для обобщения и систематизации научных подходов по созданию цифрового завода нами разработана концептуальная модель цифрового завода. Данная концептуальная модель цифрового завода может быть применима на любом производственном предприятии аэрокосмической отрасли. Для построения концептуальной модели цифрового завода необходимо определить цель создания цифрового завода. Целью цифрового завода является интенсификации процессов создания и модернизации глобально конкурентоспособной и кастомизированной продукции нового поколения на основе интеграции интеллектуальных производственных и информационных технологий. Достижение цели цифрового завода реализуется за счет организации мониторинга состояния производимого объекта путем отображения на цифровой модели параметров его функционирования и индикации узлов и деталей оборудования, рабочие значения параметров которых отклоняются от нор-

мальных; организация системы предиктивного обслуживания через анализ больших объемов статистических данных по работе оборудования за период времени, а также управление объектами производства через цифровую модель (передача управляющих сигналов от цифровой модели на реальный объект). В зависимости от сформулированной цели модель цифрового завода может менять свою структуру и состав.

Разработанная концептуальная модель основывается на ряде принципов построения и функционирования:

1. Иерархическая многоуровневая структура.
2. Киберфизическая система как основа цифрового завода.
3. Самообучающаяся модель.
4. Использование сквозных технологии: технологии искусственного интеллекта; технологии больших данных; облачные сервисы; новые производственные технологии; промышленный интернет вещей и др.
5. Роботизация и автоматизация производственных ячеек для создания «безлюдного» производства.

В основе концептуальной модели цифрового завода лежит киберфизическая система. Киберфизическая система – комплексная распределенная информационно-технологическая система, интегрирующая цифровые ресурсы и физические сущности любого вида для оптимизации процессов управления производственными элементами с возможностью интеллектуальной обработки и реконфигурации потоков на базе теории кибернетики, мехатроники, проектирования и науки о процессах. В киберфизических системах цифровая компонента распределена по всей физической системе, которая является её носителем, и синергетически увязана с её составляющими элементами. Киберфизическая система создается как сеть взаимодействующих физических и информационных компонентов производства (промышленного оборудования, производственной цепочки поставок), проектируемая как единая информационно-аналитическая система (ЕИАС), организованная в рамках единой модели и адаптирующаяся к изменениям требований к изделиям и ограничений производства на базе технологии взаимосвязанного комплекса математических, физических и имитационных моделей объектов с соответствующими наборами параметров, входами/выходами, управляющими воздействиями, критериями, ограничениями и переменными оптимизации.

Структурная модель киберфизической системы созданной для производственной организации приведена на рисунке 1.

Киберфизическая система производственной организации включает в себя физическое

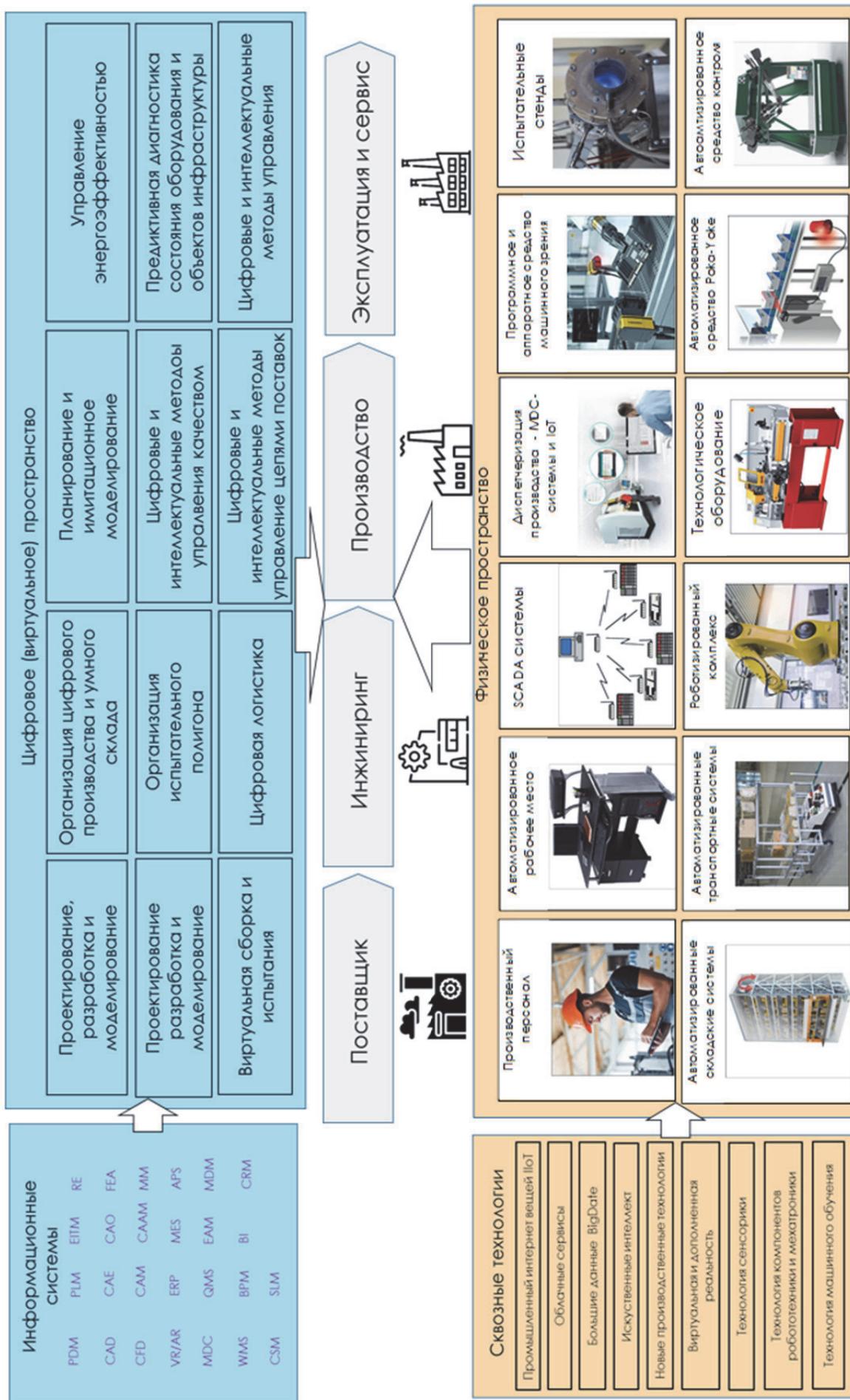


Рисунок 1 – Структурная схема киберфизической системы производственной организации

пространство с инженерно-техническим и административно-управленческим персоналом, совокупностью физических элементов (технологическое складское и транспортное оборудование, автоматизированные рабочие места, SCADA системы, устройства защиты от ошибок, предметы труда и др.) и интегрированное с ним цифровое (виртуальное) пространство. Цифровое пространство включает в себя информационные системы обеспечения выполнения процессов создания высокотехнологичной продукции в цифровом пространстве. Сквозные технологии (промышленный интернет вещей, искусственный интеллект, новые производственные технологии и др.) обеспечивают взаимодействия элементов физического пространства с цифровым. Все элементы цифрового и физического пространства киберфизической системы могут распространяться на взаимодействующие организационно-управленческие структуры: поставщики компонентов → инжиниринг → производство → эксплуатация и сервис.

Концептуальная модель цифрового завода представлена в виде структурной модели на рисунке 2. Структурная модель состоит из совокупности трех типов компонентов:

- Процессы, протекающие в концептуальной модели цифрового завода. Процессы включают этапы жизненного цикла изделия, а также цепи поставок комплектующих и предприятия, осуществляющие эксплуатацию и сервис аэрокосмической техники.

- Цифровые сервисы, к которым относятся цифровые платформы, программное обеспечение, имитационные модели и цифровые двойники и др.

- Физические компоненты, к которым относятся персонал, автоматизированное технологическое, контрольно-измерительное, испытательное и вспомогательное оборудование, датчики и сенсоры, системы транспортировки и хранения, системы защиты от ошибок и др.

Концептуальная модель цифрового завода является иерархической трехуровневой структурой (Таблица 1).

Каждый последующий (верхний) уровень включает в себя предыдущий (нижний). Совокупность трех уровней является цифровым заводом. Цифровой завод – системы комплексных технологических решений, обеспечивающая в кратчайшие сроки производство глобально конкурентоспособной продукции нового поколения от заготовки до готового изделия, являющейся киберфизической системой и объединяющей в себе «Цифровую фабрику», «Умную фабрику» и «Виртуальную фабрику».

Для эффективного использования цифровых технологий необходимо преобразовать процессы, происходящие в физическом пространстве, в

информационные процессы, а также иметь возможность обратного преобразования. В рамках концептуальной модели цифрового завода решается проблема адекватного моделирования алгоритма жизненного цикла изделия, т.е. установления взаимно однозначного соответствия между физическим и цифровым пространством. Комплексы предметно-ориентированного прикладного программного обеспечения предназначены для структурирования массива данных и автоматизации управления физическими и информационными процессами на протяжении всего жизненного цикла изделия.

Первым уровнем цифрового завода является цифровая фабрика, в основе которой заложены цифровые модели изделий, рабочих процессов, материалов и технологий производства, связанные с техническими (а также экономическими) условиями и требованиями, которые находятся в единой для всех участников производственной цепочки информационно-аналитической среде – PLM-системе. Посредством передачи данных об изделии в контуре цифровой фабрики формируется цифровой двойник и цифровом паспорте изделия, которые связывает данные об изделии со всеми внутренними и внешними отделами по ходу протекания бизнес-процессов (проектирования, снабжения, производства, испытаний), и формализует актуальные данные об изделии. Так, например, на этапе испытаний или эксплуатации изделия в цифровом двойнике отображаются реальные эксплуатационные параметры, которые определяют качество изделия, его производительность и др. показатели. На основе этих данных принимается решение об улучшении изделия, оптимизации его конструкции или технологии производства.

Цифровая фабрика в концептуальной модели цифрового завода представлена совокупностью процессов, цифровых и физических компонентов. В таблице 2 приведены процессы цифровой фабрики.

Цифровая фабрика использует цифровые двойники изделий для создания комплексной цифровой модели проектируемого изделия или узла, включая учет допусков, шероховатости, свойств материала, сложности геометрии и технологического процесса формообразования, доступности и параметров эффективности производственного оборудования для автоматического анализа проектируемой конструкции изделия или узла с точки зрения технологичности и стоимости. Так, конструкторы анализируют 3D модель изделия (CAD-модель) на соответствие требованиям Заказчика, в том числе по стоимости, исходя из серийности производства, технологи используют эти данные для подбора оптимальных режимов технологического процесса, формируя CAM-модели и

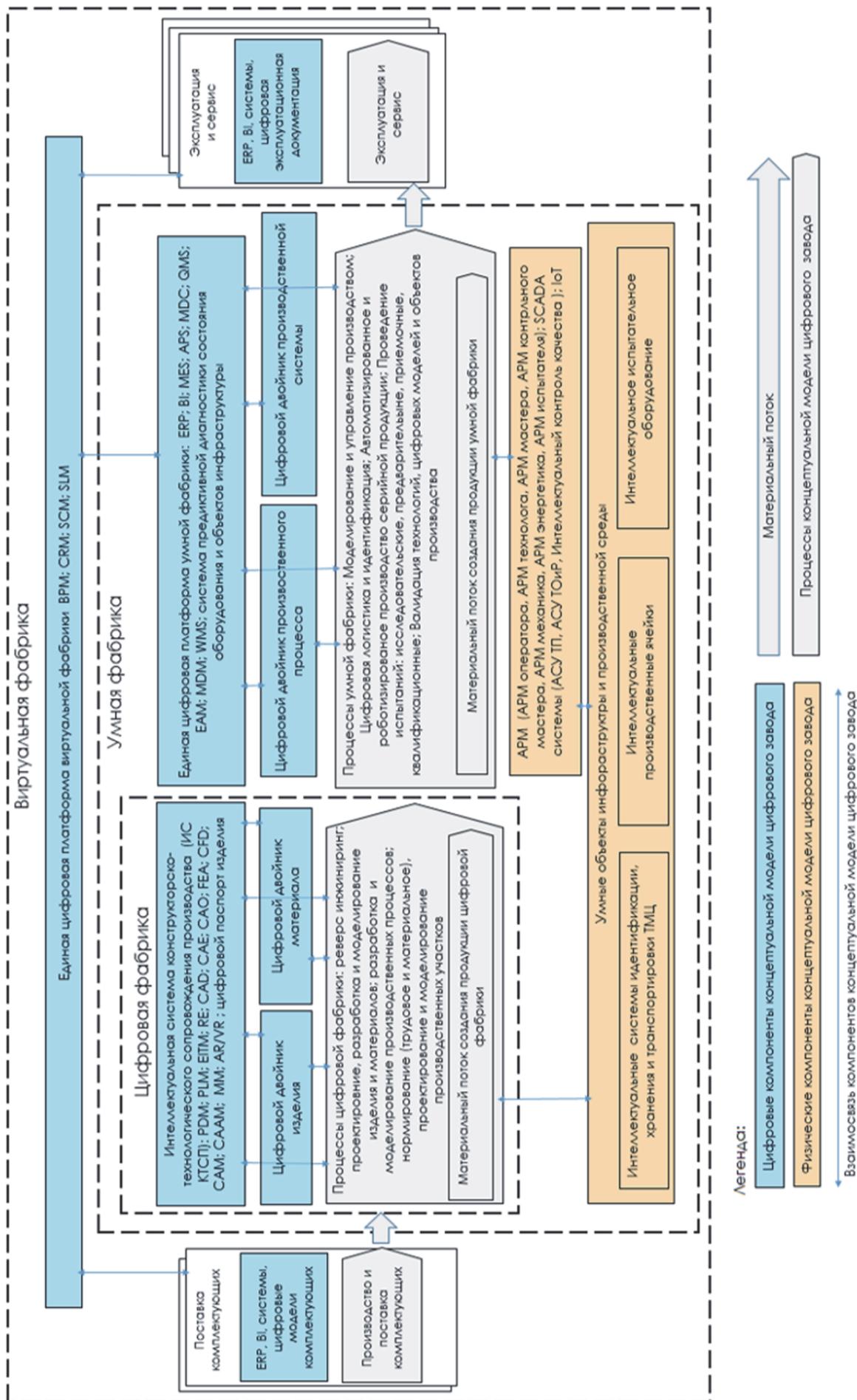


Рисунок 2 – Обобщенная структурная модель цифрового завода

Таблица 1 – Уровни концептуальной модели цифрового завода

Уровень	Наименование	Описание
1	Цифровая фабрика	<p>Цифровая фабрика – киберфизическая система, обеспечивающие в кратчайшие сроки проектирование и производство глобально конкурентоспособной продукции нового поколения от стадии исследования и планирования, когда закладываются базовые принципы изделия, и заканчивая созданием цифрового макета, «цифрового двойника», опытного образца или мелкой серии.</p> <p>Цель цифровой фабрики – обеспечить кратчайшие сроки проектирования и разработки глобально конкурентоспособной продукции за счет цифровизации процессов.</p>
2	Умная фабрика	<p>Умная фабрика – киберфизическая система, обеспечивающие в кратчайшие сроки производство глобально конкурентоспособной продукции нового поколения от заготовки до готового изделия, отличительными чертами которого является высокий уровень автоматизации и роботизации, исключая человеческий фактор и связанные с этим ошибки, ведущие к потере качества («безлюдное производство»). В качестве входного продукта умных фабрик, как правило, используются результаты работы цифровых фабрик.</p> <p>Цель умной фабрики – обеспечить гибкость, скорость, качество и эффективность серийного изготовления глобально конкурентоспособной продукции за счет создания роботизированного и автоматизированного («безлюдного») производства.</p>
3	Виртуальная фабрика	<p>Виртуальная фабрика – киберфизическая система, обеспечивающие в кратчайшие сроки проектирование и производство глобально конкурентоспособной продукции нового поколения за счет объединения Цифровых и (или) «Умных» фабрик в распределенную сеть. Виртуальная фабрика подразумевает наличие информационных систем управления предприятием (Enterprise Application Systems, EAS), позволяющих разрабатывать и использовать в виде единого объекта виртуальную модель всех организационных, технологических, логистических и прочих процессов на уровне глобальных цепочек поставок (поставки → производство → дистрибуция и логистика → сбыт → послепродажное обслуживание) и (или) на уровне распределенных производственных активов.</p> <p>Цель виртуальной фабрики – обеспечить скорость, качество и эффективность проектирования и производства глобально конкурентоспособной продукции за счет создания единой, распределенной сети цифровых и умных фабрик.</p>

Таблица 2 – Процессов цифровой фабрики

№	Процесс	Цифровые компоненты
1.	Реверс инжиниринг	процессы создания цифровой копии объекта по уже существующему образцу, обладающей такими же физическими характеристиками, с последующей разработкой технологии его производства и ее реализацией.
2.	Автоматизированное проектирование, разработка и моделирование изделия	Процессы проектирования разработки и моделирования изделий на базе организационно-технической системы автоматизации процессов проектирования, состоящей из распределенного комплекса технических, программных и других средств автоматизации, включающей: инженерные расчеты; создание конструкторской и технологической документации; 3D-моделирование.
3.	Автоматизированная разработка и моделирование материалов.	Процессы проектирования и имитационно-численного моделирования технологических процессов с возможностью прогнозирования новых возможных материалов и их свойств математическими методами, определяющие взаимосвязь «конструкция - состав-технология-свойства».
4.	Разработка и моделирование производственных процессов.	Процессы разработки производственных процессов и технологических операций, расчета загрузки производственных участков, создания цифровых моделей производственных систем, анализа загруженности производственных систем и их балансировка.
5.	Нормирование (трудовое и материальное).	Процессы расчета необходимых затрат труда (времени) на выполнение работ (изготовление единицы продукции, оказание услуг) отдельными работниками (группами работников) и установление на этой основе норм труда при проектировании и производстве продукции. Инструменты оценки показателей затрат труда, необходимых для выполнения конкретных объемов работ в определенных организационно-технических условиях.
6.	Проектирование и моделирование производственных участков.	Процессы проектирования и моделирования производственных систем, анализа, улучшения, поиска и сравнения альтернативных вариантов производственных маршрутов, балансировки производственных и складских систем, распределения производственных потоков между цеховыми системами.
7.	Управление инженерными данными.	Процессы управление информацией об изделии (в классе PDM/PLM систем), включающие: управление инженерными данными; управление составом изделия и документами; управление изменениями; управление техническими данными; управление конфигурациями изделий; управление процессами и потоками работ; управление хранением данных и электронным архивом.

ИПЯ, снабженцы занимаются приобретением материалов и инструментов, планово-диспетчерский отдел (ПДО) планирует загрузку производственных мощностей, что в конечном итоге приводит к выявлению потенциальных проблем в цепочке поставок на ранних стади-

ях проектирования, анализу себестоимости и принятию решений о выборе тех или иных технологических процессов.

В таблице 3 приведены цифровые компоненты «Цифровой фабрики».

Задачи, решаемые цифровой фабрикой:

Таблица 3 – Цифровые компоненты «Цифровой фабрики»

№	Цифровые компоненты	Описание
1.	Интеллектуальная система конструкторско-технологического сопровождения производства (ИС КТСП)	<p>Система для интеграции в единый цифровой контур (платформу) на базе PDM-системы программных систем всех этапов создания деталей сборочных единиц (ДСЕ), сопряженных цифровых моделей и данных, алгоритмов достижения согласованных параметров надежности, качества и точности на основе верификации виртуальных и натуральных экспериментов.</p> <p>ИС КТСП содержит:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- базу данных результатов численного моделирования, виртуальных и натуральных испытаний, экспериментальных исследований;</li> <li>- верифицированные цифровые модели конструкции ДСЕ и технологических процессов, обеспечивающие требуемые функциональные характеристики ДСЕ и повышение эффективности производства;</li> <li>- конечно-элементные и иные, в том числе параметрические, модели физических, тепловых, прочностных и газодинамических процессов, модели свойств материалов, технологические модели объектов цифрового производства, предназначенные для оптимизации ключевых показателей эффективности производства;</li> <li>- данные об апробированных технологических режимах;</li> <li>- управляющие программы (далее – УП) для оборудования с ЧПУ.</li> </ul>
2.	PDM - система	Система управления данными об изделии с начала формирования требований к изделию и заканчивая передачей производственного состава в учетные системы ERP и MES.
3.	PLM-система	Системы, позволяющие отслеживать и управлять информацией о продукте с момента создания идеи и проектирования до доставки клиенту включающая в себя: хранение и управление документацией; управление рабочим процессом; контроль доступа; создание отчетности; планирование; управление цепочками поставок; контроль качества; управление стоимостью продукта; отслеживание статуса продукта.
4.	EITM - система	Сервисная модель для интеграции ИТ в бизнес-операции: обеспечение, отслеживание и проектирование бизнес-услуг в сфере ИТ, EITM также обеспечивает управление и управление безопасностью.
5.	RE - система	Система для реализации процессов реверс инжиниринга, включающие в себя программные и аппаратные средства.
6.	CAD-система	Система для автоматизации процессов проектирования и производства изделий, в том числе, двумерного, трехмерного проектирования, создания конструкторской, технологической документации.

**Таблица 3 – Цифровые компоненты «Цифровой фабрики» (окончание)**

7.	CAE-система	Система для осуществления инженерных расчетов и моделирования технологических процессов, включающая в себя: - моделирование условий рабочего процесса; - анализ внешних воздействий; - анализ систем управления; - анализ напряжений, динамики компонентов и узлов (анализ конечных элементов); - тепловой и жидкостной анализ с использованием принципов вычислительной гидродинамики; - кинематика и динамический анализ механизмов; - акустический анализ с использованием FEA или метода граничных элементов.
8.	CAO - система	Система многопараметрической топологической оптимизации конструкции, оптимизация формы и размера продукта при статических и динамических нагрузках.
9.	CAM-система	Система для автоматизации расчетов траекторий перемещения режущего инструмента для обработки на станках с числовым программным управлением (далее – ЧПУ) и обеспечение выдачи управляющих программ с помощью компьютера.
10.	СААМ - система	САМ-система для аддитивного производства, содержащая разработку технологических процессов, синтез управляющих программ для оборудования и моделирование процессов обработки.
11.	ММ-система	Системы, обеспечивающие процесс построения математических моделей и изучения с их помощью свойств моделируемого объекта или явления. Функционал ММ-систем включает в себя построение математической модели с учетом необходимых для анализа факторов, проверку гипотез, прогнозирование и оптимизацию объекта исследования.
12.	AR/VR – системы (технологии виртуальной и дополненной реальности)	Технологии, позволяющие с использованием устройств визуализации (очки AR/VR, мобильные планшеты и смартфоны) дополнять реальные производственные объекты информацией, организовывать доступ к документации, не отвлекаясь от рабочего процесса, а также визуализировать рабочие инструкции по выполнению производственных процессов непосредственно на объектах производства.

1. Конструкторская подготовка (модель включает процесс проектирования изделия/ДСЕ с проведением инженерных расчетов, виртуальных сборок и испытаний).

2. Разработка технологических операций (модель включает процесс изменения формы или свойств материала заготовки: механическая обработка, обработка давлением, термическая обработка, литье, сварка, аддитивные технологии)

3. Разработка технологических процессов

(модель включает все операции: основные и вспомогательные)

4. Разработка производственных процессов (модель включает основные процессы, вспомогательные процессы: ИПЯ, поставка, управление складами, человеческими ресурсами)

5. Разработка программ и методик натуральных испытаний.

Основными «цифровыми» результатами функционирования цифровой фабрики являются:

- Цифровой паспорт изделия – цифровая

модель изделия, который ассоциируется с физическим изделием с помощью идентификации (QR-кода, штрих-кода NFC). Цифровой паспорт представляет собой кортеж (набор данных), который состоит из множества классов, атрибутов, матрицы сопоставлений атрибутов классов и смежности классов. Электронные данные изделия/ДСЕ в цифровом паспорте содержат всю необходимую актуальную (in situ) информацию, характеризующую этапы КТПП, производства, испытания, эксплуатации и представляют собой передаваемые через IoT электронные документы различных форматов, графические (2D и 3D) объекты, файлы с результатами измерений и т.п. Таким образом, цифровой паспорт является «живой» электронной структурой изделия/ДСЕ, обобщающим документом, консолидирующим все технические данные об изделии, полученные по ходу реализации бизнес-процессов производства.

- Цифровой двойник материала - цифровой двойник, состоящий из цифровой модели материала и двусторонних информационных связей с материалом (при наличии материала) и (или) его составными частями. Цифровой двойник разрабатывается и применяется на всех стадиях жизненного цикла материала. При создании и применении цифрового двойника материала участникам процессов жизненного цикла рекомендуется применять программно-технологическую платформу цифровых двойников.

- Цифровой двойник изделия - цифровой двойник, состоящая из цифровой модели изделия и двусторонних информационных связей с изделием (при наличии изделия) и (или) его составными частями. Цифровой двойник разрабатывается и применяется на всех стадиях жизненного цикла изделия. При создании и применении цифрового двойника изделия участникам процессов жизненного цикла рекомендуется применять программно-технологическую платформу цифровых двойников.

Цифровая модель изделия - система математических и компьютерных моделей, а также электронных документов изделия, описывающая структуру, функциональность и поведение вновь разрабатываемого или эксплуатируемого изделия на различных стадиях жизненного цикла, для которой на основании результатов цифровых и (или) иных испытаний по ГОСТ 16504 выполнена оценка соответствия предъявляемым к изделию требованиям.

Вторым уровнем цифрового завода является умная фабрика, в основе которой заложены реальные физические производственные пространства с соответствующими им цифровыми моделями (имитационными моделями) производственных систем, настраиваемыми с использованием конкретного оборудования и технологических процессов (решений), маршрутов,

объемов производства. Данные модели являются адаптируемыми к реальному ходу производства (посредством MDC-систем и датчиков) и позволяют анализировать различные сценарии производственных процессов с оценкой времени цикла для каждого технологического процесса и его текущей стоимости (оплату труда, расходы на материалы, амортизацию, инструмент и оснастку, накладные расходы).

В таблице 4 приведены процессы «Умной фабрики».

Моделирование и управление производством направлено на создание аналитических сервисов оперативного календарного планирования, учитывающих отклонения от плана и потребностей в дополнительных ресурсах для управления. Компьютерная реализация адаптивных автоматизированных систем управления производством, характеризующихся изменениями состава вектора цели и решающие следующие задачи:

- фактографическое прогнозирование по динамическим рядам и матрицам;

- сценарный анализ для прогнозной, экспертной оценки наборов возможных состояний производственной системы и цепочки поставок;

- выбор оптимальной альтернативы – для экспертного выбора наилучшего варианта альтернативного решения любой слабо структурированной проблемы;

- факторный анализ – для отбора и формирования набора показателей (факторов) существенных для управления производственной системой и цепочкой поставок;

- дискриминантный и кластерный анализ для определения во внешних и внутренних средах производства естественных групп той или иной специализации и направленности, влияющих и определяющих KPI;

- построение функциональной модели изделия, отражающей взаимосвязи между отдельными функциями и характеристиками; анализ качества изделия по всем этапам ЖЦИ, в т.ч. потребителей в процессе эксплуатации для отображения действительных функциональных возможностей;

- поддержание оптимальных режимов работы производства с помощью компьютерной техники.

В таблице 5 приведены цифровые компоненты Умной фабрики.

При создании цифрового двойника производственного процесса определяются виртуальные единицы основного оборудования, согласно спроектированного ТП. Затем организуется связь между ними на уровне входных и выходных сигналов, посылаемых между устройствами. Далее моделируются основные и вспомогательные операции (задачи) для отдельных

**Таблица 4 – Процессы «Умной фабрики»**

№	Процесс	Описание
1.	Моделирование и управление производством.	Процессы создания системы адаптивного автоматизированного управления производством в условиях ограниченности ресурсов, изменяющихся внешних и внутренних факторов производственной среды. Под адаптацией понимается процесс изменения структуры, параметров и алгоритмов производственной системы на основе актуальной «in situ» информации, получаемой в процессе управления, с целью достижения оптимального состояния или поведения системы при начальной неопределенности и изменяющихся условиях работы, определяемых во взаимодействии с внешней средой.
2.	Цифровая логистика и идентификация.	Процессы применения мультиагентных технологий для цифровизации логистики и цепей поставок, внедрение набора инновационных технологий, используемых в e-SCM, включающего RFID, Mobileapp, Big Data, Cloud Services, IoT, Blockchain, 3D Printing и другие цифровые технологии.
3.	Автоматизированное и роботизированное производство серийной продукции.	Процессы организации интеллектуальных производственных ячеек (ИПЯ) - функциональных производственных единиц, в состав которых входит оборудование, оснастка, транспортные линии, средства автоматизации и измерения качества, для реализации цепочки комплексных технологических решений при производстве продукции.
4.	Проведение испытаний: исследовательские, предварительные, приемочные, квалификационные.	<p>Процессы исследовательских испытания – испытания, проводимые для изучения (исследования) характеристик свойств объекта испытаний.</p> <p>Цель исследовательских испытаний:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Определение или оценка показателей качества объекта;</li> <li>2. Выбор оптимальных характеристик объекта и режимов его функционирования;</li> <li>3. Сравнение множества вариантов реализации объекта при проектировании;</li> <li>4. Выбор существенных факторов, влияющих на показатели качества объекта.</li> </ol> <p>Процессы предварительные – контрольные испытания опытных образцов и (или) опытных партий продукции с целью определения возможности их предъявления на приемочные испытания.</p> <p>Процессы приемочные – контрольные испытания опытных образцов продукции или изделий единичного производства, проводимые с целью решения вопроса о целесообразности постановки этой продукции на производство и (или) использованию по назначению.</p> <p>Процессы квалификационных испытаний – контрольные испытания установочной серии или первой промышленной партии, проводимые с целью оценки готовности предприятия к выпуску данного типа в заданном объеме.</p>
5.	Валидация технологий, цифровых моделей и объектов производства.	Процессы валидации – проверка правильности работы (предсказательной способности) аналитической модели а также удостоверение, что она соответствует требованиям решаемой задачи. Валидация осуществляется путем планирования и проведения экспериментов разного вида, в том числе натурные испытания проектируемых изделий.

устройство, например, извлечение из формы и перемещение роботами полученной заготовки, удаление материала поддержек, перемещение по конвейеру и т. д.

В результате моделирования получают следующие данные:

- четырехмерная (3D + время) модель автоматизированного участка;
- управляющие программы для промышленных роботов;
- алгоритм взаимодействия оборудования;
- модели технологической оснастки;

Таблица 5 – Цифровые компоненты Умной фабрики

№	Цифровые компоненты	Описание
1.	Единая цифровая платформа умной фабрики	Распределенная система – совокупность логически интегрированных и территориально распределенных элементов, языковых, программных и технических и организационных средств, предназначенных для формирования и хранения данных, обработки информации, выработки и реализации решений. Распределенная система включает в себя совокупность технических средств и программного обеспечения, а также методов обработки информации и действий персонала, обеспечивающая выполнение автоматизированной обработки информации. Используется для различных видов деятельности при принятии решений (в том числе и многокритериальных) в ситуациях, когда невозможно или затруднительно иметь автоматическую систему из-за слабой структурированности или не структурированности решаемых задач.
2.	ERP-системы	Системы для автоматизации управления цепочками поставок и учета финансовых и нефинансовых активов предприятия, включающее в себя модули управления: системами бухгалтерского учета; персоналом; логистикой; планированием и управлением производством.
3.	BI-системы	Системы для анализа больших объемов данных, обеспечивающее загрузку данных из всех доступных источников, их обработку и преобразование, прогнозирование на основе изменяющихся значений и визуализацию.
4.	MES-системы	Системы, обеспечивающее синхронизацию, координацию, анализ и оптимизацию процессов выпуска продукции на предприятии, отслеживание соответствия нормативным требованиям, сбор информации о производственном процессе на основе измерений датчиков, показаний оборудования, действий персонала и т.д. в режиме реального времени. Система включает планирование производства на основе работы систем и сотрудников, контроль параметров качества и количества отбракованных изделий; оперативное предоставление информации о ходе производства.
5.	APS-системы	Системы для управления набором параметров технологического процесса в режиме реального времени с целью сокращения потерь и увеличения эффективности производства за счет оптимизации технологических процессов.

Таблица 5 – Цифровые компоненты Умной фабрики (окончание)

6.	MDC - системы	Система мониторинга работы промышленного оборудования и производственного персонала, включает модули: - управление простоями; - управление программами для станков с ЧПУ; - управление производственными заданиями. Контроль эффективности работы оборудования, операторов, технических служб осуществляется с применением ключевых показателей эффективности (КПЭ), которые рассчитываются за определенный период и сравниваются с плановыми.
7.	QMS - системы	Системы управления качеством по циклу PDCA (аббревиатура от PLAN-DO-CHECK-ACT), направленная на предупреждения появления несоответствий и обнаружения несоответствий на этапах жизненного цикла изделий. В системе описываются критерии контроля качества всех бизнес-процессов и продукции, на базе которых создается план управления качеством (Control Plan) производства. В результате данные будут храниться не в бумажном, а в электронном виде, и пригодны для дальнейшей обработки. План управления качеством связывает производственный заказ с соответствующей технологией контроля.
8.	EAM-системы	Система для управления основными фондами, в том числе для целей оптимизации процессов управления оборудованием и сокращения затрат на техническое обслуживание и ремонт (ТОиР): отслеживание состояния активов (их классификация, мониторинг производственных показателей); оптимизация процессов управления активами; планирование и прогнозирование затрат на ТОиР; управление цепочками поставок; управление документооборотом (управление запросами на ТОиР и т.п.); оценка рисков.
9.	MDM-системы	Системы, структурирующее разнородную информацию компании, объединяя ее из различных источников и систем и отображая стандартизированные данные внутри информационных систем компании.
10.	WMS-системы	Система для централизации и оптимизации управления складскими операциями за счет мониторинга складских объектов в режиме реального времени на всех этапах жизненного цикла.
11.	Система предиктивной диагностики состояния оборудования и объектов инфраструктуры	Комплекс программно-аппаратных средств, решающих задачи постоянного контроля технического состояния оборудования, прогнозирования неисправностей, на основе действующих данных, получа-

- определение и оптимизация времени производственного цикла;

- расчет производительности автоматизированного литейного участка.

Ключевым физическим компонентом умной фабрики является – интеллектуальная произ-

водственная ячейка, объектная схема которой приведена на рисунке 3.

В состав интеллектуальной производственной ячейки входит оборудование, оснастка, транспортные линии, средства автоматизации и измерения качества, для реализации цепоч-

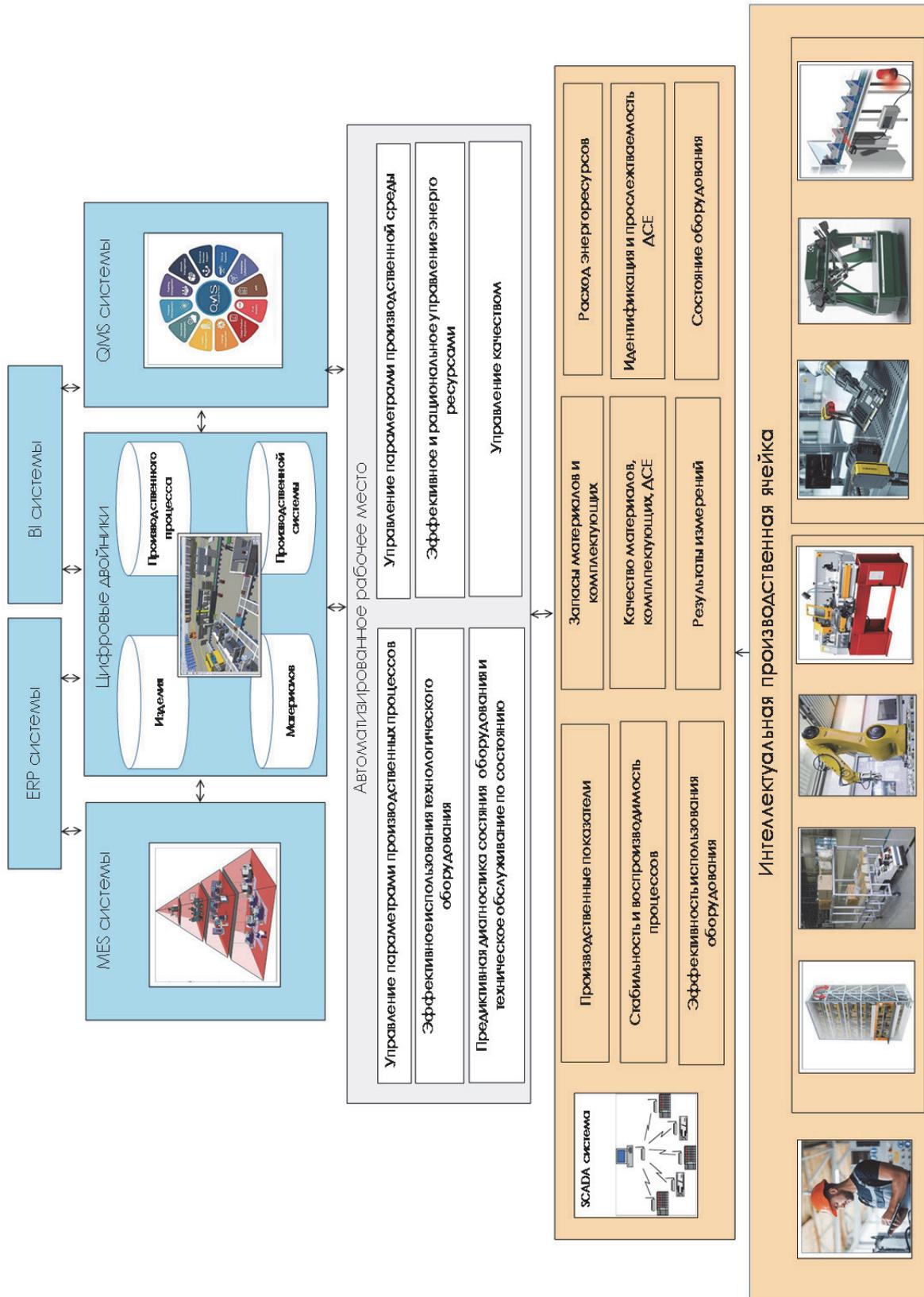


Рисунок 3 – Объектная схема взаимодействия интеллектуальной производственной ячейки

производстве продукции. Особенность ячейки – адаптация к требованиям продукции, отклонениям в производстве, возможность предиктивной диагностики технического состояния оборудования и планирования производственной мощности, контролируя использование оборудования и качество производственного

процесса. ИПЯ организованные согласно принципам модульности, оснащенные сетевой инфраструктурой, мобильными роботами.

Основными «цифровыми» результатами функционирования «умной фабрики» являются:

Цифровой двойник производственного процесса – это цифровая копия, производственного

Таблица 6 – Цифровые компоненты «Виртуальной фабрики»

№	Цифровые компоненты	Описание
1.	ВРМ-системы	Системы для создания схем и алгоритмов взаимодействия сотрудников, осуществления документооборота, отслеживания этапов взаимодействий в бизнес-процессах, выявления узких мест и недостатков системы
2.	CRM-системы	Системы, представляющие собой сервис, объединяющий ПО для сбора данных о клиентах, управления сделками, задачами и проектами, анализа эффективности взаимодействий с клиентами и прогнозирования продаж
3.	SCM-системы	Системы, основной задачей которых является мониторинг цикла производства товара или услуги на всех этапах жизненного цикла. Ключевым эффектом имплементации SCM-систем в производственные процессы является оптимизация процессов планирования закупок, производства. В основе SCM-систем лежат две подсистемы, взаимодействующие между собой:  SCE-подсистема – система выполнения цепочек поставок: отслеживание заказов (OMS-системы), управление перевозками (TMS-системы) и контроль складских операций (WMS-системы);  SCP-подсистема – система планирования цепочек поставок: планирование, оптимизация и анализ цепочек поставок и использования сырья в соответствии с календарным графиком; прогнозирование сроков и объемов поставок.
4.	SLM-системы	Системы, в основе которых прописываются регламенты, ведётся контроль качества оказанных услуг, определяются нарушения сроков, для регламентирования уровня сервиса и контроля соответствия услуг ожиданиям потребителей.

процесса, включающего в себя людей, рабочих мест, систем и устройств, используемых в рамках процесса. Цифровые двойники объединяют искусственный интеллект, машинное обучение и программный анализ с графами пространственных сетей для создания живых цифровых имитационных моделей, которые обновляются и меняются по мере изменения их физических аналогов.

- Цифровой двойник производственной системы - это цифровая копия производственной системы, включающей в себя совокупность производственных процессов людей, рабочих мест,

систем и устройств, которые могут использоваться для различных целей, в рамках производственной системы.

Третьем уровнем цифрового завода является виртуальная фабрика, распространенная на цепь поставок и цепь предприятий по сервису и эксплуатации. Единая цифровая платформа виртуальной фабрики предназначена для анализа информационной ситуации и выработки управленческих решений путем коммуникации между физическими сущностями и их цифровыми моделями - высокотехнологичный диспетчерский центр (мониторинг)

Хаб для сбора и анализа данных, обеспечивающий видимость цепи поставок для принятия решений – прозрачность и оптимизация цепей поставок.

Единая цифровая платформа виртуальной фабрики решает две основные задачи:

- Анализ информационной ситуации, в которой находится объект управления.

- Выработка набора управленческих решений для последующего их принятия в главном центре управления.

В таблице 6 приведены цифровые компоненты «Виртуальной фабрики».

Виртуальная фабрика обеспечивает единое информационно-технологическое пространство для генерации и отслеживания информации, параметров материальных потоков и/или стоимости в процессе мониторинга ключевых процессов в цепях поставок.

Таким образом, решена важная научная задача, направленная на обобщение, систематизацию и структурирование накопленного опыта в области создания цифрового завода. В статье приведено описание разработанной концептуальной модели цифрового завода. Разработаны и описаны принципы создания и функционирования цифрового завода, разработаны структурные, процессные и объектные модели цифрового завода и его составляющих цифровой фабрики, умной фабрики и виртуальной фабрики. Разработанная концептуальная модель цифрового завода описывает взаимосвязь всех процессов цифровой фабрики, умной фабрики и виртуальной фабрики, а также цифровых и физических компонентов. Необходимо отметить, что в «центре» любого цифрового завода находится персонал организации, который, для решения функциональных задач, направленных на создание высокотехнологичной продукции, использует всю созданную систему. Данный персонал должен владеть требуемыми компетенциями и быть готовым их применять в условиях цифровизации и роботизации производственных процессов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. ГОСТ Р 57700.37– 2021 «Компьютерные модели и моделирование. Цифровые двойники изделий. Общие положения».
2. ГОСТ Р 59799 – 2021 «Умное производство. Модель эталонной архитектуры индустрии 4.0 (RAMI 4.0)».
3. Разъяснения к объявлению о проведении отбора на предоставление грантов в форме субсидий из федерального бюджета на поддержку программ развития передовых инженерных школ, обеспечение прохождения практик и стажировок, в том числе в формате работы с наставниками, для талантливых студентов лучших магистерских программ, обеспечение повышения квалификации и (или) профессиональной переподготовки, в том числе в форме стажировки на базе высокотехнологичных компаний, для профессорско-преподавательского состава и управленческих команд передовых инженерных школ, а также образовательных организаций высшего образования, реализующих образовательные программы инженерного профиля, в рамках реализации федерального проекта «Передовые инженерные школы» государственной программы Российской Федерации «Научно-технологическое развитие Российской Федерации». – URL: [https://engineers2030.ru/upload/iblock/891/xed8rsgurf9dnhju0tcg99w9xv1du3h/Obyavlenie\\_PISH\\_28\\_04\\_22-dlya-pdf.pdf](https://engineers2030.ru/upload/iblock/891/xed8rsgurf9dnhju0tcg99w9xv1du3h/Obyavlenie_PISH_28_04_22-dlya-pdf.pdf) (дата обращения 20.05.2023)
4. ПНСТ 429–2020 Умное производство. Двойники цифровые производства. Часть 1. Общие положения.
5. Боровков, А.И. Цифровое производство. Методы, экосистемы, технологии / А.И. Боровков, Л.В. Лысенко, П.Н. Биленко и др. – М., 2017.
6. Боровков, А.И. Цифровые двойники: определение, подходы и методы разработки В сборнике: Цифровая трансформация экономики и промышленности. Сборник трудов научно-практической конференции с зарубежным участием / А.И. Боровков, Ю.А. Рябов. – Под редакцией А.В. Бабкина. – 2019. – С. 234–245.
7. Боровков, А.И. Цифровые двойники в высокотехнологичной промышленности. Краткий доклад (сентябрь 2019 года) / А.И. Боровков, А.А. Гамзикова, К.В. Кукушкин, Ю.А. Рябов – СПб., 2019.
8. Боровков, А.И. Цифровые двойники и цифровая трансформация предприятий ОПК / А.И. Боровков, Ю.А. Рябов, К.В. Кукушкин, В.М. Марусева, В.Ю. Кулемин // Вестник Восточно-Сибирской Открытой Академии. – 2019. – № 32. – С. 2.

## CONCEPTUAL MODEL OF THE DIGITAL PLANT OF MANUFACTURING ENTERPRISES IN THE AEROSPACE INDUSTRY

© 2023 I.S. Tkachenko, D.V. Antipov, A.V. Kupriyanov, V.G. Smelov, V.V. Kokareva

Samara National Research University named after Academician S.P. Korolev

The article discusses the conceptual model of a digital factory of an aerospace manufacturing enterprise, describes the key elements and their relationship.

*Keywords:* cyber-physical system, digital factory, smart factory, virtual factory, digital factory, cyber-physical testing ground.

DOI: 10.37313/1990-5378-2023-25-3-90-106

EDN: LGNIZM

## REFERENCES

1. GOST R 57700.37– 2021 «Komp'yuternye modeli i modelirovanie. Cifrovye dvojniki izdelij. Obshchie polozheniya».
2. GOST R 59799 – 2021 «Umnoe proizvodstvo. Model' etalonnoj arhitektury industrii 4.0 (RAMI 4.0)».
3. Raz'yasneniya k ob'yavleniyu o provedenii otbora na predostavlenie grantov v forme subsidij iz federal'nogo byudzheta na podderzhku programm razvitiya peredovyh inzhenernyh shkol, obespechenie prohozhdeniya praktik i stazhirovok, v tom chisle v formate raboty s nastavnkami, dlya talantlivyh studentov luchshih masterskih programm, obespechenie povysheniya kvalifikacii i (ili) professional'noj perepodgotovki, v tom chisle v forme stazhirovki na baze vysokotekhnologichnyh kompanij, dlya professorsko-prepodavatel'skogo sostava i upravlencheskih komand peredovyh inzhenernyh shkol, a takzhe obrazovatel'nyh organizacij vysshego obrazovaniya, realizuyushchih obrazovatel'nye programmy inzhenernogo profilya, v ramkah realizacii federal'nogo proekta «Peredovye inzhenernye shkoly» gosudarstvennoj programmy Rossijskoj Federacii «Nauchno-tehnologicheskoe razvitie Rossijskoj Federacii». – URL: [https://engineers2030.ru/upload/iblock/891/xed8rsgurfg9dnhju0tcg99w9xv1du3h/Obyavlenie\\_PISH\\_28\\_04\\_22-dlya-pdf.pdf](https://engineers2030.ru/upload/iblock/891/xed8rsgurfg9dnhju0tcg99w9xv1du3h/Obyavlenie_PISH_28_04_22-dlya-pdf.pdf) (data obrashcheniya 20.05.2023)
4. PNST 429–2020 Umnoe proizvodstvo. Dvojniki cifrovye proizvodstva. CHast' 1. Obshchie polozheniya.
5. Borovkov, A.I. Cifrovoye proizvodstvo. Metody, ekosistemy, tekhnologii / A.I. Borovkov, L.V. Lysenko, P.N. Bilenko i dr. – M., 2017.
6. Borovkov, A.I. Cifrovye dvojniki: opredelenie, podhody i metody razrabotki V sbornike: Cifrovaya transformaciya ekonomiki i promyshlennosti. Sbornik trudov nauchno-prakticheskoy konferencii s zarubezhnym uchastiem / A.I. Borovkov, Yu.A. Ryabov. – Pod redakciej A.V. Babkina. – 2019. – S. 234-245.
7. Borovkov, A.I. Cifrovye dvojniki v vysokotekhnologichnoj promyshlennosti. Kratkij doklad (sentyabr' 2019 goda) / A.I. Borovkov, A.A. Gamzikova, K.V. Kukushkin, Yu.A. Ryabov – SPb., 2019.
8. Borovkov, A.I. Cifrovye dvojniki i cifrovaya transformaciya predpriyatij OPK / A.I. Borovkov, YU.A. Ryabov, K.V. Kukushkin, V.M. Maruseva, V.Yu. Kulemin // Vestnik Vostochno-Sibirskoj Otkrytoj Akademii. – 2019. – № 32. – S. 2.

*Ivan Tkachenko, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Deputy Rector of Samara University, Director of the Advanced Aerospace Engineering School.*

*E-mail: [tkachenko.is@ssau.ru](mailto:tkachenko.is@ssau.ru)*

*Dmitry Antipov, Doctor of Technical Sciences, Associate Professor, Head of the Department of Aircraft Production and Quality Management in Mechanical Engineering of Samara University. E-mail: [antipov.dv@ssau.ru](mailto:antipov.dv@ssau.ru)*

*Alexander Kupriyanov, Doctor of Technical Sciences, Associate Professor, Director of the Institute of Informatics and Cybernetics of Samara University. E-mail: [akupr@ssau.ru](mailto:akupr@ssau.ru)*

*Vitaly Smelov, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Director of the Institute of Engines and Power Plants of Samara University. E-mail: [smelov@ssau.ru](mailto:smelov@ssau.ru)*

*Kokoreva Victoria, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Engine Production Technology of Samara University.*

*E-mail: [kokareva.vv@ssau.ru](mailto:kokareva.vv@ssau.ru)*

**ТЕРМОДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЛЕДОВОГО ВОРОТНИКА  
В ГИДРОТЕХНИЧЕСКОМ СТРОИТЕЛЬСТВЕ**

© 2023 Д.А. Шарапов, Ю.С. Клочков

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого  
(национальный исследовательский университет), г. Санкт-Петербург, Россия

Статья поступила в редакцию 08.04.2023

Одной из приоритетных задач развития страны является освоение Арктики. Для этого необходимо как разрабатывать новую нормативную документацию по стандартизации, так и проводить совершенствование имеющихся норм и стандартов. Арктический регион является сложным с точки зрения внешних условий. Для Гидротехнических конструкций внешние воздействия в Арктике, в первую очередь, включают воздействия со стороны льда. Ледовые воздействия могут носить самый разный характер и поэтому недостаточно полно отражены в нормативных документах. Образование ледового воротника – это один из типов вморзания, когда вокруг частично находящегося в воде гидротехнического сооружения, при отрицательных температурах воздуха, образуется утолщение льда, превышающее по своей толщине окружающий ровный лед. Данное утолщение образуется по причине теплового потока через тело сооружения и может быть рассчитано. Аналитический расчет ледового воротника сложно выполнить, поэтому предполагается использовать термодинамическую модель для численного моделирования.

*Ключевые слова:* ледовый воротник, вморзование в лед, математическая модель, численный расчет, уравнение баланса энергии, метод Стефана.

DOI: 10.37313/1990-5378-2023-25-3-107-113

EDN: LJAISL

*Исследование выполнено в рамках проекта FSEG-2020-0021***ВВЕДЕНИЕ**

Возникновение ледовых воротников вокруг цилиндрических опор гидротехнических сооружений при постоянном уровне воды обусловлено изменением направления и интенсивности переноса тепловой энергии из воды в холодный воздух с отрицательной температурой ниже точки замерзания. При использовании материалов с большой теплопроводностью в составе указанных сооружений (сталь и бетон) через них происходит интенсивный ток тепловой энергии в атмосферу. Сооружение нагревается водой ниже поверхности ледового покрова и отдает тепловую энергию в атмосферу над поверхностью ледового покрова. При этом, за счет высокой теплопроводности и отсутствия теплоизоляции в виде ледового покрова интенсивность теплового потока выше, чем на окружающей акватории. В местах интенсивного теплового потока, при переходе че-

рез точку замерзания, происходит образование льда. В рассматриваемом случае лед образуется под поверхностью ледового покрова акватории и обволакивает опоры сооружения, образуя характерные «ледовые воротники».

Ледовые воротники опасны по ряду причин. Они могут затруднять проведение операций вблизи сооружений, на которых они образуются, а также являться причиной максимальных пиковых нагрузок на гидротехнические сооружения при подвижках льда.

В общем случае рассматриваются стальные сооружения цилиндрической формы, вертикального профиля. Внешние условия считаются известными. Под внешними условиями понимаются предпосылки для формирования ледяного покрова водоёма и ледяного воротника у сооружения и/или наличие уже образовавшихся ледовых полей и ледовых образований. Предполагается отсутствие приливов и волнения. Считается, что лёд на акватории не движется в момент образования ледяного воротника. Известны: солёность воды, изменение температуры воздуха за заданный период времени - характеризующее морозо-днями (суммой средних за день отрицательных температур ниже температуры замерзания воды за рассматриваемый период времени).

*Шарапов Дмитрий Андреевич, кандидат наук, доцент Высшей школы гидротехнического и энергетического строительства. E-mail: sharapov@bk.ru*  
*Клочков Юрий Сергеевич, доктор технических наук, доцент, проректор по научно-организационной деятельности. E-mail: y.kloch@gmail.com*

### МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА

В системе вода-лёд-воздух можно выделить три принципиальных тепловых потока: первый со стороны «теплой воды» через лёд в сторону «холодного» воздуха, второй тепловой поток образуется в процессе образования льда и направлен в сторону «холодного» воздуха, третий поток является суммой первых двух и направлен со стороны поверхности лёд-воздух в сторону «холодного» воздуха.

В процессе образования льда выделяется тепловая энергия. Когда первый тепловой поток становится равным третьему, то тепловой энергии в процессе образования льда не выделяется, т.е. нового льда не образуется. Решение задачи базируется на уравнении энергетического баланса.

### Основные расчетные зависимости

Уравнение баланса энергии, описывающее температурное распределение внутри льда, воды и движение границы смены фаз (вода – лёд) (Meirmanov, 1992 [1-4]):

$$\begin{aligned} (\rho c + \rho_i l \delta(T - T_f)) \frac{dT}{dt} = \\ = \nabla(k \nabla T), \nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $t$  – время;  $x, y, z$  – горизонтальные и вертикальная координаты;  $T$  – температура;  $T_f$  – температура замерзания воды;  $l$  – теплота образования вещества;  $\delta(T - T_f)$  – дельта функция; (дельта функция, и её параметры

рассмотрены ниже);  $\rho$  – плотность материала;  $c$  – теплоемкость материала;  $k$  – коэффициент теплопроводности материала; причем  $i, w$  – индексы показывающие принадлежность параметра ко льду или воде.

Уравнение (1) описывает теплоперенос внутри льда при  $T < T_f$  и в воде при  $T > T_f$ . Следовательно принимается, что  $(\rho, c, k) = (\rho_i, c_i, k_i)$  при  $T < T_f$  и  $(\rho, c, k) = (\rho_w, c_w, k_w)$  при  $T > T_f$ . При этом учитывается, что теплоёмкость морской воды и морского льда зависит от температуры и солёности уравнения (2), (3), рис. 1, [5-8]:

$$c_w = 4.1325 + 0.0974T + 0.004935T^2 + 0.00009T^3 \left( \frac{kJ}{kg \cdot ^\circ C} \right), \quad (2)$$

$$c_i = 1.6 - \frac{7.43565}{1.22982 + T} \left( \frac{kJ}{kg \cdot ^\circ C} \right). \quad (3)$$

Уравнение (3) для определения теплоемкости морского льда выведена для солёности 2 ppt. Турбулентное перемешивание морской воды учитывалось дополнительным коэффициентом турбулентной теплопроводности ( $k_{w,t}$ ). Уравнение баланса энергии, описывающее температурное распределение внутри опоры записывается аналогично.

### Граничные и начальные условия

Температура на границах лед(вода)-воздух и опора-воздух:

$$T = T_{air}.$$

Температура на нижней границе выделенной области:

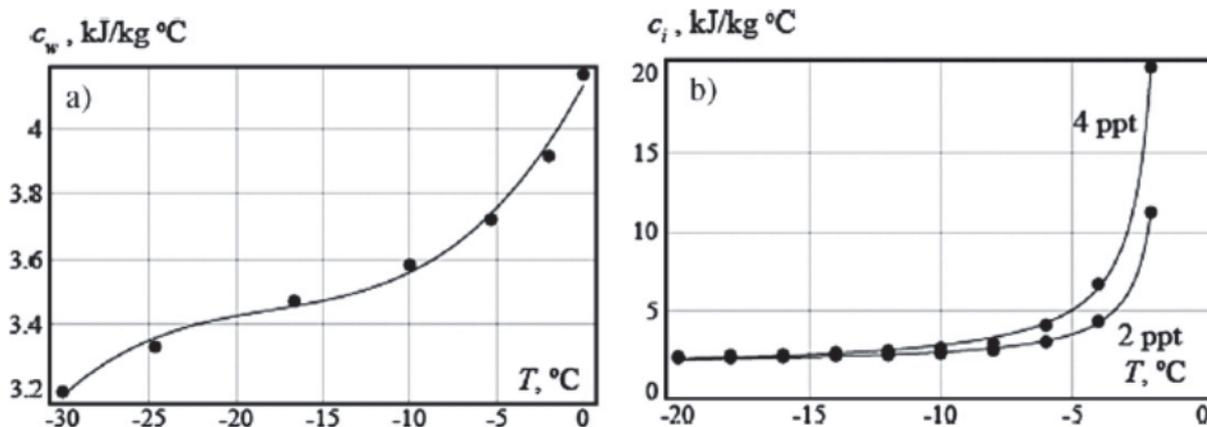


Рис. 1. Теплоемкость морского рассола (солёная вода) (а) и морского льда (б) от температуры; солёность морского льда 2 – 4 ppt; (Доронин и Хесин, 1975 [9])

$$T = T_{bottom}$$

Тепловой поток внутри выделенной области через границы материалов:

$$n \cdot (q_1 - q_2) = 0; q_i = -k_i \nabla T_i$$

Условия отсутствия теплового потока на внешних боковых границах всей выделенной области:

$$-n \cdot (-k \nabla T) = 0$$

Начальное распределение температуры внутри выделенной области:

$$T(t_o) = T_{initial}$$

где:  $T$  – температура;  $T_{air}$  – температура воздуха;  $T_{bottom}$  – температура нижней границы выделенной области;  $n$  – вектор нормальный к границе;  $q$  – тепловой поток;  $k$  – коэффициент теплопроводности материала;  $t_o$  – начальный момент времени;  $T_{initial}$  – температура в начальный момент времени.

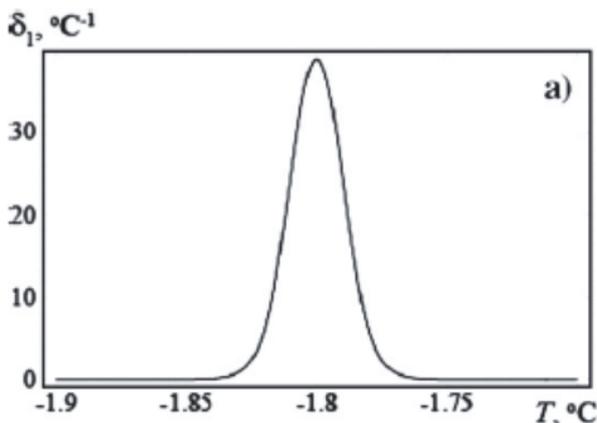
### Численный метод

Для численного интегрирования уравнения (1) использовался персональный компьютер. Рассматривались как трехмерные, так и двухмерные аппроксимации. В случае цилиндрической опоры задача будет являться осесимметричной и решение может быть рассмотрено в плоскости  $r - z$ , проходящей через центр опоры.

Для математического описания процесса смены фазового состояния используется Дирак-дельта функция [10-14]. Она вводится в уравнение теплового баланса и принимает ненулевые значения на границе смены фаз. Дельта функция позволяет учитывать теплоту образования льда в заданном интервале температуры смены фазового состояния. Дирак-дельта функция аппроксимируется следующим образом (4):

$$\delta_1(T - T_f) = \frac{(1 - \tanh(\lambda(T - T_f - \varepsilon))) \cdot (1 + \tanh(\lambda(T - T_f + \varepsilon)))}{8\varepsilon}, \quad (4)$$

где  $\lambda$  и  $\varepsilon$  подбираются в соответствии с условиями:



$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_1(x) dx = 1, \quad (5)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta_1(x) dx = f(0). \quad (6)$$

График Дирак-дельта функции принимая  $T_f = -1.8^\circ\text{C}$ ,  $\lambda = 100^\circ\text{C}^{-1}$ ,  $\varepsilon = 0.01$ , представлен на рис. 2 (А. Marchenko 2008 [3]).

Данная аппроксимация рассматривает интервал температур при фазовом переходе:

$$T \in (-1.82^\circ\text{C}, -1.78^\circ\text{C}). \quad (7)$$

Эта функция (функция Хэвисайда),  $\theta(x)$  – используется для математической записи изменения коэффициентов уравнения (1) при изменении фазового состояния. Она записывается в виде:

$$\theta(x) = 1 \text{ при } x > 0; \theta(x) = 0 \text{ при } x < 0. \quad (8)$$

Теплоёмкость связана с энергией через плотность. При расчетах имеет смысл сразу рассматривать произведение плотности на теплоемкость –  $\rho c$ . Если учесть, что теплота образования может быть учтена путём увеличения теплоёмкости в заданном интервале (используя Дельта функцию), то произведение –  $\rho c_{\text{eff}}$ , может быть аппроксимировано следующим образом:

$$\rho c_{\text{eff}} = \rho_w c_w \theta(T_f - T) + \rho_i c_i \theta(T - T_f) + \rho_i l \delta(T - T_f). \quad (9)$$

Коэффициент теплопроводности –  $k$ , может быть записан для области вода-лёд в следующем виде:

$$k = k_w \theta(T - T_f) + k_i \theta(T_f - T). \quad (10)$$

Таким образом, при температурах ниже точки замерзания эта функция  $\theta(x)$  от отрицательного значения обращается в ноль и учитывается только коэффициент для льда  $k_i$ , в случае же температуры выше точки замерзания – учитывается только коэффициент для воды  $k_w$ .

Положение границы смены фаз определяется с точностью, зависящей от ширины ( $\Delta$ ) простран-

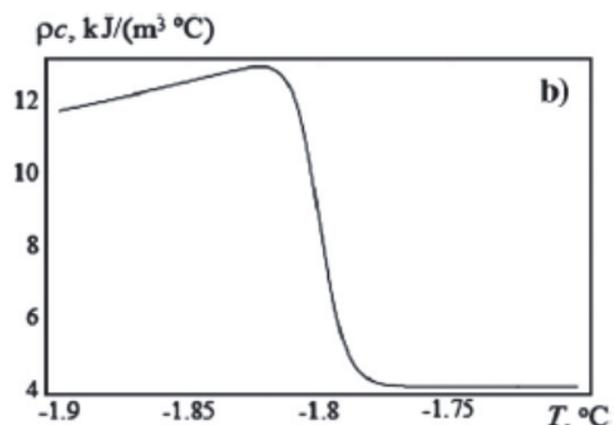


Рис. 2. График функции  $\delta_1(T - T_f)$  (а) и  $\rho c(T, T_f)$  (б) принимая  $T_f = -1.8^\circ\text{C}$ ,  $\lambda = 100^\circ\text{C}^{-1}$ ,  $\varepsilon = 0.01$

ственной области, где  $T \in (-1.82^{\circ}\text{C}, -1.78^{\circ}\text{C})$ . Размер элементов сетки выбирался меньшим, чем  $\Delta$ . Если  $\Delta$  меньше размера элемента конечно-элементной сетки, то эффективная теплота образования уменьшается, вследствие численного распределения функции  $\delta_1$  по всему конечному элементу. При расчете использовались сетки, содержащие около 20000-500000 треугольных элементов в зависимости от величины расчетной области. Площадь элемента варьируется от  $0.04 \text{ м}^2$  до  $7 \times 10^{-5} \text{ м}^2$ .

Решение задачи осуществлялось как в трёхмерном случае, так и в двумерном. Трёхмерный случай дает наглядное представление происходящего вокруг опоры. Для цилиндрических опор целесообразно использовать двумерное (осесимметричное), так как решение будет содержать все необходимые характеристики при меньших затратах времени и ресурсов.

При компьютерном моделировании решается уравнение (11). Его решение в двумерном случае связано с переходом к цилиндрическим координатам.

Уравнения теплопроводности в декартовых и цилиндрических координатах записываются в виде:

$$\rho c \frac{dT}{dt} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + f, \quad (11)$$

$$\rho c \frac{dT}{dt} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \cdot k \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( k \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + f, \quad (12)$$

где уравнение (11) записано в декартовых координатах, а уравнение (12) записано в цилиндрических координатах;  $\rho$  – плотность материала;  $c$  – теплоемкость материала;  $k$  – коэффициент теплопроводности материала;  $f$  – внутреннее теплообразование;  $T$  – температура;  $t$  – время;  $x, y, z$  – горизонтальные и вертикальная декартовы координаты;  $r, \varphi, z$  – радиус, угол, вертикальная координата в цилиндрической системе координат.

Рассматриваемая постановка задачи обладает осевой симметрией, следовательно:  $\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$ .

Тогда уравнение (12) переписывается в виде:

$$\rho c \frac{dT}{dt} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \cdot k \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + f, \quad (13)$$

где обозначения аналогичны приведенным ранее.

Раскрывая производную первого члена правой части уравнения (12) можно получить уравнение (13). Уравнение (13) отличается от двумерного

случая уравнения (11) членом  $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( k \frac{\partial T}{\partial r} \right)$ , кото-

рый быстро затухает при увеличении  $r$ . Поэтому для не слишком маленьких опор можно пользоваться двумерным решением уравнения (11):

$$\rho c \frac{dT}{dt} = \frac{1}{r} k \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} \left( k \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + f, \quad (14)$$

где обозначения аналогичны приведенным ранее.

### РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Для оценки достоверности результатов численного моделирования были проведены физические эксперименты. Результаты экспериментов использовались для оценки правильности компьютерной модели. На рис. 3 представлены некоторые из результатов физических экспериментов и математического моделирования: Опыт со стальным цилиндром длиной 30 см, диаметром 1 см, погруженным в воду на 20 см, вмораживаемым в течение 46 часов при температуре  $-10^{\circ}\text{C}$  (рис. 3 слева). На рис. 3 также представлен пример результата 3D моделирования и пример результата 2D моделирования.

Формы ледовых воротников, полученных численным моделированием, соответствуют физическим экспериментам, что видно на рис. 3. Отмечены некоторые случаи, когда численное решение несколько завышает размеры воротников, однако, учитывая, что оно так же немного завышает толщину ровного окружающего льда (рис. 4) отношение этих величин в расчетах и на моделях близко. Опыты для более продолжительного периода показали такую же относительную ошибку результата – не более 5% в наибольшем случае.

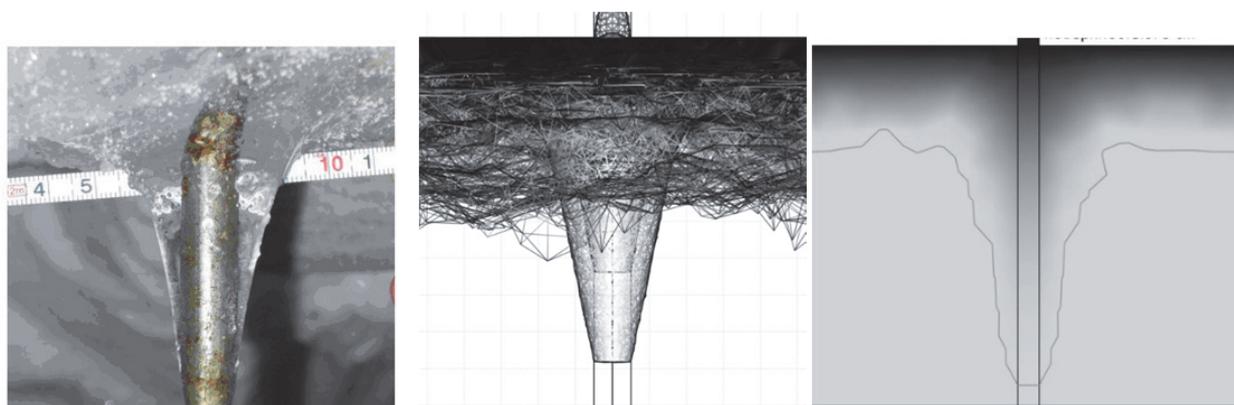
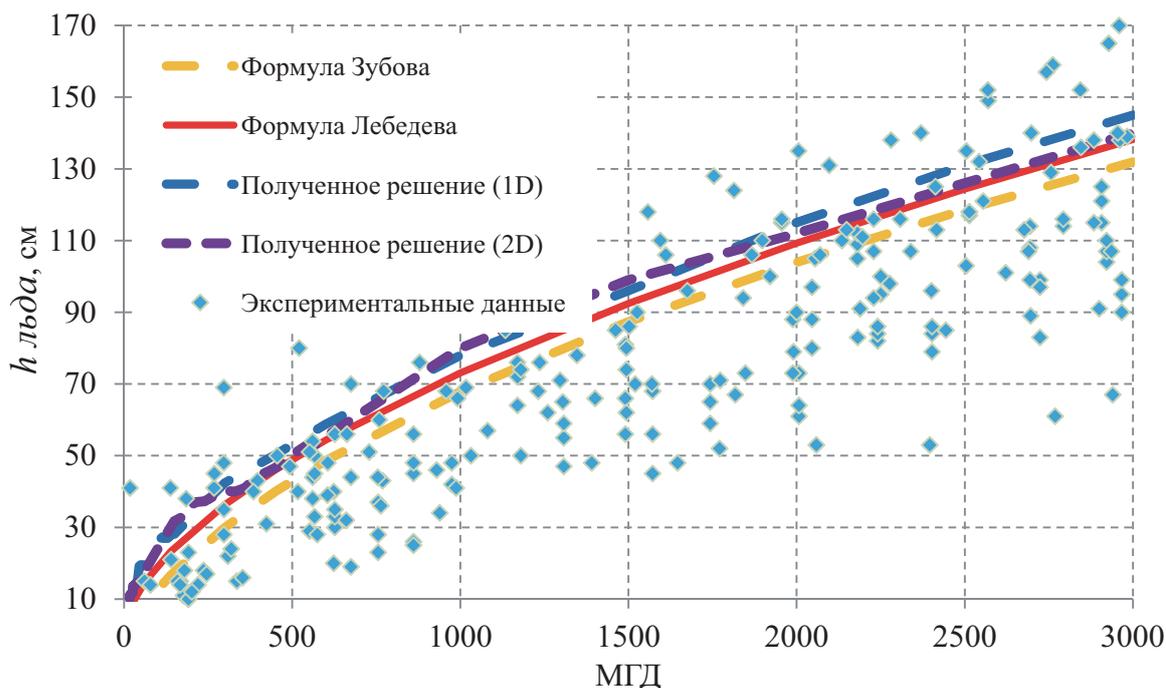


Рис. 3. Результаты физического эксперимента (слева) (стальная труба) и примеры результатов математического моделирования (3D – центр, 2D - справа)



**Рис. 4.** Сравнение толщин льда полученных численным расчетом с известными измеренными значениями при тех же исходных данных

Рассмотренные случаи с положительной температурой внутри оборы показали возможность удаления ледовых воротников обогревом опоры [15, 16].

Для оценки достоверности абсолютных значений получаемых результатов и настройке расчетной схемы были проведены серии экспериментов по определению толщин термообразованного льда при известных параметрах; результаты сравнивались с известными значениями (рис. 4) [17]. Приведенные экспериментальные точки нанесены по результатам анализа данных из Главной Геофизической Обсерватории [18] и Государственного Гидрологического Института [19].

Как видно из приведенного графика – результаты, полученные по методу конечных элементов (Ряды: «Полученное решение (1D)» и «Полученное решение (2D)»), укладываются в рамки результатов, полученных расчетом по эмпирическим формулам и аналитическим решениям, а также экспериментальных данных.

Во избежание возможных погрешностей, связанных с различиями в масштабе времени между моделью и реальными процессами, размеры ледовых воротников находились в отношении к толщинам окружающего льда.

## ВЫВОДЫ

Вмерзание сооружения в лед при постоянном уровне может сопровождаться образованием ледовых воротников. Ледовые воротники об-

разуются ниже уровня воды вокруг сооружений и опор, имеющих большую теплопроводность.

Для получения размеров и формы ледовых воротников была разработана термодинамическая модель и программа для ЭВМ[20]. Термодинамическая модель позволяет провести численную оценку размеров и формы ледового воротника для большого массива исходных данных.

Основными данными, влияющими на рост льда, являются продолжительность вмерзания и градиент температуры. Международным стандартом введено понятие морозоградусодней (freezing degree days), являющееся мерой энергии, затраченной (выделенной) при образовании льда и, тем самым, позволяющей упростить вид представления исходных данных для расчета обмерзания.

Для верификации термодинамической модели использованы физические эксперименты. Физические эксперименты проводились как в полевых условиях, так и в условиях холодной лаборатории. Экспериментальные и численные формы ледовых воротников удовлетворительно совпадают.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Meirmanov A. The Stefan problem // Walter de Gruyter, Berlin. – 1992. – Т. 244.
2. Loset S., Marchenko A. Field studies and numerical simulations of ice bustles on vertical piles // Cold Regions Science and Technology. – 2009. – Т. 58, № 1-2. – С. 15-28.

3. *Marchenko A.* Thermodynamic consolidation and melting of sea ice ridges // *Cold Regions Science and Technology*. – 2008. – Т. 52, № 3. – С. 278-301.
4. *Sharapov D., Shkhinek K., DelValls T. Á.* Ice collars, development and effects // *Ocean Engineering*. – 2016. – Т. 115. – С. 189-195.
5. *Thermal Conductivity of Sea Ice and Antarctic Permafrost.* A thesis submitted for the degree of Doctor of Philosophy. / Daniel J. P.: Wellington, New Zealand, 2004. A thesis submitted for the degree of Doctor of Philosophy.
6. *Schwerdtfeger P.* The thermal properties of sea ice // *J. Glaciol.* – 1963. – Т. 4. – С. 789-807.
7. Назинцев, Ю.Л. Некоторые данные к расчету тепловых свойств морского льда // *Труды института Арктики и Антарктики* / Ю.Л. Назинцев. – 1964. – Т. 267. – С. 31-47.
8. *Шарапов, Д.А.* Гидротехническое строительство. Лед и его свойства для сооружений Арктики: учеб. пособие / Д. А. Шарапов, А.С. Большев – СПб: ПОЛИТЕХ-ПРЕСС, 2023. – 89 с.
9. *Доронин, Ю.П.* Морской лед. / Ю.П. Доронин, Д.Е. Хейсин: Л.: Гидрометеиздат, 1975.
10. *Ram P.K.* The Dirac Delta Function and Delta Sequences // *Mathematics in Science and Engineering* / Ram P. K. Elsevier, 1983. – С. 1-19.
11. *Salva N., Tarzia D.* Explicit solution for a Stefan problem with variable latent heat and constant heat flux boundary conditions // *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. – 2011. – Т. 379, № 1. – С. 240-244.
12. *Mccue S., Wu B., Hill J.* Classical two-phase Stefan problem for spheres // *Proceedings of the Royal Society a-Mathematical Physical and Engineering Sciences*. – 2008. – Т. 464, № 2096. – С. 2055-2076.
13. *Asaithambi A.* Numerical solution of Stefan problems using automatic differentiation // *Applied Mathematics and Computation*. – 2007. – Т. 189, № 1. – С. 943-948.
14. *Stefan J.* Uber die theorie der eisbildung, insbesondere uber die eisbildung in polarmeere // *Ann. Phys.* – 1981. – Т. 42 (2). – С. 269-186.
15. ICEMELT, Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ RU 2015617335, 07.07.2015. Заявка № 2015614290 от 19.05.2015. / Шарапов Д. А., Шхинек К. Н., 2015.
16. *Шарапов Д. А.* Численная оценка необходимой энергии для предотвращения образования воротников на морских причалах Арктики / Д.А. Шарапов, А.С. Большев // *Научно-технический сборник Российского морского регистра судоходства*. – 2016. – Т. 44-45. – С. 20-25.
17. *Sharapov D., Shkhinek K.* Numerical calculation of the ice grow and empirical calculation results // *Advanced Materials Research, Proceedings of 3rd International Conference on Materials and Products Manufacturing Technology (ICMPMT 2013), September 25-26, Changsha, China*. – 2013.
18. Архивные данные по температуре // *Справочник по климату СССР, Омская и Тюменская области за период с 1955 по 1976 год, Главная Геофизическая Обсерватория*. – 1976.
19. Архивные данные по толщине льда // *Гидрологический ежегодник станции Новый порт бассейна Карского моря за период с 1955 по 1976 год, Государственный Гидрологический Институт*. – 1976.
20. *Шарапов, Д.А.* Гидротехническое строительство - ледовые воротники, свидетельство о регистрации программы для ЭВМ RU 2023615858, 20.03.2023. Заявка № 2023613926 от 22.02.2023. / Д.А. Шарапов, 2023.

## THERMODYNAMIC MODEL OF ICE COLLAR FOR HYDROTECHNICAL CONSTRUCTION

© 2023 D.A. Sharapov, Yu.S. Klochkov

St. Petersburg Polytechnic University of Peter the Great  
(National Research University), St. Petersburg, Russia

Arctic development is one of the priorities for the country. For this, it is necessary both to develop new normative documentation on standardization and to improve existing norms and standards. The Arctic region is complex in terms of weather and environmental conditions. Environmental loads and actions on hydraulic structures are most important and primarily include impacts from ice. Ice impacts can be of a very different nature and therefore are not fully reflected in the normative documents. The formation of an ice collar is one of the types of freezing on the submerged hydraulic structures. Ice collar is a thicker ice around structure due to the high thermal conduction through the structure. This ice is formed due to the heat flow through the body of the structure and can be calculated. Analytical calculation of the ice collar is difficult to perform, so it is proposed to use a thermodynamic model for numerical simulation. *Keywords:* ice collar, freezing into ice, mathematical modelling, numerical calculation, energy balance equation, Stefan method.

DOI: 10.37313/1990-5378-2023-25-3-107-113

EDN: LJAISL

## REFERENCES

1. *Meirmanov A.* The Stefan problem // Walter de Gruyter, Berlin. – 1992. – Т. 244.
2. *Loset S., Marchenko A.* Field studies and numerical simulations of ice bustles on vertical piles // Cold Regions Science and Technology. – 2009. – Т. 58, № 1-2. – С. 15-28.
3. *Marchenko A.* Thermodynamic consolidation and melting of sea ice ridges // Cold Regions Science and Technology. – 2008. – Т. 52, № 3. – С. 278-301.
4. *Sharapov D., Shkhinek K., DelValls T. Á.* Ice collars, development and effects // Ocean Engineering. – 2016. – Т. 115. – С. 189-195.
5. Thermal Conductivity of Sea Ice and Antarctic Permafrost. A thesis submitted for the degree of Doctor of Philosophy. / Daniel J. P.: Wellington, New Zealand, 2004. A thesis submitted for the degree of Doctor of Philosophy.
6. *Schwerdtfeger P.* The thermal properties of sea ice // J. Glac. – 1963. – Т. 4. – С. 789-807.
7. *Nazincev, Yu.L.* Nekotorye dannye k raschetu teplovyh svoystv morskogo l'da // Trudy instituta Arktiki i Antarktiki / Yu.L. Nazincev. – 1964. – Т. 267. – С. 31-47.
8. *Sharapov, D.A.* Gidrotekhnicheskoe stroitel'stvo. Led i ego svoystva dlya sooruzhenij Arktiki: ucheb. posobie / D. A. Sharapov, A.S. Bol'shev – SPb: POLITEKH-PRESS, 2023. – 89 s.
9. *Doronin, Yu.P.* Morskoj led. / YU.P. Doronin, D.E. Hejsin: L.: Gidrometeoizdat, 1975.
10. *Ram P.K.* The Dirac Delta Function and Delta Sequences // Mathematics in Science and Engineering / Ram P. K. Elsevier, 1983. – С. 1-19.
11. *Salva N., Tarzia D.* Explicit solution for a Stefan problem with variable latent heat and constant heat flux boundary conditions // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2011. – Т. 379, № 1. – С. 240-244.
12. *Mccue S., Wu B., Hill J.* Classical two-phase Stefan problem for spheres // Proceedings of the Royal Society a-Mathematical Physical and Engineering Sciences. – 2008. – Т. 464, № 2096. – С. 2055-2076.
13. *Asaithambi A.* Numerical solution of Stefan problems using automatic differentiation // Applied Mathematics and Computation. – 2007. – Т. 189, № 1. – С. 943-948.
14. *Stefan J.* Uber die theorie der eisbildung, insbesondere uber die eisbildung in polarmeere // Ann. Phys. – 1981. – Т. 42 (2). – С. 269-186.
15. ICEMELT, Svidetel'stvo o registracii programmy dlya EVM RU 2015617335, 07.07.2015. Zayavka № 2015614290 ot 19.05.2015. / Sharapov D.A., Shkhinek K. N., 2015.
16. *Sharapov D.A., Bol'shev A.S.* chislennaya ocenka neobhodimoj energii dlya predotvrashcheniya obrazovaniya vorotnikov na morskikh prichalah Arktiki / D.A. Sharapov, A.S. Bol'shev // Nauchno-tekhnicheskij sbornik Rossijskogo morskogo registra sudohodstva. – 2016. – Т. 44-45. – С. 20-25.
17. *Sharapov D., Shkhinek K.* Numerical calculation of the ice grow and empirical calculation results // Advanced Materials Research, Proceedings of 3rd International Conference on Materials and Products Manufacturing Technology (ICMPMT 2013), September 25-26, Changsha, China. – 2013.
18. Arhivnye dannye po temperature // Spravochnik po klimatu SSSR, Omskaya i Tyumenskaya oblasti za period s 1955 po 1976 god, Glavnaya Geofizicheskaya Observatoriya. – 1976.
19. Arhivnye dannye po tolshchine l'da // Gidrologicheskij ezhegodnik stancii Novyj port bassejna Karskogo morya za period s 1955 po 1976 god, Gosudarstvennyj Gidrologicheskij Institut. – 1976.
20. *Sharapov, D.A.* Gidrotekhnicheskoe stroitel'stvo – ledovye vorotniki, svidetel'stvo o registracii programmy dlya EVM RU 2023615858, 20.03.2023. Zayavka № 2023613926 OT 22.02.2023. / D.A. Sharapov, 2023.

---

*Dmitry Sharapov, PhD, Associate Professor of the Higher School of Hydrotechnical and Energy Construction.*

*E-mail: sharapov@bk.ru*

*Yury Klochkov, Doctor of Technical Sciences, Associate Professor, Vice-Rector for Scientific and Organizational Activities. E-mail: y.kloch@gmail.com*

УДК 517.997

**МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ,  
ОСНОВАННЫЙ НА ЛОКАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ МНОЖЕСТВА ДОСТИЖИМОСТИ,  
ДЛЯ ДИСКРЕТНЫХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ**

© 2023 В.А. Батулин, А.В. Данеев, В.Н. Сизых

Иркутский государственный университет путей сообщения, г. Иркутск, Россия

Статья поступила в редакцию 15.12.2022

Рассматривается алгоритм улучшения, основанный на локальных аппроксимациях множества достижимости дискретной по времени задачи оптимального управления. Получены условия, обеспечивающие релаксационность алгоритма и связь с необходимыми условиями оптимальности.

*Ключевые слова:* оптимальное управление, метод последовательных приближений, локальная аппроксимация множества достижимости, дискретные задачи.

DOI: 10.37313/1990-5378-2023-25-3-114-129

EDN: LKFKBB

**ВВЕДЕНИЕ**

Задачи оптимального управления динамическими процессами имеют очень широкий спектр приложений. Хотя приближенные методы их решения насчитывают более 50 лет и накоплен большой потенциал алгоритмов, нельзя с уверенностью утверждать, что один из разработанных ранее методов обеспечит успех в решении той или иной задачи. Новые подходы построения приближенных методов позволяют дополнить серию уже имеющихся алгоритмов, что расширяет возможности нахождения приближенно-оптимального управления в конкретной прикладной задаче. Всякий численный метод решения дифференциальных уравнений представляет собой рекуррентную цепочку, являющуюся дискретной системой, поэтому одним из подходов состоит в том, чтобы исходную непрерывную задачу заменить ее дискретной аппроксимацией — и для последней разработать приближенные методы решения.

Качественная теория дискретных систем изложена в монографиях [1-4]. Известно много методов исследования динамики дискретных систем [5-11], в частности, в работах [10,11] развиваются алгоритмы улучшения второго

порядка для дискретной и непрерывной задачи оптимального управления на случай, когда управляемая система имеет сетевую структуру. Использование разложения конструкций метода улучшения второго порядка по параметру для дискретных задач оптимального управления было проведено в работе [12,13].

Методики построения множеств достижимости разработаны в работах [20-23]. В основе рассматриваемого метода лежит теорема [17] о том, что множество достижимости системы есть множество нулей функции, являющейся решением уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана со специальным начальным условием. Аппроксимация такого уравнения рассматривается для некоторой вспомогательной задачи, получающейся из исходной путем расширения фазового пространства. В трудах [6,18] впервые была высказана идея об использовании приближенного описания множества достижимости для построения алгоритма улучшения в непрерывных системах, а более глубокое исследование такого метода было проведено в работе [14,15]. Идея применения этого подхода и общая итеративная схема улучшения для дискретных систем изложена в статье [19].

**1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ**

Рассматривается дискретная по времени управляемая система

$$x(t+1) = f(t, x(t), u(t)), t \in T = \{t_0, t_0 + 1, \dots, t_1\}, \quad (1.1)$$

$$x(t_0) = x_0, u(t) \in U(t), t \in T. \quad (1.2)$$

где  $x(t)$  принимает значения в евклидовом

*Батулин Владимир Александрович, доктор физ.-мат. наук, профессор, старший научный сотрудник.*

*E-mail: rozen@iss.ru*

*Данеев Алексей Васильевич, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры «Информационные системы и защита информации». E-mail: daneev@mail.ru*

*Сизых Виктор Николаевич, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры «Автоматизация производственных процессов». E-mail: sizykh\_vn@mail.ru*

пространстве  $\mathbb{R}^n$ ,  $U(t) \subseteq \mathbb{R}^r$ . Функция  $x(t)$  называется траекторией, а функция  $u(t)$  — управлением. Известно, что динамическая система (1.1)-(1.2) может быть равносильно записана как:

$$x(t+1) \in f(t, x(t), U(t)), \quad t \in T, \quad x(t_0) = x_0, \quad (1.3)$$

где  $f(t, x(t), U(t))$  — множество допустимых переходов системы на шаге  $t$ .

О п р е д е л е н и е 1. Совокупность пар функций  $(x(t), u(t))$ , удовлетворяющих условиям (1.1)-(1.2) назовем множеством  $D$  допустимых управляемых процессов.

Требуется минимизировать терминальный функционал

$$I(x, u) = F(x(t_1)). \quad (1.4)$$

на множестве  $D$ .

Пусть задан некоторый элемент  $(x^I(t), u^I(t)) \in D$ . Под задачей улучшения будем понимать задачу нахождения такого процесса  $(x^{II}(t), u^{II}(t)) \in D$ , что  $I(x^{II}, u^{II}) < I(x^I, u^I)$ .

О п р е д е л е н и е 2. Множеством достижимости  $\mathfrak{N}_{\mathcal{R}}(t_0, x_0; \tau)$  системы (1.1)-(1.2) на шаге  $\tau$ , порожденное точкой  $x_0$  в момент  $t_0$  будем называть множество тех и только тех элементов  $z \in \mathbb{R}^n$ , для каждого из которых найдется решение  $x(t)$  системы (1.1)-(1.2) (включения (1.3)) такое, что  $x(\tau) = z$ .

Описание множества достижимости управляемой системы является основной характеристикой, используя которую можно исследовать свойства системы. Если известно множество достижимости, то решение задачи сводится к минимизации функции конечного состояния  $F(x)$  на этом множестве в момент времени  $t_1$ .

В монографии [17] доказана следующая теорема о множестве достижимости для дискретных систем:

Т е о р е м а 1. Пусть  $f(t, x(t), U(t)) \neq \emptyset$  при всех  $(t, x) \in T \times \mathbb{R}^n$ , и существуют функции  $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  и неотрицательная  $\psi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  такие, что

$$1) \quad \psi(x) = 0 \text{ тогда и только тогда, когда } x = x_0;$$

$$W_{\varphi}(t, x) = \left\{ \omega \in f(t, x(t)) : \varphi(t+1, \omega) = \sup_{v \in f(t, x(t), U(t))} \varphi(t+1, v) \right\} \neq \emptyset$$

$$2) \quad \text{при всех } (t, x) \in T \times \mathbb{R}^n;$$

$$3) \quad \text{при всех } (t, x) \in T \times \mathbb{R}^n$$

$$\sup_{u \in U(t)} \varphi(t+1, f(t, x, u)) = \varphi(t, x), \quad \varphi(t_0, x) = \psi(x).$$

(1.5)

Тогда  $\mathfrak{N}_{\mathcal{R}}(t_0, x_0; \tau) = \{x \in \mathbb{R}^n : \varphi(\tau, x) = 0\}$  при всех  $\tau \in T$ .

По сути дела в теореме 1 рассмотрена следующая задача оптимального управления:

$$x(t+1) = f(t, x(t), u(t)), \quad x(t_1) = x_1, \quad u(t) \in U(t), \quad t \in T, \\ J = \psi(x(t_0)) \rightarrow \min.$$

Если точка  $x_1$  принадлежит множеству достижимости  $\mathfrak{N}_{\mathcal{R}}(t_0, x_0; t_1)$ , то  $\psi(x(t_0)) = 0$ , а если не принадлежит, то  $\psi(x(t_0)) > 0$  на оптимальном решении, соответственно и функция Беллмана имеет те же свойства. Имеем

$$\varphi(\tau, x^*) > 0, \quad x^* \notin \mathfrak{N}_{\mathcal{R}}(t_0, x_0; \tau), \\ \varphi(\tau, x^*) = 0, \quad x^* \in \mathfrak{N}_{\mathcal{R}}(t_0, x_0; \tau), \quad \tau \in T.$$

Если  $x^1(\tau)$  лежит во множестве достижимости системы  $\mathfrak{N}_{\mathcal{R}}(t_0, x_0; \tau)$  на каждом шаге  $\tau \in T$ , то функция Беллмана равна нулю, и ее линейно-квадратичная нулевая аппроксимация не дает возможности нахождения приближенного представления множества  $\mathfrak{N}_{\mathcal{R}}$ .

Предполагая, что решение уравнения (1.5) существует, получаем, что всякое решение включения

$$x(t+1) \in W_{\varphi}(t, x), \quad t \in T, \quad x(t_1) = x^*,$$

где  $x^*$  - точка минимума функции  $F(x)$  при условии  $x \in \mathfrak{N}_{\mathcal{R}}(t_0, x_0; \tau)$ , является решением задачи оптимального управления (1.1)-(1.2), (1.4). Решение уравнения Беллмана (1.5) достаточно затруднительно и мы будем исходить из аппроксимации самого уравнения и функции Беллмана до второго порядка.

При выводе конструкций алгоритма предполагается, что  $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  - дважды непрерывно дифференцируема,  $f: T \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^n$  - дважды непрерывно дифференцируема по  $(x, u)$ ,  $U(t) = \mathbb{R}^r$ ,  $t \in T$ .

## 2. КОНСТРУКЦИЯ БАЗОВОГО АЛГОРИТМА

Будем искать локально улучшенный элемент  $(x^{II}(t), u^{II}(t)) \in D$  вблизи некоторого заданного начального элемента  $(x^I(t), u^I(t)) \in D$ . Это дает возможность заменить границу множества достижимости ее квадратической аппроксимацией и построить на этой основе алгоритм улучшения.

Введем дополнительную скалярную функцию  $x^0(t)$  для системы (1.1):

$$\begin{aligned} x^0(t+1) &= x^0(t) + \frac{1}{2}(g\Delta u' \Delta u + (1-g)\Delta x' \Delta x), \\ \Delta u &= u - u^I(t), \quad \Delta x = x - x^I(t), \\ x^0(t_0) &= 0, \quad 0 \leq g \leq 1, \quad t \in T, \end{aligned}$$

где «'» означает операцию транспонирования. Определим функции

$$y(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x^0(t) \end{pmatrix}, \quad y_0(t) = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

$$\tilde{f}(t, y, u) = \left( x^0(t) + \frac{1}{2}(g\Delta u' \Delta u + (1-g)\Delta x' \Delta x) \right)$$

и получим систему вида

$$y(t+1) = \tilde{f}(t, y(t), u(t)), \quad y(t_0) = y_0, \quad t \in T = \{t_0, t_0 + 1, \dots, t_1\} \quad (2.2)$$

Уравнение Беллмана (1.5) для системы (2.2) будет выглядеть следующим образом

$$\max_u \varphi(t+1, \tilde{f}(t, y, u)) - \varphi(t, y) = 0, \quad (2.3)$$

в предположении, что максимум  $\varphi(t+1, \tilde{f}(t, y, u))$  достигается в некоторой точке  $\bar{u}(t, y)$ . Найдем приближенное решение с помощью тейлоровской аппроксимации (2.3) в окрестности траектории

$y_\varepsilon^I = \begin{pmatrix} x^I(t) \\ -\varepsilon \end{pmatrix}$ ,  $\varepsilon > 0$ , которая лежит вне множества достижимости (2.2), а значит

функция Беллмана не равна нулю. Для этого введем вспомогательную функцию

$$R(t, y, u) = \varphi(t+1, \tilde{f}(t, y, u)) - \varphi(t, y) \quad (2.5)$$

и рассмотрим ее разложение в ряд Тейлора до слагаемых второго порядка включительно в окрестности точки  $(y_\varepsilon^I(t), u^I(t))$ :

$$\begin{aligned} R(t, y, u) &= R(t, y_\varepsilon^I(t), u^I(t)) + R_u'(t, y_\varepsilon^I(t), u^I(t))\Delta u + R_u'(t, y_\varepsilon^I(t), u^I(t))\Delta y + \\ &+ \frac{1}{2}(\Delta u' R_{uu}(t, y_\varepsilon^I(t), u^I(t))\Delta u + \Delta y' R_{yy}(t, y_\varepsilon^I(t), u^I(t))\Delta y + \Delta y' R_{yu}(t, y_\varepsilon^I(t), u^I(t))\Delta u + \\ &+ \Delta u' R_{uy}(t, y_\varepsilon^I(t), u^I(t))\Delta y) + o(|\Delta u|^2, |\Delta y|^2). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Согласно соотношениям (2.3) и (2.5)  $\max_u R(t, y, u) = 0$ . Будем исследовать на максимум по  $u$  линейно-квадратическое приближение функции  $R(t, y, u)$ . Тогда из условия стационарности имеем

$$R_u(t, y_\varepsilon^I(t), u^I(t)) + R_{uu}(t, y_\varepsilon^I(t), u^I(t))\Delta u + R_{uy}(t, y_\varepsilon^I(t), u^I(t))\Delta y = 0,$$

откуда

$$\tilde{u}(t, y) = u^I(t) - R_{uu}^{-1}(t, y_\varepsilon^I(t), u^I(t))R_u(t, y_\varepsilon^I(t), u^I(t)) + R_{uy}(t, y_\varepsilon^I(t), u^I(t))(y - y_\varepsilon^I(t)) \quad (2.7)$$

в предположении отрицательной определенности  $R_{uu}(t, y_\varepsilon^I(t), u^I(t))$ .

Подставляя выражение (2.7) в (2.6), и приравнявая к нулю коэффициенты при  $\Delta u$  и  $(\Delta y)^2$ , а также свободный член, получим

$$\begin{aligned}
 R(t, y_\varepsilon^I(t), u^I(t)) - \frac{1}{2} R_u^I(t, y_\varepsilon^I(t), u^I(t)) R_{uu}^{-1}(t, y_\varepsilon^I(t), u^I(t)) R_u(t, y_\varepsilon^I(t), u^I(t)) &= 0, \\
 R_y(t, y_\varepsilon^I(t), u^I(t)) - R_{yu}(t, y_\varepsilon^I(t), u^I(t)) R_{uu}^{-1}(t, y_\varepsilon^I(t), u^I(t)) R_u(t, y_\varepsilon^I(t), u^I(t)) &= 0, \\
 R_{yy}(t, y_\varepsilon^I(t), u^I(t)) - R_{yy}(t, y_\varepsilon^I(t), u^I(t)) R_{uu}^{-1}(t, y_\varepsilon^I(t), u^I(t)) R_{yy}(t, y_\varepsilon^I(t), u^I(t)) &= 0.
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Будем искать приближение функции Беллмана в линейно-квадратическом виде

$$\varphi(t, y) = v(t) + \kappa'(t)(y - y_\varepsilon^I(t)) + \frac{1}{2}(y - y_\varepsilon^I(t))' \chi(t)(y - y_\varepsilon^I(t)), \tag{2.9}$$

где  $v(t)$  — скалярная,  $n(t)$  — векторная размерности  $(n+1)$ , а  $\chi(t)$  — матричная размерности  $(n+1) \times (n+1)$  функции.

Используя определения функции  $R$  (2.5) и функции  $\varphi$  (2.9), запишем

$$\begin{aligned}
 R(t, y, u) &= v(t+1) + \kappa'(t+1)(y - y_\varepsilon^I(t+1)) + \\
 &+ \frac{1}{2}(y - y_\varepsilon^I(t+1))' \chi(t+1)(y - y_\varepsilon^I(t+1)) - \\
 &- v(t) - \kappa'(t)(y - y_\varepsilon^I(t)) - \frac{1}{2}(y - y_\varepsilon^I(t))' \chi(t)(y - y_\varepsilon^I(t)).
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

Находя производные функции  $R$  из выражения (2.10) и подставляя их в равенства (2.8), имеем

$$\begin{aligned}
 v(t+1) - \frac{1}{2} \kappa'(t+1) \tilde{f}_u (\tilde{f}_u' \chi(t+1) \tilde{f}_u + H_{uu})^{-1} \tilde{f}_u' \kappa(t+1) &= v(t), \\
 \tilde{f}_y' \kappa(t+1) - (\tilde{f}_y' \chi(t+1) \tilde{f}_u + H_{uu}) (\tilde{f}_u' \chi(t+1) \tilde{f}_u + H_{uu})^{-1} \tilde{f}_u' \kappa(t+1) &= \kappa(t), \\
 \tilde{f}_y' \chi(t+1) \tilde{f}_y + H_{yy} - (\tilde{f}_y' \chi(t+1) \tilde{f}_u + H_{yu}) (\tilde{f}_u' \chi(t+1) \tilde{f}_u + H_{uu})^{-1} \times \\
 \times \tilde{f}_u' \chi(t+1) \tilde{f}_u + H_{yy} &= \chi(t),
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

где производные функции  $\tilde{f}(t, y, u)$ , определенной равенством (2.1), вычисляются в точке  $(t, y_\varepsilon^I(t), u^I(t))$ , а производные функции  $H(t, y, \kappa, u) = \kappa'(t+1) \tilde{f}(t, y, u)$  — в точке  $(t, y_\varepsilon^I(t), \kappa(t+1), u^I(t))$ .

Исследуем начальное условие (2.4). Представим его правую часть в приближенном виде

$$\begin{aligned}
 \|y - y_0\| &= \|y_\varepsilon^I(t_0) - y_0\| + \left( \frac{y_\varepsilon^I(t_0) - y_0}{\|y_\varepsilon^I(t_0) - y_0\|} \right)' (y - y_\varepsilon^I(t_0)) + \\
 &+ \frac{1}{2} (y - y_\varepsilon^I(t_0))' \frac{\|y_\varepsilon^I(t_0) - y_0\|^2 E^{(n+1)} - (y_\varepsilon^I(t_0) - y_0)(y_\varepsilon^I(t_0) - y_0)'}{\|y_\varepsilon^I(t_0) - y_0\|^3} (y - y_\varepsilon^I(t_0)) + \\
 &+ o(\|y - y_\varepsilon^I(t_0)\|^2).
 \end{aligned}$$

где  $o(\|y - y_\varepsilon^I(t_0)\|^2) / \|y - y_\varepsilon^I(t_0)\|^2 \rightarrow 0$  при  $y \rightarrow y_\varepsilon^I(t_0)$ ,  $E^{(n+1)}$  — единичная матрица размерности  $(n+1) \times (n+1)$ . Согласно выражению (2.9)

$$\varphi(t_0, y) = v(t_0) + \kappa'(t_0)(y - y_\varepsilon^I(t_0)) + \frac{1}{2}(y - y_\varepsilon^I(t_0))' \chi(t_0) \cdot (y - y_\varepsilon^I(t_0)).$$

По определению  $y_\varepsilon^I(t_0) - y_0 = \begin{pmatrix} x^I(t_0) \\ -\varepsilon \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\varepsilon \end{pmatrix}$ , и  $\|y_\varepsilon^I(t_0) - y_0\| = \varepsilon$ . Тогда

$$v(t_0) = \varepsilon, \quad \kappa(t_0) = \begin{pmatrix} \theta \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \chi(t_0) = \begin{pmatrix} \varepsilon^{-1} E^{(n)} & \theta \\ \theta' & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.12}$$

где  $\theta$  — нулевой вектор размерности  $n$ ,  $E^{(n)}$  — единичная матрица размерности  $n \times n$ .

Непосредственной подстановкой убеждаемся, что функции  $v(t) = \varepsilon$ ,  $\kappa(t) = \begin{pmatrix} \theta \\ -1 \end{pmatrix}$ ,

$\chi(t) = \begin{pmatrix} \sigma(t) & \theta \\ \theta' & 0 \end{pmatrix}$ , удовлетворяют системе (2.11), (2.12), если матричная функция  $\sigma(t)$  размерности  $n \times n$  определяется как решение дискретного уравнения Риккати вида

$$f'_x \sigma(t+1) f_x - (1-g)E^{(n)} - f'_x \sigma(t+1) f_u [f'_u \sigma(t+1) f_u - gE^{(r)}]^{-1} f'_u \sigma(t+1) f_x = \sigma(t),$$

где производные функции  $f$  подсчитываются в точке  $(t, x^I(t), u^I(t))$ .

Приближенное решение уравнения Беллмана (2.3)-(2.4) будет иметь вид

$$\varphi(t, u) = -x^0 + \frac{1}{2} (x - x^I(t))' \sigma(t) (x - x^I(t)). \quad (2.13)$$

**Определение 3.** Будем называть локальной аппроксимацией множества достижимости системы (1.1)-(1.2) в окрестности точки  $x^I(t_1)$  множество

$$S(x^I(t)) = \{(x, x_0) \in \mathbb{R}^{n+1}: x^0 = \frac{1}{2} (x - x^I(t_1))' \sigma(t_1) (x - x^I(t_1))\}$$

Определим вспомогательную функцию  $F_\alpha \{x\} = \alpha F(x) + (1-\alpha)x^0$ ,  $\alpha \in (0,1)$ . Минимум функции  $F_\alpha(x)$  по  $x$  при условии  $x^0 = \frac{1}{2} (x - x^I(t_1))' \sigma(t_1) (x - x^I(t_1))$  обозначим  $x^*(\alpha)$ . Очевидно,

что точка  $x^*(\alpha)$  есть некоторое приближение к решению задачи минимизации исходного функционала на множестве достижимости, и, зная ее, можно построить допустимый управляемый процесс. Рассмотрим функцию  $\tilde{u}(t, y)$ , заданную равенством (2.7). Вычисляя производные  $R$  с учетом (2.13), получим, что  $\tilde{u}(t, y)$  зависит только от переменных  $t, x$ , которую обозначим через  $\hat{u}(t, y)$ :

$$\hat{u}(t, y) = u^I(t) - [f'_u \sigma(t+1) f_u - gE^{(r)}]^{-1} f'_u \sigma(t+1) f_x (x - x^I(t)), \quad (2.14)$$

где  $E^{(r)}$  — единичная матрица размерности  $r \times r$ .

Исследуем систему, где траектория в конечный момент совпадает с точкой  $x^*(\alpha)$

$$x(t+1) = f(t, x(t), \hat{u}(t, x(t))), \quad (2.15)$$

$$x(t_1) = x^*(\alpha). \quad (2.16)$$

Для поиска траектории линеаризуем уравнение (2.15)

$$\Delta x(t+1) = f_x(t, x^I(t), u^I(t)) \Delta x(t) + f_u(t, x^I(t), u^I(t)) \Delta \hat{u}(t, x(t)). \quad (2.17)$$

Из (2.14) ясно, что

$$\Delta \hat{u}(t, x) = [f'_u \sigma(t+1) f_u - gE^{(r)}]^{-1} f'_u \sigma(t+1) f_x \Delta x(t).$$

Подставим найденное приращение  $\hat{u}(t, x)$  в (2.17)

$$\Delta x(t+1) = \left\{ f_x - f_u [f'_u \sigma(t+1) f_u - gE^{(r)}]^{-1} f'_u \sigma(t+1) f_x \right\} \Delta x(t)$$

или

$$x(t) = x^I(t) + \left\{ f_x - f_u [f'_u \sigma(t+1) f_u - gE^{(r)}]^{-1} f'_u \sigma(t+1) f_x \right\}^{-1} \times \\ \times (x(t+1) - x^I(t+1)). \quad (2.18)$$

Обозначим  $\hat{x}_\alpha(t)$ ,  $t \in T$  — решение системы (2.18), (2.16). Построим программу управления таким образом, что  $u_\alpha^{II}(t) = \hat{u}(t, \hat{x}_\alpha(t))$ , и имеем  $x_\alpha^{II}(t)$  как решение исходной системы (1.1)-(1.2) при заданном управлении  $u_\alpha^{II}(t)$ . С помощью выбора параметра  $\alpha$  примем пару  $(x_\alpha^{II}, u_\alpha^{II})$  за новое приближение в задаче улучшения (1.1)-(1.2), (1.4).

Алгоритм 1 (Базовый алгоритм улучшения).

1. Фиксируя  $\varepsilon > 0$  и  $g \in (0,1]$ , решаем матричное уравнение

$$\begin{aligned} A'(t) \left\{ \sigma(t+1) - \sigma(t+1)B(t) \left[ B'(t)\sigma(t+1)B(t) - gE^{(r)} \right]^{-1} B'(t)\sigma(t+1) \right\} A(t) = \\ = \sigma(t) + (1-g)E^{(n)}, \quad \sigma(t_0) = \varepsilon^{-1} E^{(n)}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Здесь  $A(t) = f_x(t, x^l(t), u^l(t))$ ,  $B(t) = f_u(t, x^l(t), u^l(t))$ ,  $t \in T$ .

2. Пусть  $\alpha \in (0,1)$  и найдем  $x^*(\alpha)$  как точку минимума функции

$$F_\alpha(x) = \alpha F(x) + \frac{1-\alpha}{2} (x - x^l(t_1))' \sigma(t_1) (x - x^l(t_1)).$$

3. Определим  $\hat{x}_\alpha(t)$ , решая систему

$$\begin{aligned} x(t) = x^l(t) + \left( A(t) - B(t) \left[ B'(t)\sigma(t+1)B(t) - gE^{(r)} \right]^{-1} B'(t)\sigma(t+1) A(t) \right)^{-1} \times \\ \times (x(t+1) - x^l(t+1)), \quad x(t_1) = x^*(\alpha). \end{aligned}$$

4. Найдем решение  $x_\alpha^H(t)$  системы

$$x(t+1) = f(t, x(t), u_\alpha^H(t)), \quad x(t_0) = x_0,$$

где

$$u_\alpha^H(t) = u^l(t) - \left[ B'(t)\sigma(t+1)B(t) - gE^{(r)} \right]^{-1} B'(t)\sigma(t+1) A(t) (\hat{x}_\alpha(t) - x^l(t)), \quad t \in T.$$

5. Решаем задачу одномерной минимизации:

$$F(x_\alpha^H(t_1)) \rightarrow \min_\alpha \text{ при условии } \alpha \in [0,1].$$

Принимаем управляемый процесс  $(x^H, u^H)$  за новое приближение в задаче улучшения.

### 3. СВЯЗЬ МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ РИККАТИ С ЗАДАЧЕЙ ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Пусть задана линейная дискретная цепочка со свободным левым концом

$$x(t+1) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad x(t_1) = x_1, \quad u(t) \in \mathbb{R}^r, \quad t \in T, \quad (3.1)$$

и квадратичным функционалом качества

$$J(x, u) = \varepsilon^{-1} x'(t_0)x(t_0) + \frac{1}{2} \sum_{t=t_0+1}^{t_1} [(1-g)x'(t)x(t) + gu'(t)u(t)]. \quad (3.2)$$

Цель состоит в определении оптимального синтеза  $\tilde{u}(t, x)$ , минимизирующего  $J(x, u)$ . Такой синтез реализуется регулятором с обратной связью [24]. Для задачи (3.1)-(3.2) согласно ([3], с. 155):

а) функция Беллмана является положительно определенной квадратичной формой вида

$$\varphi(t, x) = \frac{1}{2} x' \sigma_1(t) x, \quad (3.3)$$

$\sigma_1(t)$  –  $n \times n$  симметрическая матрица;

б) уравнения на неизвестную функцию  $\sigma_1(t)$  выглядят следующим образом

$$\begin{aligned} A'(t)\sigma_1(t+1)A(t) - A'(t)\sigma_1(t+1)B(t) \left[ B'(t)\sigma_1(t+1)B(t) - gE^{(r)} \right]^{-1} \times \\ \times B'(t)\sigma_1(t+1)A(t) - \sigma_1(t) + (1-g)E^{(n)} = 0, \quad \sigma_1(t_0) = \varepsilon^{-1} E^{(n)}; \end{aligned} \quad (3.4)$$

с) оптимальный синтез имеет вид

$$\hat{u}(t, y) = - \left[ B'(t)\sigma_1(t+1)B(t) - gE^{(r)} \right]^{-1} B'(t)\sigma_1(t+1)A(t)x. \quad (3.5)$$

Нетрудно видеть, что уравнения (3.4) и (2.19) совпадают  $\forall t \in T$ , следовательно  $\sigma(t)$  – положительно определена, и следовательно невырожденная. Этот факт понадобится для доказательства следующей теоремы.

#### 4. ТЕОРЕМА О РЕЛАКСАЦИИ

Согласно доказанной лемме в [14,15] существует  $\alpha_0 \in (0,1)$ , при котором точку минимума  $x^*(\alpha)$  в задаче  $F_\alpha(x) = \alpha F(x) + \frac{1-\alpha}{2}(x - x^I(t_1))' \sigma(t_1)(x - x^I(t_1)) \rightarrow \min$  для  $0 \leq \alpha \leq \alpha_0$  можно искать, решая уравнение (5.1).

Применяя формулу Лагранжа, получим

$$F_x(x^*(\alpha)) = F_x(x^I(t_1)) - \frac{\alpha}{1-\alpha} F_{xx}(\xi(\alpha)) \sigma^{-1}(t_1) F_x(x^*(\alpha)),$$

где  $\xi(\alpha) = x^I(t_1) + \theta_\alpha(x^*(\alpha) - x^I(t_1))$ ,  $0 < \theta_\alpha < 1$ . Из этого

$$F_x(x^*(\alpha)) = \left[ E^{(n)} + \frac{\alpha}{1-\alpha} F_{xx}(\xi(\alpha)) \sigma^{-1}(t_1) \right]^{-1} F_x(x^I(t_1)).$$

Учитывая (4.1), получим

$$x^*(\alpha) - x^I(t_1) = -\alpha [ \alpha F_{xx}(\xi(\alpha)) + (1-\alpha) \sigma(t_1) ]^{-1} F_x(x^I(t_1)). \quad (4.2)$$

По формуле Лагранжа, можно записать

$$\begin{aligned} f(t, \hat{x}_\alpha(t), \hat{u}(t, \hat{x}_\alpha(t))) - f(t, x^I(t), u^I(t)) &= \\ &= \frac{d}{dt} (f(t, \eta_\alpha(t), \hat{u}(t, \eta_\alpha(t)))) (\hat{x}_\alpha(t) - x^I(t)) = \\ &= (f_x(t, \eta_\alpha(t), \hat{u}(t, \eta_\alpha(t))) + f_u(t, \eta_\alpha(t), \hat{u}(t, \eta_\alpha(t))) \hat{u}_x(t, \eta_\alpha(t))) (\hat{x}_\alpha(t) - x^I(t)), \end{aligned}$$

где  $\eta_\alpha(t) = x^I(t) + \theta_\alpha(\hat{x}_\alpha(t) - x^I(t))$ ,  $0 < \theta_\alpha < 1$ . Обозначим

$$C_\alpha(t) = f_x(t, \eta_\alpha(t), \hat{u}(t, \eta_\alpha(t))) + f_u(t, \eta_\alpha(t), \hat{u}(t, \eta_\alpha(t))) \hat{u}_x(t, \eta_\alpha(t)).$$

Тогда  $\hat{x}_\alpha(t+1) - x^I(t+1) = C_\alpha(t)(\hat{x}_\alpha(t) - x^I(t))$ ,  $\hat{x}_\alpha(t_1) = x^*(\alpha)$ . По формуле (см. [16, с. 516]), имеем

$$\hat{x}_\alpha(t) = x^I(t) + \Psi_\alpha(t)(x^*(\alpha) - x^I(t_1)), \quad (4.3)$$

где матрица  $\Psi_\alpha(t)$  удовлетворяет уравнению

$$\Psi_\alpha(t+1) = C_\alpha(t) \Psi_\alpha(t), \quad \Psi_\alpha(t_1) = E^{(n)}, \quad t \in \{t_0, \dots, t_1 - 1\}.$$

Построим программу управления  $u_\alpha^{II}(t) = \hat{u}(t, \hat{x}_\alpha(t))$  и рассмотрим решение  $x_\alpha^{II}(t)$  системы из п. 4 алгоритма 1. Используя формулу конечных приращений, получим

$$\begin{aligned} f(t, x_\alpha^{II}(t), u_\alpha^{II}(t)) - f(t, x^I(t), u^I(t)) &= \\ &= f_x(t, \zeta_\alpha(t), u_\alpha^{II}(t)) (x_\alpha^{II}(t) - x^I(t)) + f_u(t, x^I(t), \vartheta_\alpha(t)) (u_\alpha^{II}(t) - u^I(t)), \end{aligned}$$

где  $\zeta_\alpha(t) = x^I(t) + \theta'_\alpha(x_\alpha^{II}(t) - x^I(t))$ ,  $\vartheta_\alpha(t) = u^I(t) + \theta''_\alpha(u_\alpha^{II}(t) - u^I(t))$ ,  $0 < \theta'_\alpha, \theta''_\alpha < 1$ .

Обозначим  $A_\alpha(t) = f_x(t, \zeta_\alpha(t), u_\alpha^{II}(t))$

$$D_\alpha(t) = f_u(t, x^I(t), \vartheta_\alpha(t)) (u_\alpha^{II}(t) - u^I(t)). \quad (4.4)$$

Тогда решение системы из п. 4 удовлетворяет равенству

$$x_\alpha^{II}(t+1) - x^I(t+1) = A_\alpha(t)(x_\alpha^{II}(t) - x^I(t)) + D_\alpha(t)$$

и представимо в виде

$$x_\alpha^{II}(t) = x^I(t) + \sum_{\tau=t_0}^{t-1} \Xi_\alpha(t) \Xi_\alpha^{-1}(\tau+1) D_\alpha(\tau),$$

где матрица  $\Xi_\alpha(t)$  является решением матричного уравнения

$$\Xi_\alpha(t+1) = A_\alpha(t) \Xi_\alpha(t), \quad \Xi_\alpha(t_0) = E^{(n)}, \quad t \in \{t_0, \dots, t_1 - 1\}.$$

По формуле Тейлора найдется  $\eta(\alpha) = x^I(t_1) + \theta_\alpha(x_\alpha^{II}(t_1) - x^I(t_1))$ ,  $\theta_\alpha \in (0,1)$  такое, что

$$\begin{aligned}
 F(x_\alpha''(t_1)) - F(x^I(t_1)) &= F_x'(x^I(t_1)) \sum_{\tau=t_0}^{t_1-1} \Xi_\alpha(t) \Xi_\alpha^{-1}(\tau+1) D_\alpha(\tau) + \\
 &+ \frac{1}{2} \left( \sum_{\tau=t_0}^{t_1-1} \Xi_\alpha(t_1) \Xi_\alpha^{-1}(\tau+1) D_\alpha(\tau) \right)' F_{xx}(\eta(\alpha)) \sum_{\tau=t_0}^{t_1-1} \Xi_\alpha(t_1) \Xi_\alpha^{-1}(\tau+1) D_\alpha(\tau).
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Согласно (4.3) будем иметь

$$u_\alpha''(t) = u^I(t) - \hat{u}_x(t, \mu_\alpha(t)) \Psi_\alpha(t) (x^*(\alpha) - x^I(t_1)), \tag{4.6}$$

где  $\mu_\alpha(t) = x^I(t) + \theta_\alpha (\hat{x}_\alpha(t) - x^I(t))$ ,  $0 < \theta_\alpha < 1$ . Продолжая равенство (4.5) с учетом (4.4) и (4.6), запишем

$$\begin{aligned}
 F(x_\alpha''(t_1)) - F(x^I(t_1)) &= F_x'(x^I(t_1)) \Phi_\alpha(t_1) (x^*(\alpha) - x^I(t_1)) + \\
 &+ \frac{1}{2} (x^*(\alpha) - x^I(t_1))' \Phi_\alpha'(t_1) F_{xx}(\eta(\alpha)) \Phi_\alpha(t_1) (x^*(\alpha) - x^I(t_1)),
 \end{aligned}$$

где  $\Phi_\alpha(t) = \sum_{\tau=t_0}^{t-1} \Xi_\alpha(t) \Xi_\alpha^{-1}(\tau+1) f_u(\tau, x^I(\tau), \vartheta_\alpha(\tau)) \hat{u}_x(\tau, \mu_\alpha(\tau)) \Psi_\alpha(\tau)$ .

Тогда в силу (4.2)

$$F(x_\alpha''(t_1)) - F(x^I(t_1)) = -\alpha \omega(\alpha), \tag{4.7}$$

где

$$\begin{aligned}
 \omega(\alpha) &= F_x'(x^I(t_1)) [\Phi_\alpha(t_1) [\alpha F_{xx}(\xi(\alpha) - (1-\alpha)\sigma(t_1))]^{-1} - \\
 &- \frac{1}{2} \alpha [\alpha F_{xx}(\xi(\alpha) - (1-\alpha)\sigma(t_1))]^{-1} \Phi_\alpha'(t_1) F_{xx}(\eta(\alpha)) \Phi_\alpha(t_1) \times \\
 &\times [\alpha F_{xx}(\xi(\alpha) + (1-\alpha)\sigma(t_1))]^{-1}] F_x(x^I(t_1)).
 \end{aligned}$$

Ясно, что  $\hat{x}_\alpha(t) \rightarrow x^I(t)$ ,  $\hat{x}_\alpha''(t) \rightarrow x^I(t)$  при  $\alpha \rightarrow 0$  при  $t \in T = \{t_0, \dots, t_1\}$ . Очевидно, что функция  $\hat{u}(t, x)$  непрерывна по  $x$  вместе со своей производной в точке  $x^I(t)$ . Тогда  $u_\alpha''(t) \rightarrow u^I(t)$ ,  $\alpha \rightarrow 0$  и для промежуточных точек имеем  $\xi(\alpha) \rightarrow x^I(t_1)$ ,  $\eta(\alpha) \rightarrow x^I(t_1)$ ,  $\vartheta_\alpha \rightarrow x^I(t)$ ,  $\mu_\alpha(t) \rightarrow x^I(t)$ ,  $\zeta_\alpha \rightarrow x^I(t)$ ,  $\eta_\alpha(t) \rightarrow x^I(t)$  при  $\alpha \rightarrow 0$  по всем  $t \in T$ .

Введем функции  $\Xi(t)$  и  $\Psi(t)$ , как решения линейных матричных уравнений

$$\Xi(t+1) = A(t)\Xi(t), \quad \Xi(t_0) = E^{(n)}, \tag{4.8}$$

$$\Psi(t+1) = C(t)\Psi(t), \quad \Psi(t_1) = E^{(n)}, \tag{4.9}$$

соответственно. Здесь  $A(t) = f_x(t, x^I(t), u^I(t))$ ,

$$C(t) = f_x(t, x^I(t), u^I(t)) + f_u(t, x^I(t), u^I(t)) \hat{u}_x(t, x^I(t)).$$

Согласно условию, что функция  $f(t, x, u)$  определена при каждом  $t \in T$  и дважды непрерывно дифференцируема по  $(x, u)$ , имеем  $A_\alpha(t) \rightarrow A(t)$ ,  $C_\alpha(t) \rightarrow C(t)$ ,  $\alpha \rightarrow 0$ . Очевидно, что  $\Xi_\alpha(t) \rightarrow \Xi(t)$ ,  $\Phi_\alpha(t) \rightarrow \Phi(t)$ ,  $\alpha \rightarrow 0, t \in T$ . Отсюда  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \Phi_\alpha(t) \rightarrow \Phi(t)$ ,

где

$$\Phi(t) = \sum_{\tau=t_0}^{t-1} \Xi(t) \Xi^{-1}(\tau+1) f_u(\tau, x^I(\tau), u^I(\tau)) \hat{u}_x(\tau, x^I(\tau)) \Psi(\tau), \tag{4.10}$$

и скалярная функция  $\omega(\alpha)$  непрерывна в нуле. Будем предполагать, что

$$F_x'(x^I(t_1)) \Phi(t_1) \sigma^{-1}(t_1) F_x(x^I(t_1)) > 0.$$

Тогда существует  $0 < \alpha_0 < 1$ , для которого  $\omega(\alpha) > 0$ ,  $0 < \alpha \leq \alpha_0$ . Таким образом, согласно (5.7),  $F(x''_\alpha(t_1)) - F(x^I(t_1)) < 0$  для всех  $0 < \alpha \leq \alpha_0$  и пару  $(x''_\alpha(t), u''_\alpha(t)) \in D$ ,  $0 < \alpha \leq \alpha_0$  можно принять за новое приближение  $(x''(t), u''(t))$  в задаче улучшения. Тем самым доказана следующая теорема.

**Теорема 2** (релаксационность алгоритма). Пусть управляемый процесс  $(x^I(t), u^I(t)) \in D$  такой, что удовлетворяет условию

$$F'_x(x^I(t_1))\Phi(t_1)\sigma^{-1}(t_1)F_x(x^I(t_1)) > 0. \quad (4.11)$$

Тогда для элемента  $(x''(t), u''(t)) \in D$ , построенного с помощью алгоритма 1, имеет место неравенство

$$I(x'', u'') < I(x^I, u^I).$$

Условие (4.11), обеспечивающее релаксационность алгоритма, эквивалентно не выполнению условия стационарности для исходной системы (1.1)-(1.2), (1.4). Рассмотрим функцию Понтрягина для этой системы

$$H(t, x, p(t+1), u) = p'(t+1)f(t, x, u), \quad p \in \mathbb{R}^n. \quad (4.12)$$

Тогда справедлива следующая

**Теорема 3.** Пусть управляемый процесс  $(x''_\alpha(t), u''_\alpha(t)) \in D$ , такой, что

$$\begin{aligned} & \sum_{\tau=t_0}^{t_1-1} H'_u(t, x^I(\tau), p^I(\tau+1), u^I(\tau))H_u(t, x^I(\tau), p^I(\tau+1), u^I(\tau)) = \\ & = \sum_{\tau=t_0}^{t_1-1} p^{I'}(\tau+1)B(\tau)B'(\tau)p^I(\tau+1) > 0, \end{aligned} \quad (4.13)$$

где  $p^I(t)$  удовлетворяет сопряженной системе

$$p^I(t) = A'(t)p^I(t+1), \quad p^I(t_1) = -F'_x(x^I(t_1)). \quad (4.14)$$

Тогда элемент  $(x^I, u^I)$  улучшается алгоритмом 1.

**Замечание 1.** Необходимым условием оптимальности для задачи (1.1)-(1.2), согласно [27, с. 112] является

$$H_u(t, x^I(t), p^I(t+1), u^I(t))(u(t) - u^I(t)) \leq 0, \quad u(t) \in U(t), t \in T. \quad (4.15)$$

**Случай 1.** Считаем  $u(t) \neq u^I(t)$  и  $H_u(t, x^I(t), p^I(t+1), u^I(t)) \neq 0$ ,  $t \in T$ , т.е.  $u^I(t)$  не является внутренней точкой множества  $U(t)$ .

Применяя к левой части неравенства (5.15) неравенство Коши-Буняковского, получим

$$\begin{aligned} & 0 < \left| (H_u(t, x^I(t), p^I(t+1), u^I(t))(u(t) - u^I(t))) \right| \leq \\ & \leq (H_u(t, x^I(t), p^I(t+1), u^I(t)), H_u(t, x^I(t), p^I(t+1), u^I(t))) \times \\ & \times (u(t) - u^I(t), u(t) - u^I(t)). \end{aligned}$$

При сделанных предположениях очевидно, что  $(u(t) - u^I(t), u(t) - u^I(t)) > 0$ . Следовательно,

$$(H_u(t, x^I(t), p^I(t+1), u^I(t)), H_u(t, x^I(t), p^I(t+1), u^I(t))) > 0. \quad (4.16)$$

Суммируя по времени  $t \in \{t_0, \dots, t_1 - 1\}$  левую часть выражения (4.16), имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{\tau=t_0}^{t_1-1} (H_u(t, x^I(\tau), p^I(\tau+1), u^I(\tau))H_u(t, x^I(\tau), p^I(\tau+1), u^I(\tau))) = \\ & = H'_u(t, x^I(t), p^I(t+1), u^I(t))H_u(t, x^I(t), p^I(t+1), u^I(t)) > 0, \end{aligned}$$

что совпадает с условием (5.13) теоремы 3.

**Случай 2.** Считаем  $u^I(t)$  является внутренней точкой множества  $U(t) = \mathbb{R}^r$ ,  $t \in T$ . Это случай,

рассматриваемый в данной статье. Тогда  $H_u(t, x^l(t), p^l(t+1), u^l(t)) = 0$ ,  $t \in T$  - есть необходимое условие оптимальности [27, с. 112], при котором дальнейшее улучшение значения функционала не происходит. При всех  $u(t) \neq u^l(t)$ ,  $t \in T$  будет выполняться условие (4.13).

Доказательство к теореме 3 находится в Приложении.

### 5. МОДИФИЦИРОВАННЫЙ АЛГОРИТМ УЛУЧШЕНИЯ, ОСНОВАННЫЙ НА РАЗЛОЖЕНИИ ПО ПАРАМЕТРУ КОНСТРУКЦИЙ БАЗОВОГО МЕТОДА

Параметр  $\alpha$  отвечает за одномерную минимизацию. Можно работать с фиксированным параметром  $g$ , тогда вся задача сводится к минимизации по  $\alpha$ . Можно варьировать оба параметра, что позволяет на итерациях делать более глубокое улучшение по сравнению с фиксированным  $g$ . Например,  $g$  можно брать равным 1 при этом теоремы об улучшении сохраняются и в результате в алгоритме будет только один параметр  $\alpha$ . А параметр  $\varepsilon$  фиксирован и близкий к нулю, определяется точностью вычислений конкретной ЭВМ.

Весовой коэффициент (параметр)  $g$  определяет относительный вес двух слагаемых. При  $g \rightarrow 1$  доминирует слагаемое, учитывающее отклонение по управлению  $Au = u - u^l$ , а при  $\Delta u = u - u^l$ , а при  $g \rightarrow 0$  - слагаемое, учитывающее отклонение по состоянию  $\Delta x = x - x^l$ . При соответствующем выборе параметра может быть обеспечена близость траекторий  $x^l(t)$  и  $x^{II}(t)$ , и управлений  $u^l(t)$  и  $u^{II}(t)$ , так как, для дискретных систем близость по  $x$  означает близость по  $u$ . При различных параметрах  $g$  для конкретных вычислительных задач значения улучшенного функционала могут значительно отличаться, хотя этот параметр можно исключить, положив  $g = 1$ .

Решение матричного уравнения (2.19), и соответственно, функция  $\sigma(t)$ , на каждом шаге времени и итерации зависит от значения  $g$ , таким образом будем рассчитывать  $\sigma = \sigma(t, g)$  с помощью тейлоровской аппроксимации первого порядка по параметру  $g$ :

$$\sigma(t, g) = \sigma(t, g^*) + \frac{d\sigma(t, g^*)}{dg}(g - g^*),$$

где  $g^* \in (0, 1]$  фиксированное. Вычислим производную  $\frac{d\sigma(t, g^*)}{dg}$ , для этого продифференцируем уравнение (2.19) по  $g$ :

$$\begin{aligned} & A'(t) \left\{ \frac{d\sigma(t+1, g^*)}{dg} - \frac{d\sigma(t+1, g)}{dg} B(t) [B'(t)\sigma(t+1, g)B(t) - gE^{(r)}]^{-1} \times \right. \\ & \times B'(t)\sigma(t+1, g) - \sigma(t+1, g)B(t) [B'(t)\sigma(t+1, g)B(t) - gE^{(r)}]^{-1} B'(t) \times \\ & \times \frac{d\sigma(t+1, g)}{dg} + \sigma(t+1, g)B(t) [B'(t)\sigma(t+1, g)B(t) - gE^{(r)}]^{-1} B'(t) \times \\ & \times \left[ B'(t) \frac{d\sigma(t+1, g)}{dg} B(t) - E^{(r)} \right] [B'(t)\sigma(t+1, g)B(t) - gE^{(r)}]^{-1} \times \\ & \left. \times B'(t)\sigma(t+1, g) \right\} A(t) = \frac{d\sigma(t, g)}{dg} - E^{(n)}, \quad \frac{d\sigma(t_0, g)}{dg} = 0. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Определим  $C_1(t, \sigma(t+1, g)) = B(t) [B'(t)\sigma(t+1, g)B(t) - gE^{(r)}]^{-1} B'(t)$ . Такая матрица является симметрической матрицей размерности  $n \times n$ .

Тогда уравнение (5.1) запишется в виде:

$$\begin{aligned}
 & A'(t) \left\{ \frac{d\sigma(t+1, g^*)}{dg} - \frac{d\sigma(t+1, g)}{dg} C_1(t, \sigma(t+1, g)) \sigma(t+1, g) - \right. \\
 & - \sigma(t+1, g) C_1(t, \sigma(t+1, g)) \frac{d\sigma(t+1, g)}{dg} + \\
 & \left. + \sigma(t+1, g) C_1(t, \sigma(t+1, g)) \frac{d\sigma(t+1, g)}{dg} C_1(t, \sigma(t+1, g)) \sigma(t+1, g) \right\} A(t) - \quad (5.2) \\
 & - A'(t) \sigma(t+1, g) B(t) [B'(t) \sigma(t+1, g) B(t) - gE^{(r)}]^{-2} B'(t) \sigma(t+1, g) A(t) = \\
 & = \frac{d\sigma(t, g)}{dg} - E^{(n)}, \quad \frac{d\sigma(t_0, g)}{dg} = 0.
 \end{aligned}$$

Это уравнение линейно относительно  $\frac{d\sigma(t, g)}{dg}$ ,  $t \in T$ .

Обозначим

$$\begin{aligned}
 X &= \sigma(t+1, g), \\
 X_g &= \frac{d\sigma(t, g)}{dg},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_1 &= A'(t) \sigma(t+1, g) B(t) [B'(t) \sigma(t+1, g) B(t) - gE^{(r)}]^{-2} B'(t) \sigma(t+1, g) A(t) + \\
 & + \frac{d\sigma(t, g)}{dg} - E^{(n)}.
 \end{aligned}$$

Зафиксировав момент времени  $t$  и считая, что матрицы  $X, A, B, \frac{d\sigma(t, g)}{dg}$  - известны, следовательно  $B_1$  тоже определена, перепишем уравнение (6.2) в матричном ----- виде

$$A' X_g A - A' X_g C_1 X A - A' X C_1 X_g A + A' X C_1 X_g C_1 X A = B_1, \quad X_g(t_0) = 0$$

и найдем его решение  $X_g$ . Определим матрицы:

$$A' X C_1 = G_1, \quad A' - G_1 = V. \quad (5.3)$$

Используя (5.3), имеем

$$\begin{aligned}
 A' X_g A - A' X_g G_1' - G_1 X_g A + G_1 X_g G_1' &= B_1, \\
 A'(X_g A - X_g G_1') - G_1(X_g A - X_g G_1') &= B_1, \\
 (A' - G_1) X_g (A - G_1') &= B_1, \\
 V X_g V^{-1} &= B_1.
 \end{aligned}$$

Будем считать, что  $V$  – невырожденная матрица, получаем

$$X_g = V^{-1} B_1 V^{-1}.$$

Или

$$\begin{aligned}
 \frac{d\sigma(t+1, g)}{dg} &= (A' - A' X B [B' X B - gE^{(r)}]^{-1} B')^{-1} \times \\
 &\times \left( A' X B [B' X B - gE^{(r)}]^{-2} B' X A + \frac{d\sigma(t, g)}{dg} - E^{(n)} \right) \times \\
 &\times (A - B [B' X B - gE^{(r)}]^{-1} B' X A)^{-1}, \quad t \in T.
 \end{aligned}$$

Сформулируем этапы нового алгоритма.

*Алгоритм 2* (Алгоритм улучшения с разложением по параметру  $g$ )

1. Фиксируя  $\varepsilon > 0$  и  $g^* \in (0,1]$ , решаем матричное уравнение

$$A'(t) \left\{ \sigma(t+1, g^*) - \sigma(t+1, g^*) B(t) [B'(t) \sigma(t+1, g^*) B(t) - g^* E^{(r)}]^{-1} \times \right. \\ \left. \times B'(t) \sigma(t+1, g^*) \right\} A(t) = \sigma(t, g^*) + (1 - g^*) E^{(n)}, \quad \sigma(t_0, g^*) = \varepsilon^{-1} E^{(n)}.$$

Здесь  $A(t) = f_x(t, x^I(t), u^I(t))$ ,  $B(t) = f_u(t, x^I(t), u^I(t))$ ,  $t \in T$ . И находим  $\sigma(t, g^*)$ .

2. Решая уравнение

$$A'(t) \left\{ \frac{d\sigma(t+1, g^*)}{dg} - \frac{d\sigma(t+1, g^*)}{dg} C_1(t, \sigma(t+1, g^*)) \sigma(t+1, g^*) - \right. \\ \left. - \sigma(t+1, g^*) C_1(t, \sigma(t+1, g^*)) \frac{d\sigma(t+1, g^*)}{dg} + \right. \\ \left. + \sigma(t+1, g^*) C_1(t, \sigma(t+1, g^*)) \frac{d\sigma(t+1, g^*)}{dg} C_1(t, \sigma(t+1, g^*)) \sigma(t+1, g^*) \right\} A(t) - \\ - A'(t) \sigma(t+1, g^*) B(t) [B'(t) \sigma(t+1, g^*) B(t) - g^* E^{(r)}]^{-2} B'(t) \sigma(t+1, g^*) A(t) = \\ = \frac{d\sigma(t, g^*)}{dg} - E^{(n)}, \quad \frac{d\sigma(t_0, g^*)}{dg} = 0.$$

где  $C_1(t, \sigma(t+1, g^*)) = B(t) [B'(t) \sigma(t+1, g^*) B(t) - g^* E^{(r)}]^{-1} B'(t)$ . Находим  $\frac{d\sigma(t, g^*)}{dg}$ ,  $t \in \{t_0+1, \dots, t_1\}$ .

Таким образом, найдем  $\sigma(t, g) = \sigma(t, g^*) + \frac{d\sigma(t, g^*)}{dg} (g - g^*)$ , где  $g^* \in (0,1]$  фиксированное.

3. Пусть  $\alpha \in (0,1]$  и найдем  $x^*(\alpha, g)$  как точку минимума функции

$$F_\alpha(x, g) = \alpha F(x) + \frac{1-\alpha}{\alpha} (x - x^I(t_1))' \sigma(t_1, g) (x - x^I(t_1)).$$

4. Определим  $\hat{x}_\alpha(t, g) = x(t, g)$  при условии  $x(t_1, g) = x^*(\alpha, g)$ , решая систему

$$x(t, g) = x^I(t) + \left\{ A(t) - B(t) [B'(t) \sigma(t+1, g) B(t) - g E^{(r)}]^{-1} \times \right. \\ \left. \times B'(t) \sigma(t+1, g) A(t) \right\}^{-1} (x(t+1, g) - x^I(t+1)).$$

5. Полагая

$$u_\alpha^{II}(t, g) = u^I(t) - [B'(t) \sigma(t+1, g) B(t) - g E^{(r)}]^{-1} B'(t) \sigma(t+1, g) A(t) (\hat{x}_\alpha(t, g) - x^I(t_1)), t \in T,$$

найдем решение  $x_\alpha^{II}(t, g)$  системы

$$x(t+1, g) = f(t, x(t, g), u_\alpha^{II}(t, g)), x(t_0, g) = x_0.$$

6. Решаем задачу двумерной минимизации:

$$F(x_\alpha^{II}(t_1, g)) \rightarrow \min_{\substack{\alpha \in [0,1] \\ g \in (0,1]}}$$

Принимаем управляемый процесс  $(x^{II}, u^{II})$  за новое приближение в задаче улучшения.

## 6. РЕЗУЛЬТАТЫ РЕШЕНИЯ ТЕСТОВЫХ ПРИМЕРОВ

Базовый метод и его модификация тестировались на трех задачах. В исходном алгоритме значение параметра  $g$  фиксировано на каждой итерации и не меняется, а значение параметра  $\alpha$  выбирается в процедуре одномерной минимизации. В модифицированном алгоритме, начиная с некоторого значения, оба параметра изменяются соответственно тому как происходит операция минимизации. Критерием останова является близость двух последовательных приближений

функционалов с некоторой точностью  $\delta$ . Тестовые примеры получены путем дискретизации, непрерывных их аналогов с равными временными интервалами, чтобы избежать модульных ограничений на управление делалась замена переменных  $u = \sin v$ .

Пример 1.

$$\begin{cases} x_1(t+h) = x_1(t) + hx_2(t), \\ x_2(t+h) = x_2(t) + h(x_1(t) + u(t)), \\ x_1(0) = x_2(0) = 1, \quad |u(t)| \leq 1, \\ I(x, u) = x_1(1) + x_2(1), t \in \{0, h, 2h, \dots, 1\}. \end{cases}$$

Начальное управление  $u^l(t) \equiv 0.5$ . Результаты численных экспериментов были получены при параметре  $g = 0.5$  для базового алгоритма, шаге дискретизации  $h = 0.01$ , точности вычисления функционала  $\delta = 0.001$ .

Пример 2.

$$\begin{cases} x_1(t+h) = x_1(t) + h((1-x_2^2(t))x_1(t) - x_2(t) + u(t)), \\ x_2(t+h) = x_2(t) + hx_1(t), \\ x_3(t+h) = x_3(t) + \frac{h}{2}(x_1^2(t) - x_2^2(t) + u^2(t)), \\ x_1(0) = x_2(0) = 1.5, \quad x_3(0) = 0, \\ |u(t)| \leq 1.5, \\ I(x, u) = x_3(5), t \in \{0, h, 2h, \dots, 5\}. \end{cases}$$

Начальное управление  $u^l(t) \equiv 0$ . Результаты численных экспериментов исходным алгоритмом при  $g = 0.5$  и модифицированным алгоритмом при  $g^* = 0.7$  были получены при шаге дискретизации  $h = 0.001$ , точности вычисления функционала  $\delta = 0.001$ .

Пример 3.

$$\begin{cases} x_1(t+h) = x_1(t) + hx_2(t), \\ x_2(t+h) = x_2(t) + h(u(t) - \sin(x_1(t))), \\ x_1(0) = 5, x_2(0) = 0, \quad |u(t)| \leq 1, \\ I(x, u) = x_1^2(5) + x_2^2(5), t \in \{0, h, 2h, \dots, 5\}. \end{cases}$$

Начальное управление  $u^l(t) \equiv 0.4$ . Значение функционала на начальном приближении равно  $I(x^l, u^l) = 163.29..$  Результаты численных экспериментов исходным алгоритмом при  $g = 0.1$ , модифицированным алгоритмом, а также исходным алгоритмом с  $g = 0.7$  были получены при шаге дискретизации  $h = 0.2$ , точности вычисления функционала  $\delta = 0.001$ . Начальное значение параметра  $g$  для алгоритма с одномерной минимизацией взяли равным 0.7 по итогам тестовых испытаний.

В линейной задаче (пример 1) и базовый алгоритм, и модифицированный - за одну итерацию привели к оптимальному решению. В примерах 2,3 с нелинейной дискретной системой у модифицированного алгоритма количество итераций меньше при достижении заданной точности вычисления функционала  $\delta$ , чем у исходного алгоритма.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Базовый алгоритм исследован на релаксационность. С помощью подхода, основанного на разложении по параметру д конструкций исходного метода, получен модифицированный алгоритм. Итерация такого алгоритма помогает автоматизировать подбор эффективных параметров по сравнению с итерацией исходного метода. Решение тестовых примеров показывает эффективность модифицированного алгоритма по сравнению с исходным методом на исследованных примерах.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

*Доказательство теоремы 3.* Предполагаем, что допустимый процесс  $(x^I(t), u^I(t))$  такой, что выполнено неравенство

$$(П.1) \quad \sum_{t=t_0}^{t_1-1} p^I(t+1)B(t)B'(t)p^I(t+1) > 0,$$

где  $p^I(t)$  получено из условий (5.14). Применяя аналог формулы Коши для дискретных линейных уравнений, выводим

$$p^I(t) = -\Xi^*(t)F_x(x^I(t_1)),$$

где  $\Xi^*(t)$  - решение матричного уравнения

$$\Xi^*(t) = A'(t)\Xi^*(t+1), \quad \Xi^*(t_1) = E^{(n)}.$$

Функция  $\Xi^*(t)$  связана с решением  $\Xi(t)$  системы (5.8) равенством

$$\Xi^*(t) = [\Xi(t_1)\Xi^{-1}(t)], \quad t \in T.$$

В силу предположения (П.1) имеем

$$(П.2) \quad \sum_{t=t_0}^{t_1-1} F_x'(x^I(t_1))\Xi(t_1)\Xi^{-1}(t+1)\Xi B(t)B'(t)\Xi^{-1}(t+1)\Xi'(t_1)F_x(x^I(t_1)) > 0.$$

Пусть  $\sigma(t)$  решение уравнения (3.19). Запишем его в виде соотношения

$$\sigma(t) = A'(t)\sigma(t+1)C(t) - (1-g)E^{(n)}.$$

Считая, что  $\sigma(t_1)$  фиксированное, получим

$$\sigma(t) = \Xi^*(t)\sigma(t_1)\Psi^*(t) - (1-g)\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1} \Xi^*(t)\Xi^{*-1}(\tau)\Psi^{*-1}(\tau)\Psi^*(t),$$

где  $\Psi^*(t)$  удовлетворяет системе

$$\Psi^*(t) = \Psi^*(t+1)C(t), \quad \Psi^*(t_1) = E^{(n)}.$$

Поскольку  $\Psi^*(t) = \Psi^{-1}(t)$ ,  $t \in T$ , а  $\Psi(t)$  - матрица, удовлетворяющая (5.9). Таким образом

$$(П.3) \quad \sigma(t) = \Xi^{-1}(t)\Xi'(t_1)\sigma(t_1)\Psi^{-1}(t) - (1-g)M(t),$$

где  $M(t) = \sum_{\tau=t_0}^{t_1-1} \Xi^{-1}(t)\Xi'(\tau)\Psi(\tau)\Psi^{-1}(t)$ .

Учитывая пункты (П.2)-(П.3) совместно, имеем

$$(П.4) \quad \beta := \sum_{t=t_0}^{t_1-1} F_x'(x^I(t_1))\Xi(t_1)\Xi^{-1}(t+1)B(t)B'(t) \times \\ \times [\sigma(t+1) + (1-g)M(t+1)]C(t)\Psi'(t)\sigma^{-1}(t_1)F_x(x^I(t_1)) > 0.$$

Обозначим

$$\gamma := \sum_{t=t_0}^{t_1-1} F_x'(x^I(t_1))\Xi(t_1)\Xi^{-1}(t+1)B(t)B'(t)M(t+1)C(t)\Psi'(t)\sigma^{-1}(t_1)F_x(x^I(t_1)).$$

Рассмотрим два варианта. В первом, если  $\gamma > 0$ , то будем выбирать  $g_0$  из условия  $0 < 1 - g_0 < \frac{\beta}{\gamma}$ . Тогда согласно (П.4) для всех  $g : g_0 \leq g < 1$

$$(П.5) \quad F_x'(x'(t_1))\Phi(t_1)\sigma^{-1}(t_1)F_x(x'(t_1)) > 0,$$

где  $\Phi(t)$  — функция, определенная в условии (5.11) теоремы 2 и представленная в данном случае в виде

$$\Phi(t) = \frac{1}{g} \sum_{\tau=t_0}^{t_1-1} \Xi(\tau)\Xi^{-1}(\tau+1)B(\tau)B'(\tau)\sigma(\tau+1)C(\tau)\Psi(\tau).$$

Во втором варианте, если  $\gamma \leq 0$ , неравенство (П.5) будет выполнено в независимости от выбора параметра  $g \in (0, 1]$ .

Подводя итог, справедливо условие (5.11) теоремы 2, в соответствии с которым процесс  $\gamma > 0$  улучшается алгоритмом.

Теорема 3 доказана.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Болтянский, В.Г. Оптимальное управление дискретными системами / В.Г. Болтянский. – М.: Наука, 1973.
2. Габасов Р. Основы динамического программирования / Р.Габасов, Ф.М. Кириллова. – Минск: Изд-во БГУ, 1975.
3. Кротов В.Ф. Методы и задачи оптимального управления / В.Ф. Кротов, В.И. Гурман. – М.: Наука, 1973.
4. Пропой, А.И. Элементы теории оптимальных дискретных процессов / А.И. Пропой. – М.: Наука, 1973.
5. Батурич, В.А. Приближенные методы оптимального управления, основанные на принципе расширения / В.А. Батурич, Д.Е. Урбанович. – Новосибирск: Наука, СО РАН, 1997.
6. Гурман, В.И. Принцип расширения в задачах управления / В.И. Гурман. – М.: Наука, 1997.
7. Батурич, В.А. Метод улучшения, основанный на локальных аппроксимациях множества достижимости, для дискретных управляемых систем // Тр. XII Байкальской междунар. конф. «Методы оптимизации и их приложения» / В.А. Батурич, Е.В. Гончарова. – Иркутск. 2001. – Т. 2. – С. 68-72.
8. Гончарова, Е.В. Об улучшении дискретных управляемых процессов в задачах со смешанными ограничениями / Е.В. Гончарова // АиТ. – 2002. – № 8. – С. 102-109.
9. Goncharova E. Improvement of Discrete Control Processes in Problems with Mixed Constraints // Autom. Remote Control, 2002. V. 63. No. 8. P. 1298-1304.
10. Батурич, В.А. Метод улучшения для дискретной управляемой системы с сетевой структурой / В.А. Батурич, А.А. Лемперт // УБС. Спец. вып. 30.1 «Сетевые модели в управлении». – М.: ИПУ РАН, 2010. – С. 11-21.
11. Батурич, В.А. Методы слабого улучшения в задаче оптимального управления на се-ти операторов / В.А. Батурич, А.А. Лемперт // Тр. междунар. конф. «Вычислительные и информационные технологии в науке и образовании». – Павлодар, 2006. – Т. 2. – С. 76-87.
12. Бадмацыренова, С.Б. Метод последовательно улучшения второго порядка для дискретных управляемых систем / С.Б. Бадмацыренова, В.А. Батурич // Изв. РАН. ТиСУ. – 2012. – № 4. – С. 14-25.
13. Badmatsyrenova S.B., Baturin V.A. Second-order successive improvement method for discrete control systems // Journal of Computer and Systems Sciences International, 2012. V. 51, No. 4, P. 488-499.
14. Батурич, В.А. Метод улучшения, основанный на приближенном представлении множества достижимости. Теорема о релаксации / В.А. Батурич, Е.В. Гончарова // АиТ. – 1999. – № 11. – С. 19-29.
15. Baturin V., Goncharova E. An Optimal Control Algorithm Based on Reachability Set Approximation and Linearization // Autom. Remote Control, 2002. V. 63. No. 7. P. 1043-1050.
16. Квакернаак, Х. Линейные оптимальные системы управления / Х. Квакернаак, Р. Сиван – М.: Мир. – 1977.
17. Константинов, Г.Н. Нормирование воздействий на динамические системы / Г.Н. Константинов. – Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1983.
18. Гурман, В.И. Алгоритм улучшения, основанный на оценках областей достижимости / В.И. Гурман, В.А. Батурич. Деп. в ВИНТИ. – № 651-85. – 1985.
19. Гончарова, Е.В. Итеративный метод решения дискретных задач оптимального управления / В.И. Гурман, Г.Н. Константинов // ЖВТ. 2003. – Т. 8. – С. 269-275.
20. Гурман, В.И. Множества достижимости управляемых систем. Связь с уравнением Беллмана / В.И. Гурман, Г.Н. Константинов. – Иркутск, 1981. – Деп. в ВИНТИ 14.08.81. – № 4038-81.
21. Лотов, А.В. О понятии обобщенных множеств достижимости и их построении для линейной управляемой системы / А.В. Лотов // ДАН СССР. – 1980. – № 5. – С. 1081-1083.
22. Pescardi T., Arenda K.S. Reachable sets for linear dynamic systems // Inform, and Control. 1971. V. 19. № 4. P. 319-344.
23. Vinter R. A characterization of the reachable set for nonlinear control systems // Siam J. Contr. and Optim. 1980. V. 18. No. 6. P. 599-610.
24. Летов, А.М. Аналитическое конструирование регуляторов, П/А.М. Летов // АиТ. – 1960. – Т. 21. – № 5. – С. 561-568.
25. Беллман Р. Динамическое программирование / Р. Беллман. – М.: Изд-во иностранной литературы, 1960.
26. Куо, Б. Теория и проектирование цифровых систем управления / Б. Куо. – М.: Машиностроение, 1986.
27. Васильев, Ф.П. Методы решения экстремальных задач / Ф.П. Васильев. – М.: Наука, 1981.

**SUCCESSIVE APPROXIMATION METHOD  
BASED ON LOCAL APPROXIMATION OF THE REACHABLE SET  
FOR DISCRETE OPTIMAL CONTROL PROBLEMS**

© 2023 V.A. Baturin, A.V. Daneev, V.N. Sizykh

Irkutsk State Transport University, Irkutsk, Russia

An improvement algorithm based on local approximations of the reachable set of a time-discrete optimal control problem is considered. Conditions are obtained that ensure the relaxation of the algorithm and the connection with the necessary optimality conditions.

*Keywords:* optimal control, method of successive approximations, local approximation of the reachable set, discrete problems.

DOI: 10.37313/1990-5378-2023-25-3-114-129

EDN: LKFKBB

**REFERENCES**

1. *Boltyanskij, V.G.* Optimal'noe upravlenie diskretnymi sistemami / V.G. Boltyanskij. – M.: Nauka, 1973.
2. *Gabasov R.* Osnovy dinamicheskogo programmirovaniya / R. Gabasov, F.M. Kirillova. – Minsk: Izd-vo BGU, 1975.
3. *Krotov V.F.* Metody i zadachi optimal'nogo upravleniya / V.F. Krotov, V.I. Gurman. – M.: Nauka, 1973.
4. *Propoj, A.I.* Elementy teorii optimal'nyh diskretnyh processov / A.I. Propoj. – M.: Nauka, 1973.
5. *Baturin, V.A.* Priblizhennyye metody optimal'nogo upravleniya, osnovannyye na principe rasshireniya / V.A. Baturin, D.E. Urbanovich. – Novosibirsk: Nauka, SO RAN, 1997.
6. *Gurman, V.I.* Princip rasshireniya v zadachah upravleniya / V.I. Gurman. – M.: Nauka, 1997.
7. *Baturin, V.A.* Metod uluchsheniya, osnovannyj na lokal'nyh approksimacijah mnozhestva dostizhimosti, dlya diskretnyh upravlyaemyh sistem // Tr. XII Bajkal'skoj mezhdunar. konf. "Metody optimizacii i ih prilozheniya" / V.A. Baturin, E.V. Goncharova. – Irkutsk. 2001. – T. 2. – S. 68-72.
8. *Goncharova, E.V.* Ob uluchshenii diskretnyh upravlyaemyh processov v zadachah so smeshannymi ogranicheniyami / E.V. Goncharova // AiT. – 2002. – № 8. – S. 102-109.
9. *Goncharova E.* Improvement of Discrete Control Processes in Problems with Mixed Constraints // Autom. Remote Control, 2002. V. 63. No. 8. P. 1298-1304.
10. *Baturin, V.A.* Metod uluchsheniya dlya diskretnoj upravlyaemoj sistemy s setevoy strukturoj / V.A. Baturin, A.A. Lempert // UBS. Spec. vyp. 30.1 "Setevye modeli v upravlenii". – M.: IPU RAN, 2010. – S. 11-21.
11. *Baturin, V.A.* Metody slabogo uluchsheniya v zadache optimal'nogo upravleniya na seti operatorov / V.A. Baturin, A.A. Lempert // Tr. mezhdunar. konf. «Vychislitel'nye i informacionnye tekhnologii v nauke i obrazovanii». – Pavlodar, 2006. – T. 2. – S. 76-87.
12. *Badmacyrenova, S.B.* Metod posledovatel'nogo uluchsheniya vtorogo poryadka dlya diskretnyh upravlyaemyh sistem / S.B. Badmacyrenova, V.A. Baturin // Izv. RAN. TiSU. – 2012. – № 4. – S. 14-25.
13. *Badmatsyrenova S.B., Baturin V.A.* Second-order successive improvement method for discrete control systems // Journal of Computer and Systems Sciences International, 2012. V. 51, No. 4, P. 488-499.
14. *Baturin, V.A.* Metod uluchsheniya, osnovannyj na priblizhennom predstavlenii mnozhestva dostizhimosti. Teorema o relaksacii / V.A. Baturin, E.B. Goncharova // AiT. – 1999. – № 11. – S. 19-29.
15. *Baturin V., Goncharova E.* An Optimal Control Algorithm Based on Reachability Set Approximation and Linearization // Autom. Remote Control, 2002. V. 63. No. 7. P. 1043-1050.
16. *Kvakernaak, X.* Linejnye optimal'nye sistemy upravleniya / X. Kvakernaak, P. Sivan – M.: Mir. – 1977.
17. *Konstantinov, G.N.* Normirovanie vozdeystvij na dinamicheskie sistemy / G.N. Konstantinov. – Irkutsk: Izd-vo Irkut. un-ta, 1983.
18. *Gurman, V.I.* Algoritm uluchsheniya, osnovannyj na ocenkah oblastej dostizhimosti / V.I. Gurman, V.A. Baturin. Dep. v VINITI. – № 651-85. – 1985.
19. *Goncharova, E.V.* Iterativnyj metod resheniya diskretnyh zadach optimal'nogo upravleniya / V.I. Gurman, G.N. Konstantinov // ZHVT. 2003. – T. 8. – S. 269-275.
20. *Gurman, V.I.* Mnozhestva dostizhimosti upravlyaemyh sistem. Svyaz' s uravneniem Bellmana / V.I. Gurman, G.N. Konstantinov. – Irkutsk, 1981. – Dep. v VINITI 14.08.81. – № 4038-81.
21. *Lotov, A.V.* O ponyatii obobshchennyh mnozhestv dostizhimosti i ih postroenii dlya linejnoj upravlyaemoj sistemy / A.V. Lotov // DAN SSSR. – 1980. – № 5. – S. 1081-1083.
22. *Pescvardi T., Arenda K.S.* Reachable sets for linear dynamic systems // Inform. and Control. 1971. V. 19. № 4. P. 319-344.
23. *Vinter R.* A characterization of the reachable set for nonlinear control systems // Siam J. Contr. and Optim. 1980. V. 18. No. 6. P. 599-610.
24. *Letov, A.M.* Analiticheskoe konstruirovaniye regulatorov, II / A.M. Letov // AiT. – 1960. – T. 21. – № 5. – S. 561-568.
25. *Bellman R.* Dinamicheskoe programmirovaniye / R. Bellman. – M.: Izd-vo inostrannoj literatury, 1960.
26. *Kuo, B.* Teoriya i proektirovaniye cifrovyyh sistem upravleniya / B. Kuo. – M.: Mashinostroeniye, 1986.
27. *Vasil'ev, F.P.* Metody resheniya ekstremal'nyh zadach / F.P. Vasil'ev. – M.: Nauka, 1981.

*Vladimir Baturin, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Senior Research Fellow. E-mail: rozen@iss.ru*

*Aleksey Daneev, Doctor of Technical Sciences, Professor, Professor of the Department of Information Systems and Information Security. E-mail: daneev@mail.ru*

*Viktor Sizykh, Doctor of Technical Sciences, Professor, Professor of the Department of Automation of Production Processes. E-mail: sizykh\_vn@mail.ru*

**МОДЕЛИРОВАНИЕ И СРАВНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ТОЧНОГО АНАЛИТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТЕЧЕНИЯ В ТОНКОМ СЛОЕ С ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМИ ДАННЫМИ**

© 2023 Е. А. Яновская

Московский государственный технологический университет «СТАНКИН», г. Москва, Россия

Статья поступила в редакцию 26.05.2023

Многие технологические процессы обработки металлов давлением включают деформирование удлиненной заготовки сближающимися инструментами, контактные поверхности которых имеют неглубокие ручьевые полости. Распространенным частным случаем являются штампы или часть их контактных поверхностей, представляющих собой плоскости: площадки под осадку и некоторые виды заготовительных ручьев. Статья посвящена математическому моделированию течения тонкого слоя металла по шероховатым поверхностям. В статье приводятся результаты аналитического исследования краевой задачи о вязкопластическом течения тонкого слоя металла, расположенного между движущимися навстречу друг другу тонкими шероховатыми плитами. Приводятся точные решения, основанные на классической постановке в рамках «идеальной жидкости» и «вязкопластической жидкости». Описан реальный эксперимент, проведенный для оценки влияния осредненных по толщине слоя касательных напряжений на кинематику течения пластического слоя. С целью оценки влияния касательных напряжений, осредненных по толщине слоя, на кинематику течения, и, в особенности, вблизи неподвижных границ поставлены эксперименты и анализируются результаты по осадке между сближающимися жесткими плитами тонкого пластического образца, ограниченного неподвижными стенками и, первоначально имеющего форму прямоугольника в плане. Неподвижные стенки инструмента расположены вдоль длинных сторон прямоугольника. Установлены экспериментальные закономерности. Растекание образцов происходит ожидаемо – по прямым линиям тока, параллельным длинной стороне прямоугольника, или по лучам кругового сектора. При этом установлено, что продольные перемещения вблизи неподвижных стенок заметно отстают от перемещений вдали от границы, а максимальные перемещения наблюдаются на линии симметрии образца относительно неподвижных стенок. Этот факт говорит о наличии ненулевых сдвиговых напряжений и (скоростей) деформаций в рассматриваемых течениях тонкого пластического слоя. Сравнение полученных экспериментальных и аналитических результатов моделирования позволяет оценить корректность выбранной математической модели, которая может быть использована для описания течений.

*Ключевые слова:* тонкий слой, стесненное течение, модель «идеальной жидкости», результаты эксперимента.

DOI: 10.37313/1990-5378-2023-25-3-130-139

EDN: LLYQKW

**Постановка и решение краевой задачи.**

Пусть достаточно тонкий слой металла деформируется параллельно движущимся навстречу друг другу плоскими инструментами, как показано на рис. 1. В качестве допущений примем [1]:

- плоскости контакта инструмента являются шероховатыми;
- материал инструмента абсолютно жесткий;
- деформируемый слой из идеально пластического металла.

Кроме того, течение по координате  $y = \pm b_0$  отсутствует, т.к. контейнер матрицы имеет боковые стенки (рис. 1 б).

Краевая задача растекания на шероховатой плоскости слоя из пластического материала формулируется следующим образом [2, 3]:

*Яновская Елена Александровна, кандидат технических наук, доцент кафедры прикладной математики. E-mail: elena\_yanovskaya@bc.ru*

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\sigma_s}{3} \frac{dt}{dl} \Delta u - \frac{2\tau_s}{h} \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\sigma_s}{3} \frac{dt}{dl} \Delta v - \frac{2\tau_s}{h} \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{dl}{dt} = 0, \tag{3}$$

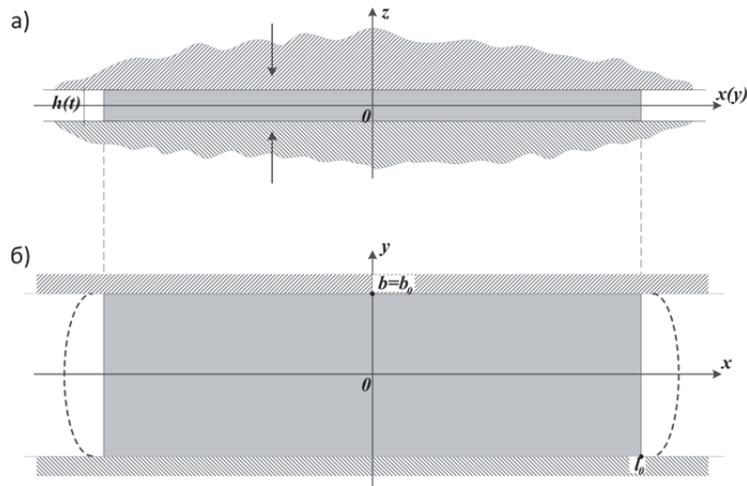
где  $p, u, v$  – давление на контактных поверхностях и компоненты вектора скорости;  $\tau_s = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}$

– сдвиговые напряжения материала пластического слоя;  $h = h(t)$  – зависимость изменения толщины слоя от времени;

$$\lambda(t) = \ln \frac{h(t_0)}{h(t)},$$

$\lambda(t)$  – степень деформации по А.А. Ильюшину;  $t_0$  – время начала процесса деформирования.

Примем на свободной границе образца, обозначенной как  $\Gamma_C: F(x, y, t) = 0$ , положение которой заранее неизвестно, краевые условия:



**Рисунок 1.** Схема течения сборного образца:

а – разрез плоскостью, проходящей через ось z; б – вид сверху

одно динамическое

$$\vec{\sigma}^{(n)} = \tilde{\sigma} \vec{n} = \vec{0}, \quad (4)$$

заменяв его двумя скалярными, получим:

$$\sigma_{xx}n_x + \sigma_{xy}n_y = 0; \quad \sigma_{yy}n_y + \sigma_{xy}n_x = 0, \quad (5)$$

где нормальный к границе вектор:

$$\vec{n} = (n_x, n_y) = \frac{\nabla F}{|\nabla F|}, \quad (6)$$

при этом не нулевые компоненты тензора напряжений  $\tilde{\sigma}$  будут иметь вид:

$$\sigma_{xx} = -p + \frac{2}{3}\sigma_s + \frac{2}{3}\sigma_s \frac{dt}{d\lambda} \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \sigma_{xy} = \frac{1}{3} \frac{dt}{d\lambda} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right); \quad \sigma_{yy} = -p + \frac{2}{3}\sigma_s + \frac{2}{3}\sigma_s \frac{dt}{d\lambda} \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (7)$$

Кроме динамического условия (4), требуется задать одно кинематическое, обусловленное непроницаемостью границ:

$$v_n \equiv \vec{v} \cdot \vec{n} = - \frac{\partial F / \partial t}{|\text{grad} F|} \quad (8)$$

По условию (8) можно восстановить интересующую нас границу  $\Gamma_c$ . Обозначим контактную поверхность с инструментом через  $\Gamma_k: G(x, y, t) = 0$ , на которой реализуются также два условия: одно динамическое, диктуемое равенством тангенциальной составляющей вектора напряжения предельному значению при факторе трения  $\mu = 1$ :

$$|\vec{\sigma}^{(n)} \cdot \vec{\tau}| = |\sigma_{xx}n_xn_y + \sigma_{xy}(n_y^2 - n_x^2) - \sigma_{yy}n_xn_y| = \mu\tau_s, \quad (0 \leq \mu \leq 1) \quad (9)$$

и второе кинематическое, обусловленное непроницаемостью контактных поверхностей инструмента (10):

$$v_n \equiv \vec{v} \cdot \vec{n} = - \frac{\partial G / \partial t}{|\text{grad} G|}, \quad (10)$$

где  $\vec{\tau} = (n_y, -n_x)$  и  $\vec{n}$  – единичные касательный и нормальный векторы к границе  $\Gamma_k$ . Если граница неподвижна, то компонента нормальной скорости равна нулю.

Для решения системы (1)-(3) течения пластического слоя с подвижными и неподвижными границами выписанных условий (7)-(10) вполне достаточно.

Для перехода к безразмерному описанию задачи определим значения характерной длины  $l_0$ , скорости сближения плит деформирующих инструментов  $v_0$ , контактного давления  $p_0$ , толщина слоя обезразмеривается на  $h_0$ , время – на  $\frac{l_0}{v_0}$ . Относительную толщину пластического слоя  $\varepsilon = \frac{h_0}{l_0} \ll 1$  примем за малый параметр.

Проведем оценку порядка последних величин, исходя из простейших уравнений математической модели растекания тонкого слоя из пластического материала.

Уравнение равновесия (1) при  $v=0$

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{2\tau_s}{h} = 0$$

запишем в безразмерном виде

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_{xx}}{\partial \bar{x}} \left( \frac{p_0}{l_0} \right) + \frac{2\tau_s}{\bar{h}} \cdot \frac{1}{h_0} = 0. \quad (11)$$

Следовательно,

$$\frac{p_0}{l_0} \sim \frac{\sigma_s}{h_0}, \text{ или } p_0 \sim \frac{\sigma_s}{\left(\frac{h_0}{l_0}\right)} = \frac{\sigma_s}{\varepsilon}.$$

$$p_0 = \frac{\sigma_s}{\varepsilon}. \quad (12)$$

Рассмотрим, далее условие несжимаемости (2)

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{h} \frac{dh}{dt} = 0. \quad (13)$$

Следовательно,

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \left(\frac{v_0}{l_0}\right) + \frac{1}{\bar{h}} \frac{1}{h_0} \left(\frac{dh}{dt}\right) \frac{dh(t_0)}{dt} = 0,$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \left(\frac{v_0}{l_0}\right) + \frac{1}{\bar{h}} \left(\frac{dh}{dt}\right) \left(\frac{h_0}{l_0}\right) \frac{dh(t_0)}{dt} = 0$$

и

$$\frac{v_0}{l_0} \sim \frac{1}{h_0} \frac{dh(t_0)}{dt}.$$

Очевидно, что

$$v_0 \sim \frac{dh(t_0)}{dt} \frac{1}{\varepsilon}.$$

Приведем уравнение несжимаемости (13) к безразмерному виду

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \left(\frac{v_0}{l_0}\right) + \frac{1}{\bar{h}} \left(\frac{1}{h_0}\right) \frac{dh(t_0)}{dt} \frac{h_0}{t_0} = 0.$$

После подстановки  $\frac{v_0}{l_0}$  и сокращения, получим, что

$$\frac{v_0}{l_0} \sim \frac{1}{t_0}$$

и окончательно

$$t_0 \sim \frac{l_0}{v_0}.$$

Будем считать, что

$$t_0 = \frac{l_0}{v_0}; \quad v_0 = -\frac{dh(t_0)}{dt} \frac{1}{\varepsilon}.$$

Сравнение величин характерных скоростей приводит к утверждению, что скорость сближения инструментов заметно отстает от скорости течения слоя и это является прогнозируемым. Оценим порядок слагаемых в квазистатических уравнениях равновесия. Очевидно, что давление на контакте (12) при возрастании, превышает предел текучести материала слоя.

Полагая, что толщина слоя  $h$ , в отличие от других линейных размеров (координат), при делении на  $h(t_0)$  становится безразмерной, перепишем в безразмерном виде систему уравнений (1) – (3):

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} = \varepsilon \frac{d\bar{t}}{d\lambda} \Delta \bar{u} - \frac{2}{\sqrt{3}\bar{h}} \frac{\bar{u}}{\sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2}}, \quad (14)$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} = \varepsilon \frac{d\bar{t}}{d\lambda} \Delta \bar{v} - \frac{2}{\sqrt{3}\bar{h}} \frac{\bar{v}}{\sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2}}, \quad (15)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} - \frac{d\lambda}{d\bar{t}} = 0, \quad (16)$$

где безразмерные величины отмечены диакритическим знаком «верхняя черта» (заметим, что в уравнениях равновесия при слагаемых со старшими производными - лаплассианами появился малый параметр  $\varepsilon$ ).

Граничные условия поставленной задачи преобразуем следующим образом. На свободной границе  $\Gamma_F: F(x, y, t) = 0$  при отсутствии напряжений (4):

$$\bar{\sigma}_{xx} = -\bar{p} + \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3} \frac{d\bar{t}}{d\lambda} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}}\right) \varepsilon; \quad \bar{\sigma}_{xy} = \frac{1}{3} \frac{d\bar{t}}{d\lambda} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}}\right) \varepsilon; \quad \bar{\sigma}_{yy} = -\bar{p} + \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3} \frac{d\bar{t}}{d\lambda} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}}\right) \varepsilon.$$

С учетом безразмерного вектора (6) нормали к границе:

$$\vec{n} = \frac{\text{grad} \bar{F}}{|\text{grad} \bar{F}|}$$

скалярные условия (5) после обезразмеривания приобретут вид

$$\left[-\bar{p} + \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3} \frac{d\bar{t}}{d\lambda} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}}\right) \varepsilon\right] n_x + \left[\frac{1}{3} \frac{d\bar{t}}{d\lambda} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}}\right) \varepsilon\right] n_y = 0, \quad (17)$$

$$\left[ \frac{1}{3} \frac{d\bar{\epsilon}}{d\lambda} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \right) \epsilon \right] n_x + \left[ -\bar{p} + \left( \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \frac{d\bar{\epsilon}}{d\lambda} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right) \epsilon \right] n_y = 0. \quad (18)$$

Кинематическое условие (8) для восстановления границы  $\Gamma_F$  преобразуется:

$$\bar{v}_n = - \frac{\partial \bar{F} / \partial \bar{t}}{|\text{grad} \bar{F}|}. \quad (19)$$

На контактной границе слоя с инструментом  $\Gamma_k$  динамическое условие (9) в безразмерном виде:

$$\left| \bar{\sigma}_{xx} n_x n_y + \sigma_{xy} (n_y^2 - n_x^2) - \bar{\sigma}_{yy} n_x n_y \right| = \frac{\mu}{\sqrt{3}} \epsilon \quad (20)$$

или

$$\left[ -\bar{p} + \left( \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \frac{d\bar{\epsilon}}{d\lambda} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \right) \epsilon \right] n_x n_y + \left[ \frac{1}{3} \frac{d\bar{\epsilon}}{d\lambda} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \right) \epsilon \right] (n_y^2 - n_x^2) - \left[ -\bar{p} + \left( \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \frac{d\bar{\epsilon}}{d\lambda} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right) \epsilon \right] n_x n_y = \pm \frac{\mu}{\sqrt{3}} \epsilon. \quad (21)$$

Условие непроницаемости поверхности инструмента (10) определится как (22):

$$\bar{v}_n = - \frac{\partial \bar{G} / \partial \bar{t}}{|\text{grad} \bar{G}|}, \quad (22)$$

В итоге два дифференциальных уравнения в частных производных (14), (15) квазистатического равновесия и условие несжимаемости (16) вместе с граничными условиями (17) – (22) составляют общую краевую задачу течения пластического слоя в модели «вязкой жидкости» [4, 5].

В главном приближении, когда отсутствует малый параметр ( $\epsilon = 0$ ), исходные уравнения упрощаются с понижением порядка системы:

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} = - \frac{2\tau_s}{\sqrt{3}h} \frac{\bar{u}}{\sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2}}; \quad (25)$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} = - \frac{2\tau_s}{\sqrt{3}h} \frac{\bar{v}}{\sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2}}; \quad (26)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} - \frac{d\lambda}{d\bar{t}} = 0. \quad (25)$$

Надо заметить, что большинство исследований в указанной области проводились на основе упрощенной постановки краевой задачи в модели «идеальной жидкости», которая описывается нелинейными дифференциальными уравнениями в частных производных первого порядка [2, 6]. В эту модель входят уравнения квазистатического равновесия (26) и (27):

$$\frac{\partial p}{\partial x} = - \frac{2\tau_s}{h} \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \quad (26)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = - \frac{2\tau_s}{h} \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \quad (27)$$

а для избавления модели от статической неопределенности в систему следует добавить условие несжимаемости (3).

Логично, что граничных условий в упрощенной задаче в модели «идеальной жидкости» требуется меньше, а касательными напряжениями пренебрегают. В этом случае краевые условия имеют вид:

$$p = \sigma_s, \quad (28)$$

если деформирующий инструмент содержит пазы, куда свободно затекает металл, то

$$p = 2\sigma_s, \quad (29)$$

а в случае, если на границе пластического слоя и инструмента течение затруднено, то

$$p = p_\Gamma(\eta), \quad (30)$$

где  $\eta$  - параметр вдоль контура области.

Из двух уравнений (26) и (27) последней системы нетрудно получить одно нелинейное дифференциальное уравнение относительно контактного давления:

$$\left( \frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial p}{\partial y} \right)^2 \equiv \text{grad}^2 p = \frac{4\tau_s^2}{h^2}, \quad (31)$$

которое вместе с граничным условием (28) или (29), или (30) представляет краевую задачу относительно контактного давления.

Исследование кинематических параметров течения пластического слоя по упрощенной модели обеспечило возможность вывода эволюционного уравнения, с помощью которого устанавливают свободную границу растекающейся области [7].

**Краевая задача течения пластического слоя в новой постановке** предполагает введение функции тока  $\psi = \psi(x, y)$ , которая не противоречит условию несжимаемости (3). Преобразованные компоненты скоростей (32)

$$u = \frac{d\lambda}{dt} \left( \psi'_y + \frac{x}{2} \right); v = -\frac{d\lambda}{dt} \left( \psi'_x - \frac{y}{2} \right). \quad (32)$$

подставим в квазистатические уравнения равновесия и в результате получим систему из двух дифференциальных уравнений (33) и (34) относительно контактного давления  $p$  и функции тока  $\psi$ :

$$\frac{p'_x - \left(\frac{\sigma_s}{3}\right) \Delta \psi'_y}{p'_y + \left(\frac{\sigma_s}{3}\right) \Delta \psi'_x} = -\frac{2\tau_s}{h} \frac{\psi'_y + \frac{x}{2}}{\psi'_x - \frac{y}{2}}, \quad (33)$$

$$\left( p'_x - \left(\frac{\sigma_s}{3}\right) \Delta \psi'_y \right)^2 + \left( p'_y - \left(\frac{\sigma_s}{3}\right) \Delta \psi'_x \right)^2 = \frac{4\sigma_s^2}{3h^2}. \quad (34)$$

Далее рассмотрим в натуральных величинах задачу течения пластического слоя, имеющего в начальный момент деформирования форму прямоугольника в плане (см. рис.1). В силу симметрии пластической области относительно выбранной системы координат, будем работать с элементом слоя, расположенным в первом квадранте. На неподвижной стенке инструмента при координате  $G(x, y) \equiv y - b_0 = 0$ :

$$v = 0 \Rightarrow \psi'_x - \frac{b_0}{2} = 0, \quad (35)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = -\sqrt{3}\lambda'\mu \Rightarrow \psi''_{yy} - \psi''_{xx} = -\sqrt{3}\lambda'\mu. \quad (36)$$

Краевые условия:

$$y = 0: v = 0 \Rightarrow \psi'_x = 0; \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \Rightarrow \psi''_{yy} = 0 \quad (37)$$

$$x = 0: u = 0 \Rightarrow \psi'_y = 0; \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \Rightarrow \psi''_{xx} = 0 \quad (38)$$

На неизвестной свободной границе  $F(x, y, t) = 0$ , в начальный момент имеющей параметры  $x = l_0 (n_x = 1, n_y = 0)$ , краевые условия определяются:

$$\sigma_{xx} = 0 \Rightarrow -p + \sigma_s + \frac{2}{3}\sigma_s\psi''_{xy} = 0; \sigma_{xy} = 0, \psi''_{yy} - \psi''_{xx} = 0. \quad (39)$$

Для нивелирования влияния краевых эффектов будем искать аналитическое решение задачи на некотором удалении от оси  $x = 0$  и от свободной границы  $x = 0,5l_0$ , поскольку протяженность области течения в направлении  $x$  позволяет это сделать. Для рассматриваемого участка области течения компонента скорости  $v(x, y) = 0$ . После интегрирования уравнения несжимаемости (36) получаем:

$$u(x, y) = \lambda' [x + g(y)],$$

где функцию  $g(y)$  можно определить из других уравнений системы: (2) дает  $p = p(x)$  и тогда из (1) следует (40):

$$p'(x) = \frac{\sigma_s}{3} - \frac{2\sigma_s}{\sqrt{3}h}, \quad (40)$$

где в левой части стоит функция аргумента  $x$ , а в правой - функция  $y$  и параметр  $h(t)$ , другими словами, имеем дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. В итоге получаем систему с произвольной постоянной, представляющей собой функцию времени  $k$ :

$$g''(y) = k = const; p'(x) = \frac{\sigma_s k}{3} - \frac{2\sigma_s}{\sqrt{3}h}. \quad (41)$$

После нахождения решения дифференциального уравнения первого порядка с разделяющимися переменными (41) после подстановки граничных условий (37), (38) получим:

$$g(y) = c - \frac{\sqrt{3}\mu}{2b_0} y^2, k = -\frac{\sqrt{3}\mu}{b_0}, \quad (42)$$

$$u(x, y) = \lambda' \left[ x - \frac{\sqrt{3}\mu}{2b_0} y^2 + c \right], \quad (43)$$

где  $c$  - постоянная интегрирования.

Заметим, что первое слагаемое в правой части уравнения (43) соответствует скорости течения в модели «идеальной жидкости», в рамках которой касательное напряжение на неподвижной границе, равное 0, как и на других границах, отсутствует. Положим, что сечение  $x = x_f$  представляет собой условную свободную границу ( $x_f h = x_0 h_0$ ). Тогда из интегрального условия сохранения объема несжимаемого материала

$$-x_f(t) \frac{dh}{dt} b_0 = \int_0^{b_0} hu(x_f, y) dy$$

определяем входящую в решение произвольную постоянную  $c = \frac{\sqrt{3}}{6}\mu b_0$ , что дает возможность получить окончательную формулу для скорости течения:

$$u(x, y) = \lambda' \left[ x + \frac{\sqrt{3}}{6b_0} (\mu b_0^2 - 3y^2) \right]. \quad (44)$$

Сопоставлением найденной скорости (44) и граничного условия (30) при значении  $x = 0$  убеждаемся, что оно выполняется в интегральном виде:

$$\int_0^{b_0} u(0, y) dy = \frac{\lambda' \sqrt{3}}{6b_0} \int_0^{b_0} (b_0^2 - 3y^2) dy = 0.$$

Из второго уравнения (41) после интегрирования получим (45):

$$p(x) = p_0 - \frac{\sigma_s x}{\sqrt{3}} \left( \frac{2}{h} + \frac{\mu}{b_0} \right), \quad (45)$$

с постоянной интегрирования  $p_0$ , не зависящей от координаты  $y$ . Полагая, что на свободной границе нормальное напряжение равно нулю:

$$\sigma_{xx} = -p + \frac{4\sigma_s}{3} = 0$$

находим

$$p_0(t) = \frac{2\sigma_s x_f}{\sqrt{3}h} + \left( \frac{x_f}{\sqrt{3}b_0} + \frac{4}{3} \right) \sigma_s.$$

При достаточно большом  $x_f$  третьим слагаемым в правой части можно пренебречь, тогда окончательно постоянная интегрирования примет вид

$$p_0(t) = \frac{\sigma_s x_f}{\sqrt{3}} \left( \frac{2}{h} + \frac{\mu}{b_0} \right).$$

В результате искомое значение давления найдем в соответствии с результатом в (45):

$$p \approx \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}} \left( \frac{2}{h} + \frac{\mu}{b_0} \right) (x_f - x). \quad (46)$$

В заключении определим вид функции тока:

$$\psi'_x = \frac{y}{2}; \quad \psi'_y = \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6b_0} (\mu b_0^2 - 3y^2) \Rightarrow \psi(x, y) = \frac{\sqrt{3}}{6b_0} (\mu b_0^2 y - 3y^3) + c_1. \quad (47)$$

Таким образом, в рамках общей модели «вязкой жидкости» получено приближенное аналитическое решение. На границе  $x = 0$ , а также на свободной границе  $x = x_f(t)$  оно удовлетворяет краевым условиям в интегральной форме. Следовательно, согласно принципу Сен-Венана, решение справедливо в центральной части области течения. Характер течения в слое не является одномерным, поэтому прямые линии ( $x = const$ ) с течением временем искривляются, причем наблюдается заметное отставание продольного перемещения частиц вблизи неподвижной границы. Этот факт подтверждается результатами проведенных экспериментов. Полученные закономерности невозможно описать с помощью модели «идеальной жидкости», в которой не учитываются касательные напряжения.

**Результаты экспериментальных исследований.** Для оценки влияния осредненных по толщине слоя касательных напряжений на кинематику течения в эксперименте необходимо обеспечить условия затрудненного течения пластического слоя, что достигалось конструкцией инструмента, а именно матрица имеет противоположные неподвижные стенки (рис. 2), ограничивающие течение плоского образца, имеющего прямоугольную форму, вдоль длинных сторон. Образцы выполнены составными из двух полос толщиной 2 мм. Размеры в плане: длина  $2l_0 = 70$  мм, ширина  $2b_0 = 25$  мм, и суммарная толщина  $h_0 = 4$  мм. Материал образцов свинец марки С0 ГОСТ 3778-98 [8]. Для того, чтобы нанести координатную сетку на одну из плоскостей полосы, были изготовлены пары тонких полос с толщинами  $l_{01} = l_{02} = 2$  мм, и на поверхность одной из них с помощью инструментального микроскопа УИМ-21 наносилась координатная сетка с шагом  $\Delta l = 2 \pm 0,01$  мм (рис. 3).

Были проведены две серии экспериментов. Полоса деформировалась в оснастке так, что в процессе осаивания размер  $r_0$  оставался неизменным.

В результате проведенных экспериментов по сжатию образцов между сближающимися жесткими плоскостями инструментов установлены экспериментальные закономерности. С помощью этих закономерностей можно оценить корректность выбранной математической модели, которая может быть использована для описания течений.



Рисунок 2. Штамповая оснастка

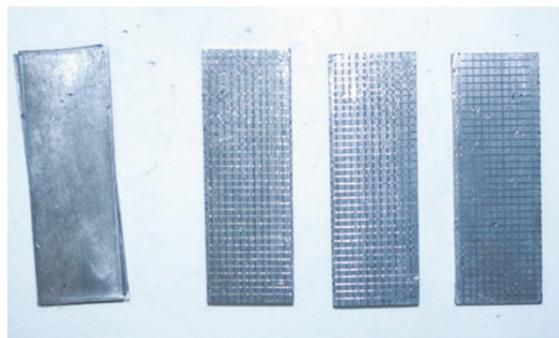
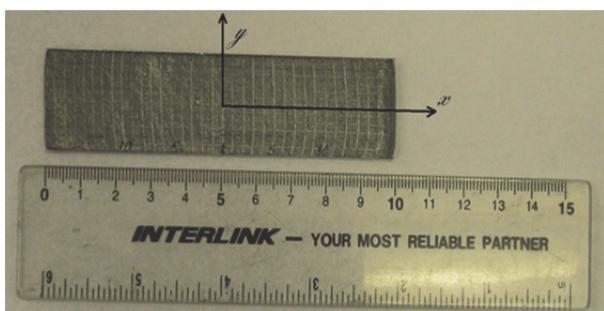
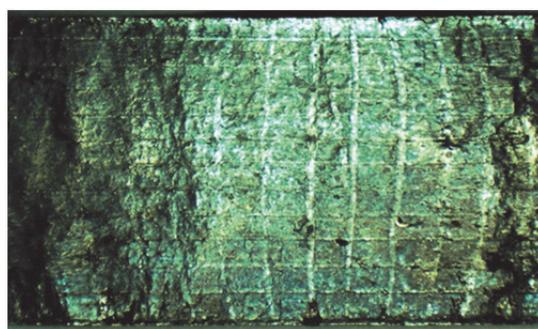


Рисунок 3. Исходные свинцовые образцы полос, на которые нанесена координатная сетка

В каждом отмеченном рисками сечении  $X = const$  отслеживали поле перемещений.



а)



б)

Рисунок 4. Координатная сетка после деформации ( $\frac{\Delta h}{h_0} = 0,3$ ):

а – система координат (линейка показывает только масштаб);

б – участок сетки с 4-х кратным увеличением

Смещения узлов координатной сетки после деформирования измеряли с точностью 0,01 мм на инструментальном микроскопе УИМ-21 с определением минимального значения перемещения  $u_b(X) = u(X; Y = \frac{b_0}{2})$  вблизи неподвижной границы ( $Y = \frac{b_0}{2}$ ) и максимального значения  $u_m(X) = u(X; Y = 0)$  в средней по ширине точке ( $Y = 0$ ) (рис. 4). Затем вычисляли абсолютную  $\Delta u = u_m(X) - u_b(X)$  и относительную  $\frac{\Delta u(X)}{u_m(X)}$  величины перемещений в характерных сечениях  $X = const$ .

Результаты измерений и значения оценок внесены в табл. 1 и табл. 2.

Таблица 1. Перемещения в сечении  $X = const$ :  $h_1 = 2,8$  мм;  $\Delta h_1 = h_0 - h_1 = 1,2$  мм;  $F = 200$  кН

$X$	$u_m(X)$	$u_\delta(X)$	$\Delta u(X) = u_m(X) - u_\delta(X)$	$\frac{\Delta u(X)}{u_m(X)}$
0	0	0		
4	2,43	1,92	0,52	0,21
8	3,93	3,29	0,64	0,16
12	6,16	4,95	1,21	0,19
16	8,10	6,68	1,42	0,17
20	9,93	8,07	1,86	0,19
24	11,90	9,54	2,36	0,20
28	14,05	10,60	2,45	0,24
32	16,05	11,51	4,64	0,28

**Таблица 2.** Перемещения в сечении  $X = const$ :  $h_2 = 2,6$  мм;  $\Delta h_2 = h_0 - h_2 = 1,2$  мм;  $F = 310$  кН

$X$	$u_m(X)$	$u_\delta(X)$	$\Delta u(X) = u_m(X) - u_\delta(X)$	$\frac{\Delta u(X)}{u_m(X)}$
0	0	0		
4	3,05	2,64	0,41	0,13
8	5,40	3,92	1,48	0,28
12	7,98	6,08	1,90	0,24
16	8,38	7,03	1,35	0,16
20	12,27	10,34	1,93	0,16
24	14,35	12,04	2,31	0,16
28	16,94	14,06	2,88	0,17
32	19,12	17,45	2,54	0,13

Анализ экспериментальных результатов подтверждает заметное отставание продольного перемещения частиц вблизи неподвижной границы: вертикальные в начальном состоянии риски ( $X = const$ ) перестают быть прямыми в процессе осадки полосы. Поэтому экспериментальные закономерности невозможно корректно описать с помощью модели «идеальной жидкости» (26), (27) и (3), в которой пренебрегают касательными напряжениями. Для рассматриваемого случая воспользуемся граничными условиями:

$$\begin{aligned} y = 0; v = 0; \\ y = b_0; v = 0; \\ x = 0; u = 0, \end{aligned} \quad (48)$$

а на свободной границе справедливо (28).

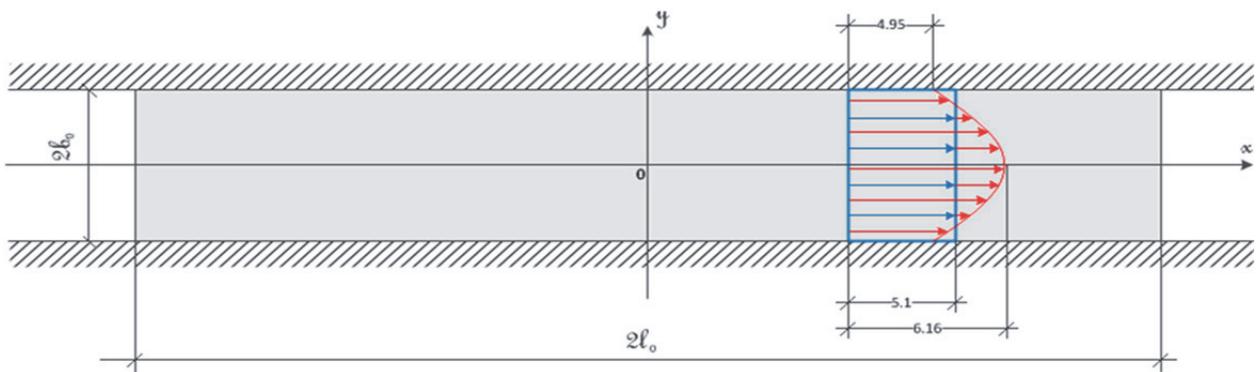
Решение системы уравнений краевой задачи имеет следующий вид:

кинематические параметры:

$$v \equiv 0; u = -\frac{1}{h} \frac{dh}{dt} x, \quad (49)$$

контактное давление:

$$p = -\tau_s \left[ \frac{2}{h} \left( x - \frac{h_0 l_0}{h} \right) - \sqrt{3} \right]. \quad (50)$$



**Рисунок 5.** Распределение перемещений по ширине срединной плоскости образца: прямолинейный фронт – модель «идеальной жидкости»; криволинейный фронт – данные эксперимента

**Заключение.** Течение образцов происходит ожидаемо – по прямым линиям тока, параллельным длинной стороне прямоугольника. Продольные перемещения вблизи неподвижных стенок заметно отстают от перемещений вдали от границы, а максимальные перемещения наблюдаются на оси симметрии образца. Этот факт говорит о наличии ненулевых касательных напряжений и скоростей угловых деформаций в рассматриваемых течениях тонкого пластического слоя. При сравнении результатов экспериментов с точным решением краевой задачи в рамках математической модели «идеальной жидкости» выявлено, что они находятся в противоречии. Корректное описание течения удастся выполнить только в рамках общей математической модели «вязкой жидкости», при условии осреднения по толщине рассматриваемого пластического слоя.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Георгиевский, Д.В. Избранные задачи механики сплошной среды/ Д.В. Георгиевский. – М.: ЛЕНАНД, 2018. – 560 с.
2. Ильюшин, А.А. Труды (1946-1966). Т. 2. Пластичность/ Составители Е.А. Ильюшина, М.Р. Короткина. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 480 с.
3. Кийко, И.А. О форме пластического слоя, сжимаемого параллельными плоскостями/ И.А. Кийко// Прикладная математика и механика. – 2011. – Т. 75. – Вып. 1. – С. 15-26.
4. Кадымов, В.А. Контактная задача о несвободном растекании пластического слоя на плоскости: эксперимент и теория/ В.А. Кадымов, Е.Н. Сосенушкин, Н.А. Белов // Сб. науч. трудов Упругость и неупругость. – М.: МГУ, 2016. – С.180–185.
5. Белов, Н.А. О краевой задаче течения пластического слоя между сближающимися жесткими плитами/ Н.А. Белов, В.А. Кадымов// Изв. РАН. МТТ. – 2011. – №1. – С. 46–58.
6. Сосенушкин, Е.Н. Механика выдавливания алюминиевого сплава при штамповке поковки с продольными рёбрами/ Е.Н. Сосенушкин, В.А. Кадымов, Е.А. Яновская, Т.В. Гуреева //Цветные металлы. – 2019. – № 3. – С.69–75.
7. Кадымов, В.А. Некоторые точные решения эволюционного уравнения растекания пластического слоя на плоскости/ В.А. Кадымов, Е.Н. Сосенушкин, Е.А. Яновская // Вестник Московского ун-та. Сер.1. Математика, механика. – 2016. – №3. – С. 61–65.
8. ГОСТ 3778-98 Свинец. Технические условия. Минск: ИПК Издательство стандартов, 2003. – 8 с.

### SIMULATION AND COMPARISON OF THE RESULTS OF THE EXACT ANALYTICAL SOLUTION OF THE BOUNDARY PROBLEM OF A FLOW IN A THIN LAYER WITH EXPERIMENTAL DATA

© 2023 E. A. Yanovskaya

Moscow State Technological University "STANKIN", Moscow, Russia

Many technological processes of metal forming include deformation of an elongated workpiece by approaching tools, the contact surfaces of which have shallow grooved cavities. A common special case are stamps or part of their contact surfaces, which are planes: sites for draft and some types of harvesting streams. The article is devoted to mathematical modeling of the flow of a thin metal layer over rough surfaces. The article presents the results of an analytical study of the boundary value problem of the viscoplastic flow of a thin layer of metal located between thin rough plates moving towards each other. Exact solutions based on the classical formulation in the framework of an "ideal fluid" and "viscoplastic fluid" are given. A real experiment is described for assessing the effect of shear stresses averaged over the layer thickness on the kinematics of the flow of a plastic layer. In order to assess the effect of shear stresses averaged over the layer thickness on the flow kinematics, and, in particular, near fixed boundaries, experiments were carried out and the results on settlement between converging rigid plates of a thin plastic sample bounded by fixed walls and initially having the shape of a rectangle in plan are analyzed. The fixed walls of the tool are located along the long sides of the rectangle. Experimental regularities have been established. Spreading of samples occurs as expected, i.e., along straight streamlines parallel to the long side of the rectangle, or along the rays of a circular sector. It was found that the longitudinal displacements near the immovable walls noticeably lag behind the displacements far from the boundary, and the maximum displacements are observed on the line of symmetry of the sample with respect to the immovable walls. This fact indicates the presence of nonzero shear stresses and (velocities) of deformations in the considered flows of a thin plastic layer. Comparison of the obtained experimental and analytical simulation results allows us to evaluate the correctness of the chosen mathematical model, which can be used to describe the flows.

*Keywords:* thin layer, constrained flow, "ideal fluid" model, experimental results.

DOI: 10.37313/1990-5378-2023-25-3-130-139

EDN: LLYQKW

## REFERENCES

1. *Georgievskij, D.V.* Izbrannye zadachi mekhaniki sploshnoj sredy/ D.V. Georgievskij. – M.: LENAND, 2018. – 560 s.
2. *Il'yushin, A.A.* Trudy (1946-1966). T. 2. Plastichnost'/ Sostaviteli E.A. Il'yushina, M.R. Korotkina. – M.: FIZMATLIT, 2004. – 480 s.
3. *Kijko, I.A.* O forme plasticheskogo sloya, szhimaemogo parallel'nymi ploskostyami/ I.A. Kijko// Prikladnaya matematika i mekhanika. – 2011. – T. 75. – Vyp. 1. – S. 15-26.
4. *Kadymov, V.A.* Kontaktnaya zadacha o nesvobodnom rastekanii plasticheskogo sloya na ploskosti: eksperiment i teoriya/ V.A. Kadymov, E.N. Sosenushkin, N.A. Belov // Sb. nauch. trudov Uprugost' i neuprugost'. – M.: MGU, 2016. – S.180–185.
5. *Belov, N.A.* O kraevoj zadache techeniya plasticheskogo sloya mezhdub sblizhayushchimisya zhestkimi plitami/ N.A. Belov, V.A. Kadymov// Izv. RAN. MTT. – 2011. – №1. – S. 46–58.
6. *Sosenushkin, E.N.* Mekhanika vydavlivaniya alyuminievogo splava pri shtampovke pokovki s prodol'nymi ryobrami/ E.N. Sosenushkin, V.A. Kadymov, E.A. Yanovskaya, T.V. Gureeva // Cvetnye metally. – 2019. – № 3. – S.69–75.
7. *Kadymov, V.A.* Nekotorye tochnye resheniya evolyucionnogo uravneniya rastekaniya plasticheskogo sloya na ploskosti/ V.A. Kadymov, E.N. Sosenushkin, E.A. Yanovskaya// Vestnik Moskovskogo un-ta. Ser.1. Matematika, mekhanika. – 2016. – №3. – S. 61–65.
8. GOST 3778-98 Svinec. Tekhnicheskie usloviya. Minsk: IPK Izdatel'stvo standartov, 2003. – 8 s.

## К ВЫБОРУ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДЛЯ КОРРЕКТНОГО РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТЕЧЕНИЯ ТОНКОГО СЛОЯ ПЛАСТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА ПРИ СЖАТИИ ОБРАЗЦА В ВИДЕ КРУГОВОГО СЕКТОРА

© 2023 Е. А. Яновская

«Московский государственный технологический университет «СТАНКИН», г. Москва, Россия

Статья поступила в редакцию 26.05.2023

К классу задач течения относительно тонкого слоя из пластического металла относится большинство практических задач прокатного и кузнечно-штамповочного производства. С той разницей, что при прокатке, вальцовке, ротационной вытяжке и других подобных процессах очаг деформации локализуется, а в процессах штамповки весь объем металла перераспределяется в полости ручья, затекая в различные его элементы, образуя необходимую форму поковки, часто форма является удлиненной и небольшой толщины. Естественно полагать, что для анализа близких по кинематике течения процессов, могут быть использованы одни и те же математические модели, но в разных постановках. В статье обосновывается выбор математической модели для теоретического решения краевой задачи о стесненном сжатии образца в виде кругового сектора по результатам эксперимента. В статье приводятся результаты аналитического исследования краевой задачи о вязкопластическом течении тонкого слоя металла, расположенного между движущимися навстречу друг другу тонкими шероховатыми плитами. Приводятся точные решения, основанные на классической постановке в рамках «идеальной жидкости» и «вязкой жидкости». Описан физический эксперимент, проведенный для оценки влияния осредненных по толщине слоя касательных напряжений на кинематику течения пластического слоя. Сравнение полученных экспериментальных и аналитических результатов моделирования позволяет оценить корректность выбранной математической модели, которая может быть использована для описания течения. При проектировании и внедрении в производство большинства высокопроизводительных технологических процессов обработки материалов давлением требуются не только численные значения технологических параметров, но прогнозирование поведения материала во время нагружения. В настоящее время доступны проблемно-ориентированные программные комплексы на основе численных методов решения, например методом конечных элементов (МКЭ), различных задач механики сплошной среды (МСС). Однако без развития фундаментальных подходов к формулированию, схематизации и аналитическому решению краевых задач, вряд ли было бы возможным создание достоверных математических моделей для современных компьютерных систем. Поэтому дальнейшее развитие теоретических подходов решения краевых задач МСС является актуальным.

*Ключевые слова:* сжатие кругового сектора, тонкий слой, краевая задача, математическая модель, эксперимент.

DOI: 10.37313/1990-5378-2023-25-3-140-146

EDN: LMBRJX

**Постановка краевой задачи течения тонкого пластического слоя.** Рассмотрим классическую постановку задачи течения тонкого слоя с использованием модели «идеальной жидкости» [1]. Дифференциальные уравнения в векторной форме имеют вид [2, 3]:

$$\text{grad}p = -\frac{2\tau_s}{h} \cdot \frac{\bar{v}}{|\bar{v}|}; \quad (1)$$

$$\text{div}\bar{v} - \frac{d\lambda}{dt} = 0. \quad (2)$$

Статически определимая система образования динамическими уравнениями Эйлера (1) [1, 4] и условием несжимаемости (2) [5].

Контактное давление на поверхности взаимодействия инструмента и пластического слоя возрастает с наибольшей скоростью, то есть:

$$\text{grad}p = \frac{\partial p}{\partial x}i + \frac{\partial p}{\partial y}j + \frac{\partial p}{\partial z}k, \text{ где } i, j, k - \text{единичный}$$

ортонормированный базис декартовой системы координат.

Определим проекции вектора скорости на единичный ортонормированный базис  $\bar{v} = \bar{v}(u, v, w)$ , где модуль вектора скорости определяется с помощью стандартной формулы  $|\bar{v}| = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$ , при этом, очевидно, что нормированный вектор скорости имеет вид

$$\frac{\bar{v}}{|\bar{v}|} = \frac{u}{|\bar{v}|}i + \frac{v}{|\bar{v}|}j + \frac{w}{|\bar{v}|}k;$$

$$\text{div}\bar{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Яновская Елена Александровна, кандидат технических наук, доцент кафедры прикладной математики.  
E-mail: elena\_yanovskaya@bc.ru

Принимая гипотезу о том, что деформированное состояние сжимаемого слоя является плоским, представим систему уравнений (1) и (2) рассматриваемой краевой задачи, новой системой (3) – (5) [4, 6]:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{2\tau_s}{h} \cdot \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}; \quad (3)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{2\tau_s}{h} \cdot \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}; \quad (4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{d\lambda}{dt} = 0. \quad (5)$$

По определению свободная поверхность пластической области имеет криволинейную границу в виде дуги окружности с известным центральным углом, для удобства перейдем к цилиндрической системе координат. Уравнения связи координат двух систем имеют вид [7]:

$$x = \rho \cos \varphi; y = \rho \sin \varphi; z = z.$$

Давление в цилиндрической системе зависит от 3-х координат  $p = p(\rho, \varphi, z)$  и его градиент определяется в соответствии с (6):

$$\text{grad} p = \frac{\partial p}{\partial \rho} \bar{e}_\rho + \frac{\partial p}{\partial \varphi} \bar{e}_\varphi + \frac{\partial p}{\partial z} \bar{e}_z, \quad (6)$$

где  $\bar{e}_\rho, \bar{e}_\varphi, \bar{e}_z$  - единичный ортонормированный базис (полярной системы координат), связанный с единичным ортонормированным базисом  $i, j, k$  стандартными соотношениями, известными из линейной алгебры:

$$\bar{e}_\rho = \frac{\partial x}{\partial \rho} i + \frac{\partial y}{\partial \rho} j + \frac{\partial z}{\partial \rho} k; \bar{e}_\varphi = \frac{\partial x}{\partial \varphi} i + \frac{\partial y}{\partial \varphi} j + \frac{\partial z}{\partial \varphi} k; \bar{e}_z = \frac{\partial x}{\partial z} i + \frac{\partial y}{\partial z} j + \frac{\partial z}{\partial z} k. \quad (7)$$

При переходе от декартовой системы координат к цилиндрической системе координат необходимо учесть стандартные преобразования с помощью матрицы Якоби [8]:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Определитель матрицы Якоби – Якобиан, в этом случае  $|J| = \rho$ . После использования такого стандартного перехода вектор скорости примет вид

$$\bar{v} = \bar{v}(u_\rho, v_\varphi, w_z).$$

В этом случае его дивергенция представляется соотношением

$$\text{div} \bar{v} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho u_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial w_z}{\partial z},$$

или

$$\text{div} \bar{v} = \frac{1}{\rho} \left( u_\rho \frac{\partial \rho}{\partial \rho} + \rho \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial w_z}{\partial z}.$$

После раскрытия скобок и очевидных преобразований имеем:

$$\text{div} \bar{v} = \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} + \frac{u_\rho}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial w_z}{\partial z}.$$

Условие несжимаемости так же приобретет новый вид:

$$\frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} + \frac{u_\rho}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial w_z}{\partial z} - \frac{d\lambda}{dt} = 0. \quad (9)$$

Векторное уравнение (6) в явном виде:

$$\frac{\partial p}{\partial \rho} \bar{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \bar{e}_\varphi + \frac{\partial p}{\partial z} \bar{e}_z = -\frac{2\tau_s}{h} \frac{u_\rho \bar{e}_\rho + v_\varphi \bar{e}_\varphi + w_z \bar{e}_z}{\sqrt{u_\rho^2 + v_\varphi^2 + w_z^2}}. \quad (10)$$

Принимая для рассматриваемого течения гипотезу плоского деформированного состояния и осуществив переход к цилиндрической системе координат, перейдем к следующей постановке [6]:

$$\frac{\partial p}{\partial \rho} = -\frac{2\tau_s}{h} \frac{u_\rho}{\sqrt{u_\rho^2 + v_\varphi^2}}; \quad (11)$$

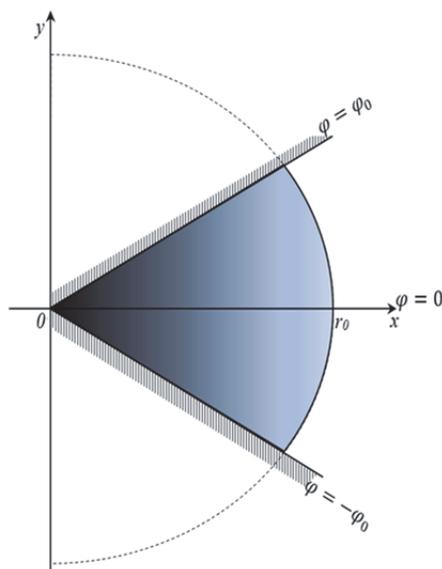
$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \varphi} = -\frac{2\tau_s}{h} \frac{v_\varphi}{\sqrt{u_\rho^2 + v_\varphi^2}}; \quad (12)$$

$$\frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} + \frac{u_\rho}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{d\lambda}{dt} = 0. \quad (13)$$

Условие (13) описывает условие постоянства объема, записанное в скоростях;

$\lambda = \lambda(t) = \ln \left( \frac{h_0}{h(t)} \right)$  – степень накопленной деформации;  $h$  – конечная толщина кругового сектора.

**Алгоритм нахождения контактных давлений и силовых параметров для пластической области.** Рассмотрим область очага деформации  $S$ . Будем считать, что рассматриваемая область имеет вид сектора, ограниченного фиксированным углом  $2\varphi$ , и фиксированным линейным размером как показано на рис. 1.



**Рис. 1.** Схема пластической области  $S$  в плоскости  $Or\varphi$  в цилиндрической системе координат

Так как рассматриваемая область  $S$  симметрична относительно прямой  $r = 0$ , то можно рассмотреть схему течения металла только в половине области, заданной соотношениями (14)

$$S = \left\{ (r, \varphi) \left| \begin{array}{l} 0 \leq \varphi \leq \varphi_0 \\ 0 \leq r \leq r_0 \end{array} \right. \right. \quad (14)$$

На границе заданной области  $S$  компонента скорости очевидно  $v_\varphi = 0$  (см. рис. 1) и при подстановке нулевого значения в (11) и (13) уравнения преобразуются к виду уравнений первого порядка с разделяющимися переменными

$$\frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{2\tau_s}{h}; \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} = 0.$$

В результате интегрирования первого уравнения, получим оценку давления на контакте:

$$p = -\frac{2\tau_s}{h} r + C_1; \quad (15)$$

где  $C_1$  – постоянная интегрирования, для нахождения которой используем граничные условия: при  $r = r_0, p = 2\tau_s$ :

$$2\tau_s = \frac{2\tau_s R r_0}{h} + C_1.$$

Из этого соотношения постоянная интегрирования  $C_1$ :

$$C_1 = 2\tau_s \frac{h+r_0}{h} \quad \text{или} \quad C_1 = 2\tau_s \left(1 + \frac{r_0}{h}\right). \quad (16)$$

Тогда контактное давление в области  $S$ .

$$p = -\frac{2\tau_s}{h} r + 2\tau_s \left(1 + \frac{r_0}{h}\right). \quad (17)$$

Если учесть, что значение компоненты скорости  $v_\varphi = 0$ , то условие несжимаемости (13) будет иметь следующий вид:

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} - \frac{d\lambda}{dt} = 0. \quad (18)$$

Истинная степень деформации в момент времени деформирования  $t$  может быть представлена в виде соотношения (19).

$$\lambda = \lambda(t) = \ln \left( \frac{h_0}{h(t)} \right) = \ln h_0 - \ln h. \quad (19)$$

Если продифференцировать по времени соотношение (19)  $\frac{d\lambda}{dt} = -\frac{1}{h} \frac{dh}{dt}$  и подставить результат в (18), то дифференциальное уравнение, выражающее условие несжимаемости будет иметь вид:

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{h} \frac{dh}{dt} = 0. \quad (20)$$

Для нахождения компоненты радиальной скорости  $u_r$  соотношение (20) необходимо проинтегрировать. Полученное уравнение является линейным дифференциальным уравнением первого порядка. Это уравнение можно проинтегрировать с помощью метода вариации произвольных постоянных:

$$\frac{1}{r} \left( r \frac{\partial u_r}{\partial r} + u_r \right) + \frac{1}{h} \frac{dh}{dt} = 0;$$

$$\frac{\partial(ru_r)}{\partial r} = -r \frac{1}{h} \frac{dh}{dt}.$$

В результате:

$$ru_r = -\frac{r^2}{2} \frac{1}{h} \frac{dh}{dt} + C_2$$

$$u_r = -\frac{r}{2} \frac{1}{h} \frac{dh}{dt} + \frac{C_2}{r}, \quad (21)$$

где  $C_2$  – постоянная интегрирования. Постоянная интегрирования может быть определена из граничных условий: при  $r = 0$  скорость  $u_r = 0$ :

$$0 = -\frac{r_0^2}{2} \frac{1}{h} \frac{dh}{dt} + C_2; C_2 = 0.$$

Подстановка  $C_2$  в выражение (20) для компоненты скорости приводит к уравнению:

$$u_r = \frac{-r}{2h} \frac{dh}{dt}. \quad (22)$$

Разделим переменным и найдем квадратуры (22):

$$\int u_r dt = \frac{-r}{2} \int \frac{dh}{h}.$$

В результате перемещение можно вычислить по формуле (23):

$$U_r = \frac{-r^2}{2} \ln h + \ln C_3. \quad (23)$$

Найдем постоянную интегрирования  $C_3$ . Для этого воспользуемся граничным условием при  $r = 0$  перемещение  $U_r = 0$ , тогда  $\ln C_3 = 0$ . При подстановке значения постоянной интегрирования в уравнение для определения радиального перемещения получим  $U_r = f(h)$ :

$$U_r = \frac{-r^2}{2} \ln h. \quad (24)$$

Сила штамповки в пластической области  $S$  в виде кругового сектора:

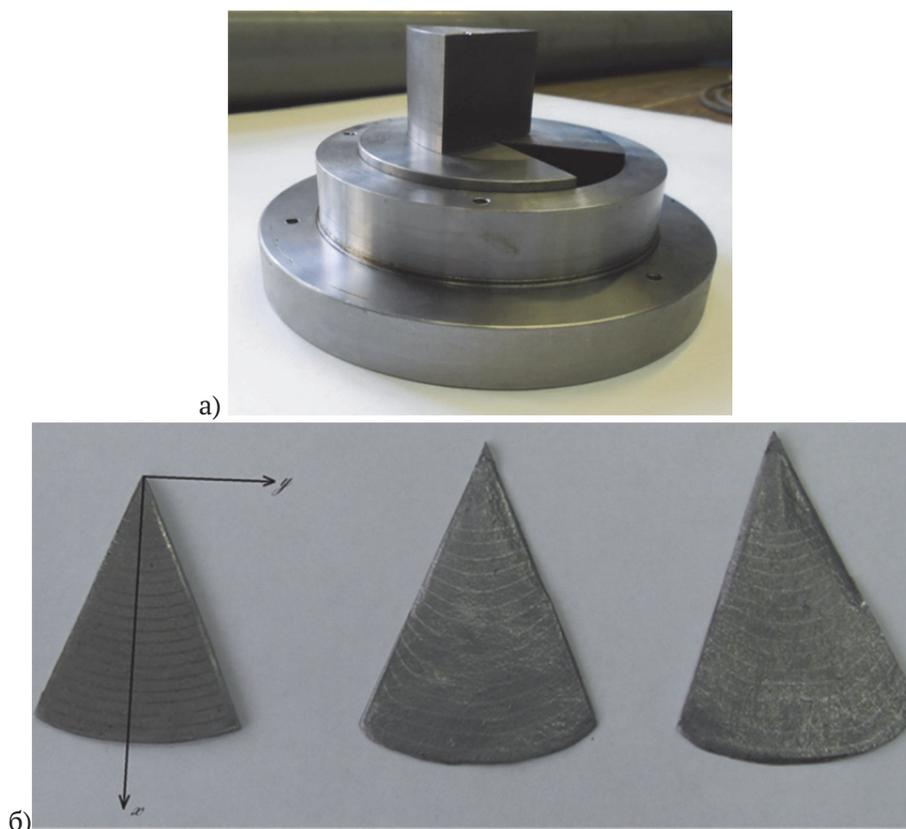
$$P = 2 \iint_S p r dr d\varphi = 2 \int_0^{r_0} r dr \int_0^{\varphi_0} \left( \frac{2\tau_s}{h} r + 2\tau_s \left( 1 + \frac{r_0}{h} \right) \right) d\varphi = \frac{4\tau_s r^2}{3h} (2r + r_0 + h). \quad (25)$$

Таким образом, в рамках общей модели «идеальной жидкости» получено аналитическое решение. На границе  $\varphi = \varphi_0$ , а также на свободной границе  $r = r_0$  это решение удовлетворяет граничным условиям в интегральной форме. Следовательно, по принципу Сен-Венана, полученное решение должно быть справедливо в каждой точке области течения.

Для оценки влияния касательных напряжений, осредненных по толщине реального слоя, на кинематику течения, и, что особенно важно, в непосредственной близости от неподвижных границ, были смоделированы и поставлены лабораторные эксперименты по сжатию между сближающимися жесткими плитами тонкого пластического образца, ограниченного неподвижными стенками и, первоначально имеющего форму кругового сектора. Анализ закономерностей, полученных экспериментально, невозможно корректно описать с помощью модели «идеальной жидкости». В реальных экспериментах невозможно пренебречь касательными напряжениями, как это делается в модели «идеальной жидкости».

Для осуществления серии запланированных экспериментов, была изготовлена сменная штамповая оснастка (рис. 2 а) и пары свинцовых пластин (рис. 2) в форме кругового сектора в плане ( $R_0 = 45$  мм;  $h_0 = 4$  мм;  $\varphi_0 = 22,5^\circ$ ).

Для проведения лабораторного эксперимента образец из двух составных пластин устанавливался в канале штамповой оснастки. Пластины осаживались так, что с течением времени центральный угол образца оставался неизменным. Пред началом эксперимента координатная сетка в виде концентрических дуг окружностей наносилась на поверхность одной из двух пластин составной заготовки. Дальнейшее исследование искажения координатной сетки проведено с помощью исследовательского комплекса на базе испытательной машины INSTRON с компьютерной регистрацией параметров рассматриваемого процесса осадки.



**Рис. 2.** Экспериментальный штамп и заготовки в форме сектора для анализа особенностей стесненной осадки:

а – детали штампа; б – образцы в исходном и деформированном состояниях с нанесенной координатной сеткой

После сжатия измерялось минимальное значение перемещения  $u_b = u$  вблизи неподвижной границы ( $\varphi = 22,5^\circ$ ) и максимальное значение  $u_m = u(R; \varphi = 0)$  в средней по ширине точке ( $y = 0$ ) (см. рис. 1). Измерение координат искаженной сетки проведено на инструментальном микроскопе УИМ-21, оснащенный комплексом компьютерной обработки измеряемых характеристик. Далее была определено абсолютное приращение  $\Delta u(R) = u_m - u_b$  и относительная величина  $\frac{\Delta u}{u_m}$  отклонения перемещения в сечении  $R = const$ . Полученные данные были занесены в табл. 1.

**Таблица 1.** Перемещения в сечении  $R = const$ ;  $h_1 = 2,32$  мм;  $\Delta h_1 = h_0 - h_1 = 1,68$  мм;  $\frac{\Delta h}{h_0} = 0,42$ ;  $F = 164$  кН

$R$	$u_m(R)$	$u_b(R)$	$\Delta u(R) = u_m - u_b$	$\frac{\Delta u}{u_m}$
16,42	0	0,08	-	-
18,53	0,27	0	0,27	-
20,59	0,91	0,15	0,76	0,83
22,35	1,53	0,25	1,28	0,83
24,52	2,58	0,51	2,07	0,80
26,63	3,30	0,65	2,65	0,80
28,50	3,89	1,18	2,70	0,70
30,65	4,71	2,41	2,30	0,49
32,28	5,76	1,93	3,83	0,66
34,53	5,50	2,19	3,31	0,60
36,29	6,50	2,76	3,74	0,57
38,41	6,82	2,73	4,09	0,60
40,41	7,71	4,18	3,53	0,45
42,36	8,41	5,08	3,33	0,39

Анализ результатов экспериментальных исследований, позволяет утверждать, что продольное перемещение частиц вдоль радиусов, выходящих из общего полюса, в процессе осадки в стесненных условиях замедляется, что связано с тесным соприкосновением с неподвижными границами матрицы и является причиной искажения координатной сетки, состоящей первоначально из дуг окружностей при значениях  $R = const$ . Из полученных результатов экспериментов следует, что рассматриваемые закономерности невозможно корректно описать с помощью модели «идеальной жидкости».

Решение, в предположении равенства нулю касательных напряжений, для которого предполагалось, что первоначально радиальные линии координатной сетки остаются дугами окружностей в процессе течения не согласуется с экспериментальными данными. Полученные экспериментальные результаты с искривлением координатной сетки вблизи неподвижных границ, более коррек-

тно можно описать с помощью модели «вязкой жидкости».

**Выводы.** Течение металла образцов при переходе в пластическое состояние происходит ожидаемо – по прямым линиям тока, в данном случае по радиусам, выходящим из общего центра-полюса кругового сектора. Радиальные перемещения вблизи неподвижных стенок отстают от перемещений в центре образца, а максимальные перемещения наблюдаются на линии  $r = r_0$  при  $\varphi=0$ , которая совпадает с осью симметрии образца. Полученный результат означает, что при течении в тонком пластическом слое возникают ненулевые касательные напряжения и, соответственно, ненулевые скорости угловых деформаций. При сравнении результатов экспериментов с точным решением краевой задачи в рамках математической модели «идеальной жидкости» выявлено, что они находятся в противоречии. Корректное описание течения удастся выполнить только в рамках общей математической модели «вязкой жидкости».

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ильюшин, А.А.* Труды (1946-1966). Т. 2. Пластичность / Составители Е.А. Ильюшина, М.Р. Короткина. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 480 с.
2. *Кийко, И.А.* Обобщение задачи Л. Прандтля об осадке полосы на случай сжимаемого материала / И.А. Кийко, В.А. Кадымов // Вестник Московского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Изд-во Моск. ун-та. (М.). – 2003. – № 4. С. 47-52.
3. *Кийко, И.А.* О форме пластического слоя, сжимаемого параллельными плоскостями / И.А. Кийко // Прикладная математика и механика. – 2011. – Т. 75. – Вып. 1.С. 15-26.
4. *Кадымов, В.А.* Контактная задача о несвободном растекании пластического слоя на плоскости: эксперимент и теория / В.А. Кадымов, Е.Н. Сосенушкин, Н.А. Белов // Сб. науч. трудов «Упругость и неупругость». – М.: МГУ, 2016. – С.180–185.
5. *Кадымов, В.А.* Некоторые точные решения эволюционного уравнения растекания пластического слоя на плоскости / В.А. Кадымов, Е.Н. Сосенушкин, Е.А. Яновская // Вестник Московского ун-та. Сер.1. Математика, механика. –2016. – № 3. – С.61–65.
6. *Сосенушкин, Е.Н.* Механика выдавливания алюминиевого сплава при штамповке поковки с продольными рёбрами / Е.Н. Сосенушкин, В.А. Кадымов, Е.А. Яновская, Т.В. Гуреева // Цветные металлы. – 2019. – № 3. – С.69–75.
7. *Умнов, А. Е.* Аналитическая геометрия и линейная алгебра: учеб. пособие / А.Е. Умнов. – М.: МФТИ, 2011. – 544 с.
8. *Корн, Г.* Справочник по математике для научных работников и инженеров/ Г. Корн, Т. Корн. М.: Наука, 1973. - 834 с.

#### ON THE CHOICE OF A MATHEMATICAL MODEL FOR THE CORRECT SOLUTION OF THE BOUNDARY VALUE PROBLEM OF THE FLOW OF A THIN LAYER OF PLASTIC MATERIAL UNDER COMPRESSION OF A SAMPLE IN THE FORM OF A CIRCULAR SECTOR

© 2023 E. A. Yanovskaya

Moscow State Technological University "STANKIN", Moscow, Russia

The class of flow problems for a relatively thin layer of plastic metal includes most of the practical problems of rolling and forging and stamping production. With the difference that during rolling, rolling, rotary drawing and other similar processes, the deformation zone is localized, and in stamping processes, the entire volume of metal is redistributed in the cavity of the stream, flowing into its various elements, forming the necessary shape of the forging, often the shape is elongated and of small thickness. It is natural to believe that the same mathematical models can be used for the analysis of processes close in kinematics, but in different formulations. The article substantiates the choice of a mathematical model for the theoretical solution of the boundary value problem of constrained compression of a sample in

the form of a circular sector based on the results of the experiment. The article presents the results of an analytical study of the boundary value problem of the viscoplastic flow of a thin layer of metal located between thin rough plates moving towards each other. Exact solutions based on the classical formulation in the framework of an "ideal fluid" and "viscoplastic fluid" are given. A real experiment is described for assessing the effect of shear stresses averaged over the layer thickness on the kinematics of the flow of a plastic layer. Comparison of the obtained experimental and analytical simulation results allows us to evaluate the correctness of the chosen mathematical model, which can be used to describe the flows. When designing and introducing into production most high-performance technological processes for processing materials by pressure, not only the numerical values of technological parameters are required, but also the prediction of the behavior of the material during loading. At present, problem-oriented software systems are available based on numerical methods for solving, for example, the finite element method (FEM), various problems of continuum mechanics (MCS). However, without the development of fundamental approaches to the formulation, schematization and analytical solution of boundary value problems, it would hardly be possible to create reliable mathematical models for modern computer systems. Therefore, the further development of theoretical approaches to solving boundary value problems of the MSS is relevant.

*Keywords:* compression of a circular sector, thin layer, boundary value problem, mathematical model, experiment.

DOI: 10.37313/1990-5378-2023-25-3-140-146

EDN: LMBRJX

## REFERENCES

1. *Ilyushin, A.A.* Trudy (1946-1966). T. 2. Plastichnost' / Sostaviteli E.A. Ilyushina, M.R. Korotkina. – M.: FIZMATLIT, 2004. – 480 s.
2. *Kijko, I.A.* Obobshchenie zadachi L. Prandtl'ya ob osadke polosy na sluchaj szhimaemogo materiala / I.A. Kijko, V.A. Kadymov // Vestnik Moskovskogo universiteta. Ser. 1: Matematika. Mekhanika. Izd-vo Mosk. un-ta. (M.). – 2003. – № 4. S. 47-52.
3. *Kijko, I.A.* O forme plasticheskogo sloya, szhimaemogo parallel'nymi ploskostyami / I.A. Kijko // Prikladnaya matematika i mekhanika. – 2011. – T. 75. – Vyp. 1. S. 15-26.
4. *Kadymov, V.A.* Kontaktnaya zadacha o nesvobodnom rastekanii plasticheskogo sloya na ploskosti: eksperiment i teoriya / V.A. Kadymov, E.N. Sosenushkin, N.A. Belov // Sb. nauch. trudov «Uprugost' i neuprugost'». – M.: MGU, 2016. – S. 180–185.
5. *Kadymov, V.A.* Nekotorye tochnye resheniya evolyucionnogo uravneniya rastekaniya plasticheskogo sloya na ploskosti / V.A. Kadymov, E.N. Sosenushkin, E.A. Yanovskaya // Vestnik Moskovskogo un-ta. Ser.1. Matematika, mekhanika. – 2016. – №3. – S.61–65.
6. *Sosenushkin, E.N.* Mekhanika vydavlivaniya alyuminievogo splava pri shtampovke pokovki s prodol'nymi ryobrami / E.N. Sosenushkin, V.A. Kadymov, E.A. Yanovskaya, T.V. Gureeva // Cvetnye metally. – 2019. – № 3. – S. 69–75.
7. *Umnov, A.E.* Analiticheskaya geometriya i linejnaya algebra: ucheb. posobie / A.E. Umnov. – M.: MFTI, 2011. – 544 s.
8. *Korn, G.* Spravochnik po matematike dlya nauchnykh rabotnikov i inzhenerov/ G. Korn, T. Korn. M.: Nauka, 1973. – 834 s.

---

*Elena Yanovskaya, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Applied Mathematics. E-mail: elena\_yanovskaya@bc.ru*

**Известия Самарского научного центра Российской академии наук**  
Учредитель: федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
Самарский федеральный исследовательский центр Российской академии наук  
Журнал зарегистрирован в Роскомнадзоре, свидетельство ПИ № ФС77-61347 от 07.04.2015  
Главный редактор: академик РАН Ф.В. Гречников  
Том 25, номер 3 (113), 28.06.2023  
Индекс: 36622. Распространяется бесплатно  
Адрес учредителя и редакции – 443001, Самарская область,  
г. Самара, Студенческий пер., 3а. Тел. 8 (846) 340-06-20  
Издание не маркируется

Сдано в набор 15.06.2023 г.

Офсетная печать

Подписано к печати 28.06.2023 г.

Усл. печ. л. 16,973

Формат бумаги А4

Тираж 200 экз.

Зак. 40