

УДК 517.9

## СИНТЕЗ РАСПРЕДЕЛЕННОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ НА ОСНОВЕ СПЕКТРАЛЬНОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОЙ ОБЛАСТИ

*В.А. Коваль<sup>1</sup>, О.Ю. Торгашова<sup>2</sup>, М.А. Соломин<sup>3</sup>*

Саратовский государственный технический университет им. Гагарина Ю.А.  
Россия, 410054, г. Саратов, ул. Политехническая, 77

E-mail: koval.va@yandex.ru, olgatorg@gmail.com, solomin75@gmail.com

***Аннотация.** Предложено решение задачи синтеза системы управления распределенным нестационарным объектом, описываемым дифференциальным уравнением с частными производными с использованием аппарата линейных матричных неравенств. Система описывается вектором спектральной характеристики, компоненты которого представляют собой амплитуды мод разложения функции состояния в ряд Фурье по пространственной координате и времени. Вектор спектральной характеристики удовлетворяет бесконечной системе линейных алгебраических уравнений, которая получена для исходного дифференциального уравнения с частными производными спектральным методом. Для спектрального представления объекта в пространственно-временной области сформулированы критерии устойчивости, стабилизируемости и детектируемости. Предложена процедура синтеза регулятора, основу которой составляет решение задачи стабилизации при полной информации и по измеряемому выходу с использованием наблюдателя. Получено выражение для определения нестационарного матричного коэффициента передачи регулятора.*

***Ключевые слова:** распределенная система, ряд Фурье, спектральный метод, линейное матричное неравенство, синтез регулятора*

### **Введение**

Распределенные системы управления в настоящее время получили широкое распространение. Особенностью таких систем является то, что для них учитывается зависимость состояния объекта не только от времени, но и от пространственных переменных. Для решения задач анализа и синтеза в распределенных системах управления разработаны различные методы, например методы теории оптимального управления, приводящие к интегральным, интегро-дифференциальным и дифференциальным уравнениям в частных производных [1–7]. Следует также выделить структурную теорию распределенных систем, позволяющую представить решение задачи в виде интеграла, связывающего вход и выход системы и содержащего функцию Грина

<sup>1</sup> Коваль Владимир Александрович, доктор технических наук, профессор.

<sup>2</sup> Торгашова Ольга Юрьевна, доктор технических наук, доцент.

<sup>3</sup> Соломин Максим Андреевич, аспирант.

*Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-38-90193.*

[8, 9]. Недостатком этих методов является то, что все они приводят к уравнениям, содержащим производные или интегралы по пространственной координате. Частотные методы, в которых выполняется пространственно-частотная декомпозиция системы на отдельные контуры [10, 11], также имеют ограничение – предположение о том, что объект управления представляет собой недиспергируемую среду.

Отличительной особенностью спектрального метода является возможность перехода от исходного описания системы дифференциальным, интегральным или интегро-дифференциальным уравнением в частных производных к бесконечной системе уравнений, записанной относительно вектора спектральной характеристики. Спектральная характеристика представляет собой вектор, составленный из амплитуд пространственных мод разложения в ряд Фурье функции, описывающей состояние объекта. В случае разложения в ряд по пространственной переменной получаем бесконечную систему дифференциальных уравнений, в правую часть которой аддитивно входят граничные условия и другие внешние воздействия. Для такого представления системы могут применяться известные методы синтеза [12]. Для нестационарного объекта предлагается осуществлять разложение в ряд не только по пространственной переменной, но и по времени [13]. В этом случае получим бесконечную систему алгебраических уравнений, в которую также аддитивно входят граничные и начальные условия. Ниже будем называть такое спектральное представление пространственно-временным.

В работе сформулированы критерии устойчивости, стабилизируемости и детектируемости объекта управления на основе представления его математической модели в спектральной форме по пространственным переменным и времени. Для доказательства критериев использована теория линейных матричных неравенств [14], которая позволяет учесть параметрическую неопределенность объекта, источником которой являются неточность представления математической модели объекта управления и ограничение размерности бесконечных матриц, используемых при проведении вычислений спектральным методом. Исследованы вопросы сходимости полученных решений. Предложена процедура синтеза и найдено матричное представление передаточного коэффициента оптимального нестационарного регулятора.

### Постановка задачи

Рассмотрим тепловой объект управления, описываемый нестационарным уравнением с частными производными, безразмерное представление которого имеет вид

$$\frac{\partial \theta(\xi, \tau)}{\partial \tau} = \alpha_0(\xi, \tau)\theta(\xi, \tau) + \alpha_1(\xi, \tau)\frac{\partial \theta(\xi, \tau)}{\partial \xi} + \alpha_2(\xi, \tau)\frac{\partial^2 \theta(\xi, \tau)}{\partial \xi^2} + f(\xi, \tau),$$

$$\xi \in (0, 1), \tau > 0, \quad (1)$$

функция состояния которого  $\theta(\xi, \tau)$  зависит от безразмерных пространственной и временной переменных  $\xi, \tau$ ,  $\alpha_0(\xi, \tau), \alpha_1(\xi, \tau), \alpha_2(\xi, \tau)$  – известные коэффициенты, в общем случае зависящие от пространственной переменной  $\xi$  и времени  $\tau$ ,  $f(\xi, \tau)$  – внешнее возмущение.

Начальные условия имеют вид

$$\theta(\xi, 0) = \theta_0(\xi), \xi \in [0, 1]. \quad (2)$$

Граничные условия определяются выражением

$$\Gamma_1[\theta(\xi, \tau)]_{\xi=0} = \theta_1(\tau), \quad \Gamma_2[\theta(\xi, \tau)]_{\xi=1} = \theta_2(\tau), \quad \tau \geq 0, \quad (3)$$

в котором запись  $\Gamma_1[\theta(\xi, \tau)]_{\xi=0}$ ,  $\Gamma_2[\theta(\xi, \tau)]_{\xi=1}$  обозначает операторы граничных условий. Будем считать, что управление объектом осуществляется с границ, то есть функции  $\theta_1(\tau)$ ,  $\theta_2(\tau)$  являются составляющими вектора управляющих воздействий:

$$u(\tau) = \text{colon}(\theta_1(\tau), \theta_2(\tau)). \quad (4)$$

Введем в рассмотрение вектор измеряемых переменных

$$y(\tau) = \text{colon}(\theta(\xi_1, \tau), \theta(\xi_2, \tau), \dots, \theta(\xi_r, \tau)), \quad (5)$$

где  $y(\tau) \in R^r$  – вектор измеряемых выходов, представляющий собой вектор значений функции  $\theta(\xi, \tau)$  в точках  $\xi_i, i = \overline{1, r}$ ,  $r$  – количество измерительных устройств.

Для объекта управления (1)–(5) требуется синтезировать регулятор в форме линейной обратной связи по выходу:

$$u(\tau) = W_{uy}(\tau)y(\tau), \quad (6)$$

где  $W_{uy}(\tau)$  – матрица передаточных коэффициентов, которая вследствие нестационарности объекта в общем случае зависит от времени  $\tau$ .

Процедуру синтеза регулятора будем строить исходя из ограничения

$$J \leq \delta^2, \quad \delta^2 \rightarrow \min, \quad J = \int_0^1 \int_0^1 q \theta^2(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad q = \text{const}, \quad q > 0. \quad (7)$$

С применением спектрального метода рассматриваемая задача может быть сведена к задаче полуопределенного программирования. Ниже получим спектральную форму представления задачи.

### Спектральное представление объекта в пространственно-временной области

Для решения задачи используется спектральное представление объекта управления. Представим функцию  $\theta(\xi, \tau)$  в виде ряда Фурье по системе ортонормированных функций  $\{P(h_1, \xi)\}, \{L_{h_2-1}(\tau)\} (h_1, h_2 = \overline{1, \infty})$  по пространственной и временной переменным:

$$\begin{aligned} \theta(\xi, \tau) &= \sum_{h_1=1}^{\infty} \sum_{h_2=1}^{\infty} \Phi_{\theta}(h_1, h_2) P(h_1, \xi) L_{h_2-1}(\tau) \delta; \\ \Phi_{\theta}(h_1, h_2) &= \int_0^1 \int_0^1 \theta(\xi, \tau) P(h_1, \xi) L_{h_2-1}(\tau) d\xi d\tau. \end{aligned} \quad (8)$$

В качестве системы разложения по переменной  $\xi$  использована система тригонометрических функций  $\{P(h_1, \xi)\} (h_1 = \overline{1, \infty})$ , ортонормированная на интервале  $\xi \in [0, 1]$ , по переменной  $\tau$  – система функций Лагерра  $\{L_{h_2-1}(\tau)\} (h_2 = \overline{1, \infty})$ , ортонормированная на интервале  $\tau \in [0, \infty)$  [15].

Согласно [12, 13] спектральное представление объекта управления (1)–(3)

в пространственно-временной области будет иметь вид

$$P_{01}\Phi_\theta + \Gamma_{01}^{00} = P_{\alpha_0}\Phi_\theta + P_{\alpha_1}(P_{10}\Phi_\theta + \Gamma_{10}^{00} + \Gamma_{10}^{01}) + \\ + P_{\alpha_2}(P_{20}\Phi_\theta + \Gamma_{20}^{10} + \Gamma_{20}^{11} + \Gamma_{20}^{00} + \Gamma_{20}^{01}) + \Phi_f, \quad (9)$$

где  $\Phi_\theta \in R^{n_1 n_2}$ ,  $n_1, n_2 = \overline{1, \infty}$  – вектор спектральной характеристики функции  $\theta(\xi, \tau)$ , взятой по временной и пространственной переменным;  $P_{01}$  – операционная матрица дифференцирования первого порядка по переменной  $\tau$ ;  $\Gamma_{01}^{00} \in R^{n_1 n_2}$ ,  $n_1, n_2 = \overline{1, \infty}$  – вектор спектрального представления начальных условий;  $P_{10}, P_{20}$  – операционные матрицы дифференцирования первого и второго порядка соответственно по переменной  $\xi$ ;  $\Gamma_{10}^{00}, \Gamma_{10}^{01} \in R^{n_1 n_2}$ ,  $n_1, n_2 = \overline{1, \infty}$  – векторы спектрального представления граничных условий первого рода на границах  $\xi = 0, \xi = 1$  соответственно (на значение  $\xi$  указывает второй символ верхнего индекса);  $\Gamma_{20}^{00}, \Gamma_{20}^{01}, \Gamma_{20}^{10}, \Gamma_{20}^{11} \in R^{n_1 n_2}$ ,  $n_1, n_2 = \overline{1, \infty}$  – векторы спектрального представления граничных условий второго рода на границах  $\xi = 0, \xi = 1$ ;  $P_{\alpha_0}, P_{\alpha_1}, P_{\alpha_2}$  – операционные матрицы сомножителей  $\alpha_0(\xi, \tau), \alpha_1(\xi, \tau), \alpha_2(\xi, \tau)$  соответственно;  $\Phi_f \in R^{n_1 n_2}$ ,  $n_1, n_2 = \overline{1, \infty}$  – вектор спектральной характеристики функции  $f(\xi, \tau)$ . Выражения для вычисления операционных матриц приводятся в [13, 16].

Выражение (9) представляет собой бесконечную систему алгебраических уравнений, составленную относительно вектора спектральной характеристики  $\Phi_\theta$  в пространственно-временной области. Это выражение можно записать в виде

$$A\Phi_\theta = \Phi_\theta + B\Phi_u + \Phi_f, \\ A = P_{01} - P_{\alpha_1}P_{10} - P_{\alpha_2}P_{20} - P_{\alpha_0}, \quad \Phi_\theta = -\Gamma_{01}^{00}, \quad (10) \\ B\Phi_u = P_{\alpha_1}(\Gamma_{10}^{00} + \Gamma_{10}^{01}) + P_{\alpha_2}(\Gamma_{20}^{10} + \Gamma_{20}^{11} + \Gamma_{20}^{00} + \Gamma_{20}^{01}).$$

В выражении  $B\Phi_u$  вектор  $\Phi_u$  может быть выделен в явном виде

$$B_1 = -(P_{\alpha_1} + P_{\alpha_2})[P(\xi) \otimes I_{n_2}]_{\xi=0}, \quad B_2 = (P_{\alpha_1} + P_{\alpha_2})[P(\xi) \otimes I_{n_2}]_{\xi=1}, \\ B_3 = P_{\alpha_2} \left[ \frac{\partial P(\xi)}{\partial \xi} \otimes I_{n_2} \right]_{\xi=0}, \quad B_4 = P_{\alpha_2} \left[ \frac{\partial P(\xi)}{\partial \xi} \otimes I_{n_2} \right]_{\xi=1}, \quad (11)$$

$$P(\xi) = colon \{P(1, \xi), P(2, \xi), \dots\}, \quad \Phi_u = colon \{\Phi_{\theta_0^0}, \Phi_{\theta_0^1}, \Phi_{\theta_1^0}, \Phi_{\theta_1^1}\}.$$

Относительную погрешность представления квадратично-интегрируемой функции  $\theta(\xi, \tau)$  рядом Фурье будем оценивать выражением

$$\Delta_{N_1 N_2} = \frac{\int_0^1 \int_0^1 \left[ \bar{\theta}(\xi, \tau) - \sum_{h_1=1}^{N_1} \sum_{h_2=1}^{N_2} \Phi_\theta(h_1, h_2) P(h_1, x) L_{h_2-1}(\tau) \right]^2 d\xi d\tau}{\int_0^1 \int_0^1 \bar{\theta}^2(\xi, \tau) d\xi d\tau}, \quad (12)$$

где  $\bar{\theta}(\xi, \tau)$  – решение, удовлетворяющее (1)–(3). Это решение может быть получено аналитически или численным методом.

Количество мод разложения  $N_1, N_2$  для выполнения вычислительных процедур будем выбирать в соответствии с критерием

$$\Delta_{N_1 N_2} < \eta, \quad (13)$$

где  $\eta$  задается исходя из требований к точности пространственно-временного спектрального представления объекта.

С учетом спектрального представления объекта эквивалентная формулировка задачи (7) будет иметь вид

$$\Phi_0^T Q \Phi_0 \leq \delta^2, \quad Q = qI, \quad q > 0, \quad \delta^2 \rightarrow \min, \quad (14)$$

где  $I$  – здесь и далее единичная матрица соответствующей размерности.

Анализ пространственно-временного спектрального представления объекта (9)–(11) и сравнение с решением, полученным аналитически или численным методом [17], позволяют определить необходимое количество спектральных мод для достижения заданной точности  $\eta$ . Далее будем полагать, что  $N_1, N_2$  найдены, и использовать усеченные матрицы для описания объекта управления в пространственно-временной области и решения задачи синтеза.

### **Критерий устойчивости спектрального представления в пространственно-временной области**

Пусть движение объекта (1)–(3) обусловлено только ненулевым начальным состоянием, функции граничных условий и внешнего воздействия равны нулю:  $\theta_0^1(\tau) = 0, \theta_1^1(\tau) = 0, (\Phi_{\theta_0^1} = 0, \Phi_{\theta_1^1} = 0), f(\xi, \tau) (\Phi_f = 0)$ . Спектральное представление (10) имеет вид

$$A \Phi_\theta = \Phi_0, \quad (15)$$

где  $\Phi_\theta \in R^{n_1 n_2}, n_1, n_2 = \overline{1, \infty}$  – неизвестный вектор спектральной характеристики, взятой по переменным  $\tau, \xi$ ;  $\Phi_0 \in R^{n_1 n_2}, n_1, n_2 = \overline{1, \infty}$  – числовой вектор начальных условий;  $A$  – квадратная числовая  $(n_1 n_2) \times (n_1 n_2)$ -матрица.

Вектор  $\Phi_\theta$  можно определить из выражения (15):

$$\Phi_\theta = A^{-1} \Phi_0. \quad (16)$$

Введем в рассмотрение эллипсоид, внутри которого должен находиться устойчивый объект управления (15), удовлетворяющий условию (14):

$$\mathcal{E} = \left\{ \Phi_\theta \in R^{n_1 n_2}; \Phi_0^T (A P A^T)^{-1} \Phi_0 \leq \delta^2 \right\}, \quad P = Q^{-1} = q^{-1} I, \quad P \succ 0, \quad (17)$$

$$\delta^2 \rightarrow \min.$$

Введем определение устойчивости системы (15).

**Определение 1.** Пространственно-временное спектральное представление (15) является устойчивым, если спектральная характеристика  $\Phi_\theta$  находится внутри эллипсоида (17), для которого величина  $\delta^2$  конечна.

Принимая во внимание связь (14) и (7), можно утверждать, что смысл определения устойчивости заключается в ограниченности энергии функции, описывающей состояние объекта управления. Таким образом, можно утверждать, что члены ряда более высокого порядка оказывают все меньшее влияние на решение, то есть  $\lim_{n_1, n_2 \rightarrow \infty} q \Phi_\theta^2(n_1, n_2) = 0$ .

Задача (17) представляет собой задачу полуопределенного программирования и может быть переписана в виде

$$\delta^2 - \Phi_0^T (APA^T)^{-1} \Phi_0 \geq 0, \delta^2 \rightarrow \min. \quad (18)$$

В соответствии с леммой Шура [14] будем иметь:

$$\begin{bmatrix} \delta^2 & \Phi_0^T \\ \Phi_0 & APA^T \end{bmatrix} \square 0, \delta^2 \rightarrow \min. \quad (19)$$

Для решения этой задачи может быть использован пакет YALMIP, разработанный для использования в системе Matlab [18].

Проверка условия определения 1 заключается в решении задачи (19) при увеличении  $n_1, n_2$  и может быть сформулирована в форме критерия.

**Утверждение 1. Критерий устойчивости системы (15).** Пространственно-временное представление объекта (15) является устойчивым, если задача полуопределенного программирования (19) имеет решение и последовательности, составленные из  $\hat{\delta}^2(n_1, n_2)$  при увеличении  $n_1, n_2$ , имеют конечный предел.

Существование предела может быть установлено с применением алгоритма.

**Алгоритм 1.**

1. Задать начальные значения

$$n_1 = n_{10}, n_2 = n_{20}$$

и конечные значения

$$n_1 = N_1, n_2 = N_2.$$

В качестве  $n_{10}, n_{20}$  можно выбрать, например,  $n_{10} = n_{20} = 1$ . Выбор конечных значений  $N_1, N_2$  определяется конкретно для каждого случая и может корректироваться в процессе вычислений.

2. Решить задачу полуопределенного программирования (19) с матрицами  $\Phi_0, A$ , размерности которых соответствуют  $n_1, n_2$ .

3. Увеличить  $n_2$  на единицу.

Если  $n_2 \leq N_2$ , то перейти к пункту 2, иначе установить  $n_2 = n_{20}$  и перейти к пункту 4.

4. Увеличить  $n_1$  на единицу.

Если  $n_1 \leq N_1$ , то перейти к пункту 2, иначе перейти к пункту 5.

5. Составить из

$\delta^2(n_1, n_2)$  ( $n_1 = \overline{n_{10}, N_1}, n_2 = \overline{n_{20}, N_2}$ ) числовые подпоследовательности, где для каждого  $n_1$  индекс  $n_2$  меняется в порядке возрастания, или наоборот, для каждого  $n_2$  индекс  $n_1$  меняется в порядке возрастания.

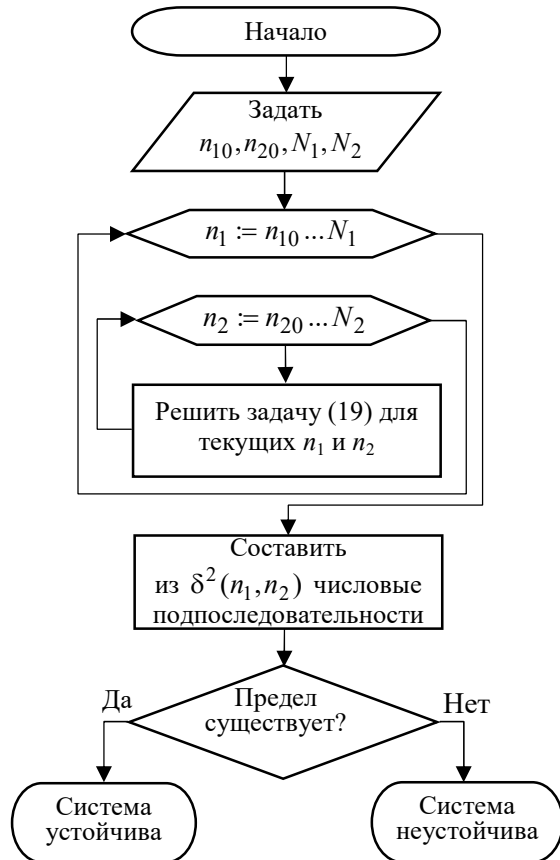


Рис. 1. Блок-схема алгоритма 1

6. По составленным подпоследовательностям проверить существование предела. Если предел существует, то пространственно-временное представление объекта (4)–(6) является устойчивым.

Блок-схема алгоритма 1 представлена на рис. 1.

**Замечание 1.** Матричное неравенство в задаче (19), решение которой позволяет судить об устойчивости, является линейным. При использовании данного неравенства в задаче построения обратной связи по вектору  $\Phi_\theta$  матрица  $A$  замкнутой системы будет содержать неизвестную матрицу регулятора и матричное неравенство окажется квадратичным относительно этой матрицы. Модифицируем неравенство из (19) таким образом, чтобы матричное неравенство являлось линейным.

В силу  $P^{-1} = Q \succ 0$  выполняется  $APA^T \succ 0$ . В этом случае можно записать

$$APA^T \succ A + A^T - Q. \quad (20)$$

Доказательство данного утверждения приводится в [15]:

$$0 \prec (A - P^{-1})P(A - P^{-1})^T \prec APA^T - A - A^T + P^{-1}, \quad (21)$$

откуда следует (20).

Замена матричного блока  $APA^T$  в выражении (19) в соответствии с (21) позволяет сформулировать задачу полуопределенного программирования следующим образом:

$$\begin{bmatrix} \delta^2 & \Phi_0^T \\ \Phi_0 & A + A^T - Q \end{bmatrix} \square 0, \quad \delta^2 \rightarrow \min. \quad (22)$$

Решением задачи (22) является оценка сверху квадрата нормы вектора амплитуд пространственно-временных мод системы  $\hat{\delta}^2$ .

### Стабилизация для системы с полной информацией

Рассмотрим задачу стабилизации линейного объекта в пространственно-временной спектральной форме представления (10) при условии, что известна полная информация о системе. Будем полагать, что управление осуществляется по принципу обратной связи, то есть

$$\Phi_u = K\Phi_\theta. \quad (23)$$

Запишем уравнение замкнутой системы:

$$(A - BK)\Phi_\theta = \Phi_0. \quad (24)$$

Для системы (24) определим эллипсоид

$$\mathcal{E} = \left\{ \Phi_\theta \in R^{n_1 n_2}; \Phi_0^T (\tilde{A}P\tilde{A}^T)^{-1} \Phi_0 \leq \delta^2 \right\}, \quad \tilde{A} = A - BK, \quad (25)$$

$$P = Q^{-1} = q^{-1}I, \quad P \succ 0, \quad \delta^2 \rightarrow \min,$$

внутри которого должна находиться устойчивая замкнутая система (24).

Задача синтеза регулятора по критерию (25) может быть сформулирована в форме задачи полуопределенного программирования:

$$\begin{bmatrix} \delta^2 & \Phi_0^T \\ \Phi_0 & A + A^T - BK - K^T B^T - Q \end{bmatrix} \square 0, \quad \delta^2 \rightarrow \min, \quad (26)$$

откуда определяется матрица регулятора  $K$  и оценка сверху квадрата нормы

вектора амплитуд пространственно-временных мод замкнутой системы  $\hat{\delta}^2$ .

**Определение 2.** Пространственно-временное спектральное представление (24) является стабилизируемым, если существует такая матрица  $K$ , для которой спектральное представление (24) является устойчивым.

**Утверждение 2. Критерий стабилизируемости системы (24).** Пространственно-временное спектральное представление системы (24) является стабилизируемым, если существует такая матрица  $K$ , для которой задача полуопределенного программирования (26) имеет решение  $K, \hat{\delta}^2$  и последовательности, составленные из  $\hat{\delta}^2(n_1, n_2)$  ( $n_1 = \overline{n_{10}, N_1}, n_2 = \overline{n_{20}, N_2}$ ), имеют конечный предел.

Проверка утверждения 2 может быть выполнена по следующему алгоритму.

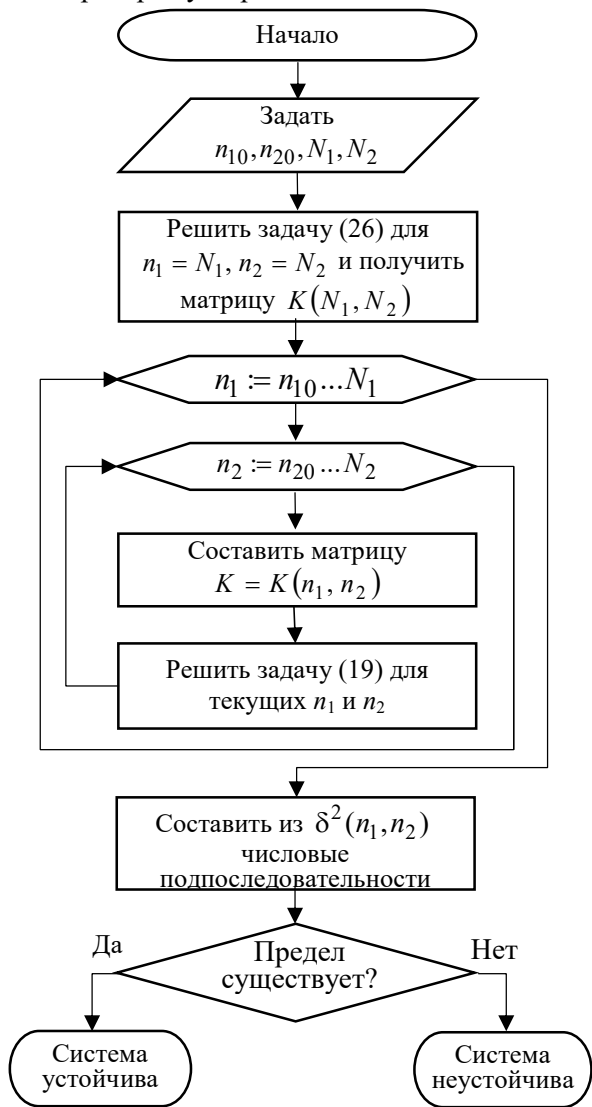


Рис. 2. Блок-схема алгоритма 2

### Алгоритм 2.

1. Задать конечные значения  $n_1 = N_1, n_2 = N_2$ . Задать начальные значения  $n_1 = n_{10}, n_2 = n_{20}$ , например  $n_{10} = n_{20} = 1$ .

2. Решить задачу (26), получить  $K(N_1, N_2), \delta^2(N_1, N_2)$ .

3. Установить начальные значения  $n_1 = n_{10}, n_2 = n_{20}$ .

4. Составить матрицу  $K$  из строк и столбцов матрицы  $K(N_1, N_2)$  с учетом новых размерностей  $n_1 \leq N_1, n_2 \leq N_2$ . Вычислить матрицу  $\tilde{A} = A - BK$ . Решить задачу (19) с вычисленной матрицей  $\tilde{A}$ . Определить  $\delta^2(n_1, n_2)$ .

5. Увеличить  $n_2$  на единицу. Если  $n_2 \leq N_2$ , то перейти к пункту 4, иначе установить  $n_2 = n_{20}$  и перейти к пункту 6.

6. Увеличить  $n_1$  на единицу. Если  $n_1 \leq N_1$ , то перейти к пункту 4, иначе перейти к пункту 7.

7. Составить из  $\delta^2(n_1, n_2)$  ( $n_1 = \overline{n_{10}, N_1}, n_2 = \overline{n_{20}, N_2}$ ) числовые

подпоследовательности, где для

каждого  $n_1$  индекс  $n_2$  меняется в порядке

возрастания, или наоборот, для



каждого  $n_2$  индекс  $n_1$  меняется в порядке возрастания.

8. Для составленных подпоследовательностей проверить существование предела. Если предел существует, то представление объекта (15), (23) в пространственно-временной области является устойчивым.

Блок-схема алгоритма 2 представлена на рис. 2.

**Замечание 2.** Для распределенной системы (1)–(3) вектор  $\Phi_\theta$  заранее неизвестен, что делает невозможным практическое применение регулятора (23). Оценить вектор  $\Phi_\theta$  можно с помощью наблюдателя.

**Замечание 3.** Для выполнения пункта 4 алгоритма 2 сокращение порядка достигается умножением на матрицу

$$T = \begin{bmatrix} I_{n_1} & 0_{(N_1-n_1) \times n_1} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} I_{n_2} & 0_{(N_2-n_2) \times n_2} \end{bmatrix}. \quad (27)$$

В этом случае матрицы системы более низкого порядка определяются следующим образом:

$$A(n_1, n_2) = T^T A(N_1, N_2) T, \quad \begin{bmatrix} B(n_1, n_2) & 0_{(n_1 n_2) \times (N_1 - n_1)} \end{bmatrix} = T^T B(N_1, N_2),$$

$$\begin{bmatrix} K(n_1, n_2) \\ [*]_{(N_1 - n_1) \times (n_1 n_2)} \end{bmatrix} = K(N_1, N_2) T, \quad (28)$$

где  $0_{(n_1 n_2) \times (N_1 - n_1)}$  – нулевой матричный блок соответствующих размерностей, который следует отбросить;  $[*]_{(N_1 - n_1) \times (n_1 n_2)}$  – ненулевой матричный блок соответствующих размерностей, который следует отбросить.

### Стабилизация по измеряемому выходу с использованием наблюдателя

Рассмотрим систему

$$A\Phi_\theta = \Phi_\theta, \quad \Phi_y = C\Phi_\theta, \quad (29)$$

где  $\Phi_\theta \in R^{n_1 n_2}$ ,  $n_1, n_2 = \overline{1, \infty}$  – вектор спектральной характеристики, взятой по переменным  $\tau, \zeta$ ;  $\Phi_0 \in R^{n_1 n_2}$ ,  $n_1, n_2 = \overline{1, \infty}$  – числовой вектор начальных условий;  $A$  – квадратная числовая  $(n_1 n_2) \times (n_1 n_2)$ -матрица,  $n_1, n_2 = \overline{1, \infty}$ ;  $\Phi_y \in R^{m_1}$ ,  $n_1 = \overline{1, \infty}$  – вектор амплитуд временных мод функций  $\theta_k(\tau) = \theta(\xi_k, \tau)$ , в точках измерения  $k = \overline{1, r}$ ,  $r$  – количество точек измерения;  $C$  – числовая  $(r n_1) \times (n_1 n_2)$ -матрица.

Будем называть наблюдателем систему

$$A\hat{\Phi}_\theta = L(\Phi_y - C\hat{\Phi}_\theta), \quad \Phi_y = C\hat{\Phi}_\theta, \quad (30)$$

в уравнение которой входит рассогласование выхода  $\Phi_y$  и его оценки  $C\hat{\Phi}_\theta$ . Матрица  $L$  неизвестна и подлежит определению.

Невязка  $e = \Phi_\theta - \hat{\Phi}_\theta$  должна удовлетворять уравнению

$$(A + LC)e = \Phi_0. \quad (31)$$

Для системы (31) требуется решить задачу выбора матрицы  $L$  при условии

$$e^T Q_e e \leq \delta^2, \quad Q_e = q_e I, \quad \delta^2 \rightarrow \min. \quad (32)$$

Для этого следует решить задачу полуопределенного программирования:

$$\begin{bmatrix} \delta^2 & \Phi_0^T \\ \Phi_0 & A + A^T + LC + C^T L^T - Q_e \end{bmatrix} \square 0, \quad \delta^2 \rightarrow \min. \quad (33)$$

Уравнение (33) можно рассматривать как систему с матрицами  $A^T, C^T$ , замкнутую обратной связью, пропорциональной вектору невязки  $e$  с матричным коэффициентом  $-L^T$ .

Сформулируем определение детектируемости системы (29).

**Определение 3.** Спектральное представление (29) в пространственно-временной области является стабилизируемым, если существует такая матрица  $L$ , для которой спектральное представление (31) является устойчивым.

**Утверждение 3. Критерий детектируемости системы (29).** Спектральное представление системы (29) в пространственно-временной области является детектируемым, если существует такая матрица  $L$ , для которой задача полуопределенного программирования (33) имеет решение  $L, \delta^2$  и последовательности, составленные из  $\hat{\delta}^2(n_1, n_2)$  ( $n_1 = \overline{n_{10}, N_1}, n_2 = \overline{n_{20}, N_2}$ ), имеют конечный предел.

Проверка утверждения 3 может быть выполнена по алгоритму 3, дуальному по отношению к алгоритму 2.

**Алгоритм 3.**

1. Задать конечные значения  $n_1 = N_1, n_2 = N_2$ . Эти значения могут быть оценены по алгоритму 1 либо быть выбраны «достаточно большими». Задать начальные значения  $n_1 = n_{10}, n_2 = n_{20}$ , например  $n_{10} = n_{20} = 1$ .

2. Решить задачу (33), получить  $L(N_1, N_2), \delta^2(N_1, N_2)$ .

3. Установить начальные значения  $n_1 = n_{10}, n_2 = n_{20}$ .

4. Составить матрицу  $L$  из строк и столбцов матрицы  $L(N_1, N_2)$  с учетом новых размерностей  $n_1, n_2$ . Вычислить матрицу  $\tilde{A} = A + LC$ . Решить задачу (19) с вычисленной матрицей  $\tilde{A}$ . Определить  $\delta^2(n_1, n_2)$ . Вернуться к пункту 3.

5. Увеличить  $n_2$  на единицу. Если  $n_2 \leq N_2$ , то перейти к пункту 4, иначе установить  $n_2 = n_{20}$  и перейти к пункту 6.

6. Увеличить  $n_1$  на единицу.

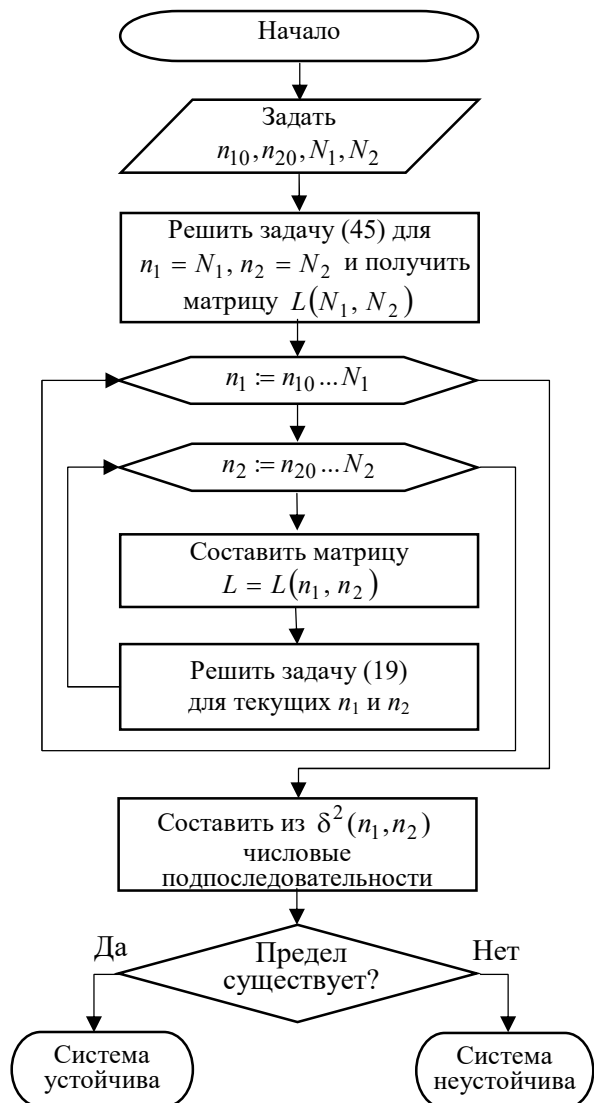


Рис. 3. Блок-схема алгоритма 3

Если  $n_1 \leq N_1$ , то перейти к пункту 4, иначе перейти к пункту 7.

7. Составить из  $\delta^2(n_1, n_2)$  ( $n_1 = \overline{n_{10}, N_1}, n_2 = \overline{n_{20}, N_2}$ ) числовые подпоследовательности, где для каждого  $n_1$  индекс  $n_2$  меняется в порядке возрастания, или наоборот, для каждого  $n_2$  индекс  $n_1$  меняется в порядке возрастания.

8. Для составленных подпоследовательностей проверить существование предела. Если предел существует, то пространственно-временное представление объекта (30) является устойчивым.

Блок-схема алгоритма 3 представлена на рис. 3.

**Замечание 4.** Для выполнения пункта 4 алгоритма 3 сокращение порядка достигается умножением на матрицу

$$T = \begin{bmatrix} I_{n_1} & 0_{(N_1-n_1) \times n_1} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} I_{n_2} & 0_{(N_2-n_2) \times n_2} \end{bmatrix}. \quad (34)$$

В этом случае матрицы системы более низкого порядка определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} A(n_1, n_2) &= T^T A(N_1, N_2) T, \\ \begin{bmatrix} L(n_1, n_2) & [*]_{(n_1 n_2) \times (N_1 - n_1)} \end{bmatrix} &= T^T L(N_1, N_2) \begin{bmatrix} C(n_1, n_2) \\ 0_{(N_1 - n_1) \times (n_1 n_2)} \end{bmatrix} = C(N_1, N_2) T, \end{aligned} \quad (35)$$

где  $0_{(N_1 - n_1) \times (n_1 n_2)}$  – нулевой матричный блок соответствующих размерностей, который следует отбросить;  $[*]_{(n_1 n_2) \times (N_1 - n_1)}$  – ненулевой матричный блок соответствующих размерностей, который следует отбросить.

### Синтез регулятора

Рассмотрим объект вида

$$A\Phi_\theta = B\Phi_u + G\Phi_w, \quad \Phi_y = C\Phi_\theta, \quad (36)$$

где  $\Phi_\theta \in R^{n_1 n_2}$ ,  $n_1, n_2 = \overline{1, \infty}$  – вектор спектральной характеристики функции  $\theta(\xi, \tau)$ , взятой по переменным  $\xi, \tau$ ;  $\Phi_u \in R^{2n_1}$ ,  $n_1 = \overline{1, \infty}$  – вектор спектральной характеристики управления (4), взятой по переменной  $\tau$ ;  $G\Phi_w = \Phi_f$  – вектор спектральной характеристики возмущения;  $\Phi_y \in R^{m_1}$ ,  $n_1 = \overline{1, \infty}$  – вектор, составленный из спектральных характеристик компонент вектора измеряемых переменных  $y(\tau)$ , взятых по переменной  $\tau$  в точках измерения  $\xi_i, i = \overline{1, r}$ ,  $r$  – количество точек измерения;  $A, B, C, G$  – числовые матрицы, матрица  $A$  имеет размерность  $(n_1 n_2) \times (n_1 n_2)$ ,  $B - (n_1 n_2) \times (2n_1)$ ,  $C - (m_1) \times (n_1 n_2)$ , размерность матрицы  $G$  определяется размерностью вектора  $\Phi_w$  (в случае возмущения, аддитивного управлению, будем иметь размерность  $(n_1 n_2) \times (2n_1)$ ). Будем полагать, что энергия возмущения ограничена:  $\|\Phi_w\|_2^2 \leq \varepsilon^2$ .

Дополним объект (36) регулятором

$$A\hat{\Phi}_\theta = B\Phi_u + L(\Phi_y - C\hat{\Phi}_\theta), \quad \Phi_u = K\hat{\Phi}_\theta, \quad (37)$$

представляющим совокупность обратной связи по состоянию и наблюдающего устройства.

Составим уравнение замкнутой системы относительно вектора  $\bar{\Phi} = colon\{\Phi_\theta, e\}$ , где  $e$  – невязка, удовлетворяющая выражению (31):

$$\begin{bmatrix} A-BK & BK \\ 0 & A+LC \end{bmatrix} \bar{\Phi} = \begin{bmatrix} G \\ G \end{bmatrix} \Phi_w, \quad (38)$$

или

$$\bar{A} \bar{\Phi} = \bar{G} \Phi_w. \quad (39)$$

Задача (22), сформулированная для системы (39), будет иметь вид:

$$\begin{bmatrix} \delta^2 & \Phi_w^T \bar{G}^T \\ \bar{G} \Phi_w & \bar{A} + \bar{A}^T - \bar{Q} \end{bmatrix} \square 0, \quad \delta^2 \rightarrow \min, \quad \bar{Q} = \text{diag} \{Q, Q_e\}. \quad (40)$$

С использованием леммы Шура задача (40) может быть переписана в более удобном виде. Для этого представим ее в следующей эквивалентной записи:

$$(\bar{A} + \bar{A}^T - \bar{Q}) - \delta^{-2} \bar{G} \Phi_w \Phi_w^T \bar{G}^T \square 0, \quad \delta^2 \rightarrow \min. \quad (41)$$

В силу того, что справедливо неравенство  $\Phi_w \Phi_w^T \square \|\Phi_w\|^2 I_{2n_1}$ , перепишем (41) в виде

$$(\bar{A} + \bar{A}^T - \bar{Q}) - \varepsilon^2 \delta^{-2} \bar{G} \bar{G}^T \square 0, \quad \delta^2 \rightarrow \min, \quad (42)$$

или в силу леммы Шура

$$\begin{bmatrix} \frac{\delta^2}{\varepsilon^2} I_{2n_1} & \bar{G}^T \\ \bar{G} & \bar{A} + \bar{A}^T - \bar{Q} \end{bmatrix} \square 0, \quad \delta^2 \rightarrow \min. \quad (43)$$

Отметим, что размерность блока  $\frac{\delta^2}{\varepsilon^2} I_{2n_1}$  соответствует размерности вектора  $\Phi_w$ . Если выбрать возмущение  $\|\Phi_w\|^2 \leq 1$ , то задача (43) принимает вид

$$\begin{bmatrix} \delta^2 I_{2n_1} & \bar{G}^T \\ \bar{G} & \bar{A} + \bar{A}^T - \bar{Q} \end{bmatrix} \square 0, \quad \delta^2 \rightarrow \min, \quad (44)$$

или с учетом структуры матриц расширенной системы (38)

$$\begin{bmatrix} \delta^2 I_{2n_1} & & G^T & & G^T \\ G & A + A^T - BK - K^T B^T - Q & & & BK \\ G & & K^T B^T & & A + A^T + LC + C^T L^T - Q_e \end{bmatrix} \square 0, \quad \delta^2 \rightarrow \min. \quad (45)$$

**Теорема 1.** Пусть  $K, L, \delta^2$  – решение задачи (45), и пусть последовательности, составленные из  $\delta^2(n_1, n_2)$  ( $n_1 = \overline{n_{10}, N_1}, n_2 = \overline{n_{20}, N_2}$ ), имеют предел. Тогда регулятор (37) стабилизирует объект (36).

**Алгоритм 4** исследования устойчивости замкнутой системы на основе пространственно-временного спектрального представления (36), (37) (рис. 4).

1. Задать конечные значения  $n_1 = N_1, n_2 = N_2$ . Задать начальные значения  $n_1 = n_{10}, n_2 = n_{20}$ , например  $n_{10} = n_{20} = 1$ .
2. Решить задачу (45), получить  $K(N_1, N_2), L(N_1, N_2), \delta^2(N_1, N_2)$ .
3. Установить начальные значения  $n_1 = n_{10}, n_2 = n_{20}$ .
4. Составить матрицы  $K, L$  из строк и столбцов матриц  $K(N_1, N_2), L(N_1, N_2)$  с учетом новых размерностей  $n_1 \leq N_1, n_2 \leq N_2$ .

Вычислить матрицу  $\bar{A} = \begin{bmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A + LC \end{bmatrix}$ . Решить задачу (22) с вычисленной матрицей  $\bar{A}$ . Определить  $\delta^2(n_1, n_2)$ .

5. Увеличить  $n_2$  на единицу. Если  $n_2 \leq N_2$ , то перейти к пункту 4, иначе установить  $n_2 = n_{20}$  и перейти к пункту 6.

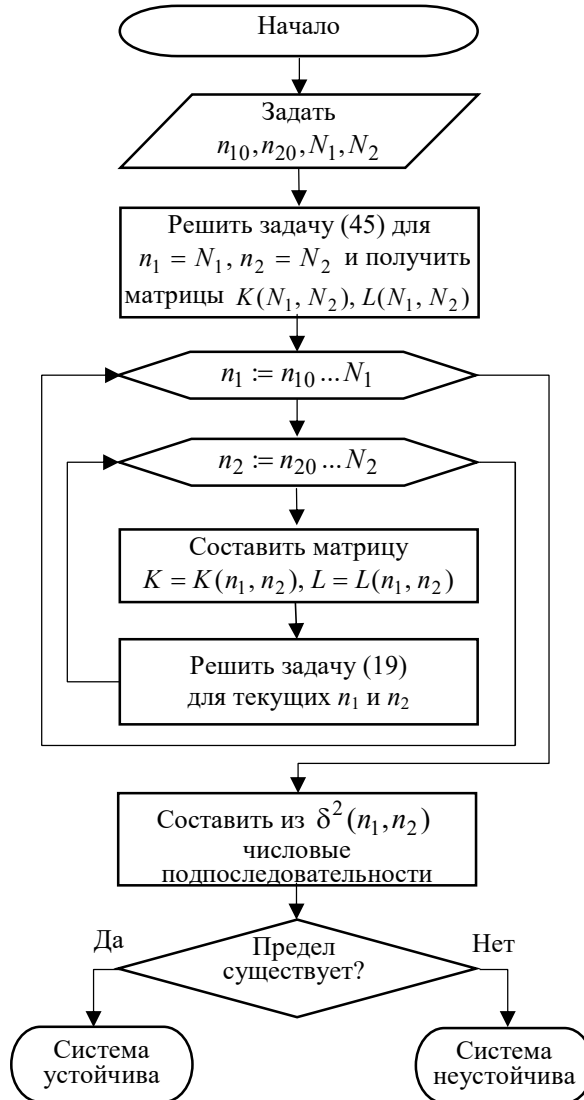


Рис. 4. Блок-схема алгоритма 4

6. Увеличить  $n_1$  на единицу. Если  $n_1 \leq N_1$ , то перейти к пункту 4, иначе перейти к пункту 7.

7. Составить из  $\delta^2(n_1, n_2)$  ( $n_1 = \overline{n_{10}, N_1}, n_2 = \overline{n_{20}, N_2}$ ) числовые подпоследовательности, где для каждого  $n_1$  индекс  $n_2$  меняется в порядке возрастания, или наоборот, для каждого  $n_2$  индекс  $n_1$  меняется в порядке возрастания.

8. Для составленных подпоследовательностей проверить существование

предела. Если предел существует, то пространственно-временное представление системы (36), (37) является устойчивым.

**Замечание 5.** Конечные значения  $N_1, N_2$  могут быть оценены по алгоритму 1 либо быть выбраны «достаточно большими». Обычно точность решения в 3–5 % обеспечивается при учете 7–9 членов ряда по каждой из координат.

**Замечание 6.** Решением задачи синтеза является оценка сверху величины  $\delta^2$ . Согласно (13), величина  $\delta^2$  ограничивает  $\|\Phi_\theta\|^2$ . Пусть решение задачи (45) существует и найденный регулятор обеспечивает устойчивость замкнутой системы. О качестве найденного решения позволяет судить анализ переходных процессов в системе с найденным законом управления. Если качество переходных процессов неудовлетворительное, то следует задать величину  $\delta^2$  больше, чем получено при решении задачи (45), и найти  $K, L$  из решения линейного матричного неравенства, входящего в (45), для выбранного  $\delta^2$ .

**Замечание 7.** Для выполнения пункта 4 алгоритма 4 сокращение порядка достигается умножением на матрицу

$$T = \begin{bmatrix} I_{n_1} & 0_{(N_1-n_1) \times n_1} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} I_{n_2} & 0_{(N_2-n_2) \times n_2} \end{bmatrix}. \quad (46)$$

В этом случае матрицы системы более низкого порядка определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} A(n_1, n_2) &= T^T A(N_1, N_2) T, \\ \begin{bmatrix} B(n_1, n_2) & 0_{(n_1 n_2) \times (N_1 - n_1)} \end{bmatrix} &= T^T B(N_1, N_2), \\ \begin{bmatrix} L(n_1, n_2) & [*]_{(n_1 n_2) \times (N_1 - n_1)} \end{bmatrix} &= T^T L(N_1, N_2), \begin{bmatrix} C(n_1, n_2) \\ 0_{(N_1 - n_1) \times (n_1 n_2)} \end{bmatrix} = C(N_1, N_2) T, \\ \begin{bmatrix} K(n_1, n_2) \\ [*]_{(N_1 - n_1) \times (n_1 n_2)} \end{bmatrix} &= K(N_1, N_2) T, \end{aligned} \quad (47)$$

где  $0_{(n_1 n_2) \times (N_1 - n_1)}$ ,  $0_{(N_1 - n_1) \times (n_1 n_2)}$  – нулевые матричные блоки соответствующих размерностей, которые следует отбросить;  $[*]_{(n_1 n_2) \times (N_1 - n_1)}$ ,  $[*]_{(N_1 - n_1) \times (n_1 n_2)}$  – ненулевые матричные блоки соответствующих размерностей, которые следует отбросить.

**Замечание 8.** Построение данного регулятора выполнено в спектральной области представления. Для применения данного регулятора следует записать его в форме коэффициента передачи от измеряемого выхода к управляющему входу.

#### **Определение матрицы передаточных коэффициентов регулятора**

Получим матрицу передаточных коэффициентов регулятора, выразив из первого уравнения (37)  $\hat{\Phi}_\theta$  и подставив во второе:

$$\Phi_u = K(A - BK + LC)^{-1} L \Phi_y. \quad (48)$$

Осуществим переход от векторов спектральных характеристик  $\Phi_u, \Phi_y$ , взятых по переменной  $\tau$ , к исходным переменным  $u(\tau), y(\tau)$ . Вектор спектральных характеристик управляющих входов составлен из амплитуд спектральных мод функций граничных условий. Вектор спектральных

характеристик измеряемых выходов  $\Phi_y$  составлен из амплитуд временных мод функций  $\theta_k(\tau) = \theta(\xi_k, \tau)$ , в точках измерения  $k = \overline{1, r}$ ,  $r$  – количество точек измерения, то есть  $\Phi_y = colon \{ \Phi_{y_1}, \Phi_{y_2}, \dots, \Phi_{y_r} \}$ .

Обобщим вектор  $u(\tau)$  на случай  $m$  управляющих входов:  $\Phi_u = colon \{ \Phi_{u_1}, \Phi_{u_2}, \dots, \Phi_{u_m} \}$ .

Для управляющих входов и измеряемых выходов справедливы следующие выражения:

$$\begin{aligned} u_i(\tau) &= \sum_{h_2=1}^{\infty} \Phi_{u_i}(h_2) L_{h_2-1}(\tau), \quad i = \overline{1, m}, \\ y_k(\tau) &= \sum_{h_2=1}^{\infty} \Phi_{y_k}(h_2) L_{h_2-1}(\tau), \quad k = \overline{1, r}. \end{aligned} \quad (49)$$

Векторно-матричная запись (49) имеет вид

$$u = M_u(\tau) \Phi_u, \quad y = M_y(\tau) \Phi_y \quad (50)$$

или

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} u_1 \\ \dots \\ u_m \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} L_0(\tau) & L_1(\tau) & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & L_0(\tau) & L_1(\tau) & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_{u_1}(1) \\ \Phi_{u_1}(2) \\ \dots \\ \Phi_{u_m}(1) \\ \Phi_{u_m}(2) \\ \dots \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_r \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} L_0(\tau) & L_1(\tau) & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & L_0(\tau) & L_1(\tau) & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_{y_1}(1) \\ \Phi_{y_1}(1) \\ \dots \\ \Phi_{y_r}(1) \\ \Phi_{y_r}(1) \\ \dots \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (51)$$

откуда можно получить выражения для матриц  $M_u(\tau)$ ,  $M_y(\tau)$ :

$$M_u(\tau) = I_m \otimes \begin{bmatrix} L_0(\tau) \\ L_1(\tau) \\ \dots \end{bmatrix}, \quad M_y(\tau) = I_r \otimes \begin{bmatrix} L_0(\tau) \\ L_1(\tau) \\ \dots \end{bmatrix}. \quad (52)$$

Подставим (52) в (48):

$$u(\tau) = M_u(\tau) K (A - BK + LC)^{-1} L M_y^+(\tau) y(\tau), \quad (53)$$

где  $M_y^+(\tau) = M_y^T(\tau) [M_y(\tau) M_y^T(\tau)]^{-1}$  – псевдообратная матрица.

Нетрудно показать, что  $M_y^+(\tau)$  определяется выражением

$$M_y^+(\tau) = \frac{1}{\sum_{h_2=1}^{\infty} L_{h_2-1}^2(\tau)} \left( I_r \otimes \begin{bmatrix} L_0(\tau) \\ L_1(\tau) \\ \dots \end{bmatrix} \right). \quad (54)$$

Из (53) следует, что матрица коэффициентов передачи регулятора определяется выражением

$$W_{uy}(\tau) = M_u(\tau)K(A - BK + LC)^{-1}LM_y^+(\tau). \quad (55)$$

Анализ выражения (55) показывает, что в случае нестационарного объекта матричный коэффициент передачи регулятора, построенного по принципу обратной связи, зависит от времени.

**Пример.** Рассмотрим задачу управления объектом, который описывается уравнением теплопроводности в безразмерном виде с переменным коэффициентом  $k(\tau)$  [13]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta(\xi, \tau)}{\partial \tau} &= 2.5714 \frac{\partial^2 \theta(\xi, \tau)}{\partial \xi^2} - k(\tau)\theta(\xi, \tau), \quad \xi \in (0, 1), \tau \in (0, \infty), \\ k(\tau) &= 10.5 \begin{cases} 2\tau, & \tau \in [0, 0.4), \\ 1.33(1-\tau), & \tau \in [0.4, 0.6), \\ 0.53, & \tau \in [0.6, \infty), \end{cases} = \\ &= 10.5 \{2\tau(1(\tau) - 1(\tau - 0.4)) + 1.33(1-\tau)(1(\tau - 0.4) - 1(\tau - 0.6)) + 0.53 \cdot 1(\tau - 0.6)\}. \end{aligned} \quad (56)$$

В качестве управления будем использовать значение переменной  $\theta$  на левой границе:

$$\theta(\xi, \tau)|_{\xi=0} = \theta_1(\tau). \quad (57)$$

Начальные условия нулевые:

$$\theta(\xi, \tau)|_{\tau=0} = 0, \quad \xi \in [0, 1]. \quad (58)$$

На левой границе действует возмущение, аддитивное с управлением:

$$w(\tau) = e^{-0.7\tau} \cdot 1(\tau), \quad (59)$$

которое удовлетворяет условию ограниченности нормы  $\|\Phi_w\|_2^2$ .

Измерение осуществляется в двух точках:  $\xi_1 = 0.05$ ,  $\xi_2 = 0.95$ .

Требуется синтезировать регулятор для решения задачи стабилизации, чтобы ошибка регулирования в каждой точке пространства не превышала 5 % от номинального значения температуры, что в относительных единицах составляет 0,05.

Спектральное представление объекта имеет вид (36). Для получения спектрального представления использовались система функций Лагерра и система тригонометрических функций

$$P(\xi) = \{1, \sqrt{2} \cos(\pi\xi), \sqrt{2} \cos(2\pi\xi), \sqrt{2} \cos(3\pi\xi), \dots\}. \quad (60)$$

Анализ спектрального представления объекта (56)–(58) при граничных условиях второго рода выполнен в [13]. Полученное решение сравнивалось



с решением данной задачи, представленным в [19]. Была вычислена относительная погрешность по выражению (12). В качестве  $\bar{\theta}(\xi, \tau)$  использовалось решение в форме ряда, составленного из 9 членов, представленное в [19]. Относительная погрешность  $\Delta_{N_1 N_2}$ , вычисленная для  $N_1 = N_2 = 7$ , составила  $\Delta_{N_1 N_2} = 0.001$ .

Выполним синтез регулятора в соответствии с теоремой 1. Решим задачу полуопределенного программирования (45). При решении задачи будем считать, что весовые матрицы  $Q = Q_e = I$ . Решим задачу синтеза для случая  $N_1 = N_2 = 15$  и исследуем устойчивость решения. Результаты исследования устойчивости для  $n_1 = 5, 15$  функций разложения по переменной  $\tau$  отображены в таблице. Проведенные вычисления показывают, что выбранные подпоследовательности имеют конечный предел.

### Исследование существования предела подпоследовательностей $\delta^2(n_1, 5), \delta^2(n_1, 15)$

$n_1$	$n_2$	$\delta^2(n_1, n_2) \cdot 10^{-4}$	$\frac{\delta^2(n_1, n_2)}{\delta^2(n_1 - 1, n_2 - 1)}$	$n_1$	$n_2$	$\delta^2(n_1, n_2) \cdot 10^{-4}$	$\frac{\delta^2(n_1, n_2)}{\delta^2(n_1 - 1, n_2 - 1)}$
1	5	0,5082	0	1	15	0,7459	0
2	5	2,5843	5,0849	2	15	0,2105	0,2822
3	5	3,9043	1,5107	3	15	0,1892	0,8988
4	5	2,2341	0,5722	4	15	0,1920	1,0150
5	5	2,4205	1,0834	5	15	0,2366	1,2319
6	5	2,2300	0,9213	6	15	0,2664	1,1260
7	5	2,3348	1,0470	7	15	0,3225	1,2107
8	5	2,3267	0,9965	8	15	0,3552	1,1016
9	5	2,3864	1,0257	9	15	0,3969	1,1173
10	5	2,4060	1,0082	10	15	0,4189	1,0554
11	5	2,4202	1,0059	11	15	0,4333	1,0345
12	5	2,4244	1,0017	12	15	0,4404	1,0164
13	5	2,4018	0,9907	13	15	0,4301	0,9764
14	5	2,3841	0,9926	14	15	0,4268	0,9923
15	5	2,3420	0,9823	15	15	0,4040	0,9466

Исходя из анализа подпоследовательностей выберем  $N_1 = 13, N_2 = 5$ . Значение нормы вектора пространственно-временной спектральной характеристики  $\Phi_0$  замкнутой системы (38) при заданном внешнем возмущении (59) составляет  $\|\Phi_0\| = 0,0036$ . График функции  $\theta(\xi, \tau)$ , соответствующий вектору  $\Phi_0$ , может быть получен по выражению

$$\theta(\xi, \tau) = \sum_{h_1=1}^{N_1} \sum_{h_2=1}^{N_2} \Phi_0(h_1, h_2) P(h_1, \xi) L_{h_2-1}(\tau). \quad (61)$$

Этот график соответствует идеальному случаю, когда динамика объекта неявно учитывается в представлении функции рядом Фурье. Для моделирования

динамического поведения объекта дифференциальным уравнением получим матрицу передаточных коэффициентов регулятора (55):

$$W_{wy}(\tau) = \frac{1}{\sum_{h_2=1}^{N_2} L_{h_2-1}^2(\tau)} [W_{wy11}(\tau) \quad W_{wy12}(\tau)], \quad (62)$$

где

$$\begin{aligned} W_{wy11}(\tau) &= L_0(\tau)\{109,014L_0(\tau)+10,903L_1(\tau)+1,721L_2(\tau)+0,920L_3(\tau)+0,155L_4(\tau)\}+ \\ &+ L_1(\tau)\{13,051L_0(\tau)+48,055L_1(\tau)+0,368L_2(\tau)+2,535L_3(\tau)+1,003L_4(\tau)\}+ \\ &+ L_2(\tau)\{2,815L_0(\tau)+1,256L_1(\tau)+45,536L_2(\tau)-0,030L_3(\tau)-0,005L_4(\tau)\}+ \\ &+ L_3(\tau)\{-16,903L_0(\tau)-4,367L_1(\tau)-1,933L_2(\tau)+35,416L_3(\tau)-7,522L_4(\tau)\}+ \\ &+ L_4(\tau)\{-4,832L_0(\tau)-0,982L_1(\tau)-0,891L_2(\tau)-0,975L_3(\tau)+44,316L_4(\tau)\}, \\ W_{wy12}(\tau) &= L_0(\tau)\{-0,832L_0(\tau)-0,195L_1(\tau)-0,032L_2(\tau)-0,012L_3(\tau)-0,002L_4(\tau)\}+ \\ &+ L_1(\tau)\{-0,219L_0(\tau)+0,233L_1(\tau)-0,007L_2(\tau)-0,025L_3(\tau)-0,011L_4(\tau)\}+ \\ &+ L_2(\tau)\{-0,044L_0(\tau)-0,004L_1(\tau)+0,315L_2(\tau)-0,002L_3(\tau)-0,002L_4(\tau)\}+ \\ &+ L_3(\tau)\{0,034L_0(\tau)+0,016L_1(\tau)-0,011L_2(\tau)+0,352L_3(\tau)+0,019L_4(\tau)\}+ \\ &+ L_4(\tau)\{0,008L_0(\tau)+0,008L_1(\tau)+0,008L_2(\tau)+0,008L_3(\tau)+0,323L_4(\tau)\}, \\ L_{h_2-1}(\tau) & (h_2 = \overline{1,5}) - \text{первые 5 функций Лагерра.} \end{aligned}$$

Моделирование системы (56), (62) выполнено в Matlab. Динамика объекта учтена при моделировании уравнения (56) системой дифференциальных уравнений – спектральным представлением по пространственной переменной  $\xi$ , полученным с учетом 15 членов разложения в ряд по системе функций (60).

Графики переходных процессов представлены на рис. 5.

Для функции  $\theta(\xi, \tau)$  системы (56), (61) по выражению (8) был найден вектор  $\Phi_\theta$  и получено значение нормы, которое составило  $\|\Phi_\theta\| = 0,0068$ . Сравнение полученных результатов, представленных на рис. 5а и 5б, и значений  $\|\Phi_\theta\|$  выявило увеличение минимизируемого показателя  $\|\Phi_\theta\|$ , что объясняется выделением регулятора (61) и моделированием системы с учетом динамики объекта.

### Заключение

1. Для линейного пространственно распределенного нестационарного динамического объекта управления получено представление в спектральной области – бесконечная система алгебраических уравнений, составленная относительно неизвестных амплитуд пространственно-временных мод разложения в ряд Фурье функции, описывающей состояние объекта. В данное представление аддитивно входят векторы амплитуд временных мод управляющих и возмущающих воздействий.

2. Предложено описание объекта управления как эллипсоида. В случае нулевых граничных и ненулевых начальных условий эллипсоид имеет вид  $\mathcal{E} = \{\Phi \in R^{n_1 n_2} : \Phi_0^T (AA^T)^{-1} \Phi_0 \leq \delta^2\}$ , где  $\Phi_0$  – вектор начальных условий,  $n_1, n_2 = \overline{1, \infty}$  – количество функций разложения по временной и пространственной переменным соответственно,  $A$  – матрица пространственно-

временного спектрального представления объекта,  $\delta^2$  – величина, ограничивающая квадрат нормы вектора пространственно-временной спектральной характеристики  $\|\Phi\|_2^2$ .

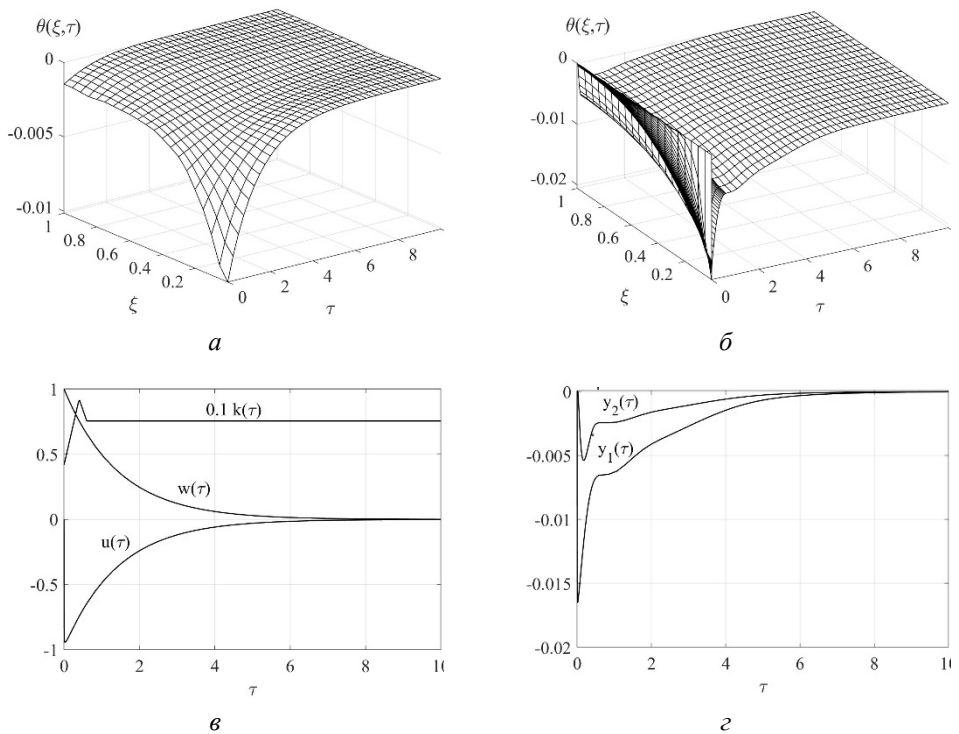


Рис. 5. Результаты анализа: *a* – функция  $\theta(\xi, \tau)$ , полученная по выражению (61); *б* – функция  $\theta(\xi, \tau)$ , полученная при моделировании динамической системы (56), (62); *в* – управление  $u(\tau)$ , возмущение  $w(\tau)$ , коэффициент  $k(\tau)$ ; *з* – переходные процессы по переменным  $y_1(\tau)$ ,  $y_2(\tau)$

Данное представление позволяет сформулировать определение устойчивости и использовать его для получения критерия устойчивости.

3. На основе представления объекта эллипсоидом предложено определение устойчивости, позволяющее использовать аппарат линейных матричных неравенств. В соответствии с данным определением формулируется критерий устойчивости, основу которого составляет решение задачи полуопределенного программирования с ограничением в форме линейного матричного неравенства. Данная формулировка открывает возможность получения условия устойчивости в робастной постановке.

4. Сформулирован критерий устойчивости, основанный на решении задачи полуопределенного программирования при возрастании количества пространственно-временных мод разложения функции в ряд Фурье и исследовании существования предела последовательности величин  $\delta^2$ , ограничивающих квадрат нормы вектора пространственно-временной спектральной характеристики  $\|\Phi\|_2^2$ . Формулировка критерия устойчивости

в форме задачи полуопределенного программирования позволяет использовать данный критерий для решения задач анализа и синтеза в робастной постановке.

5. Для пространственно-временного спектрального представления линейного нестационарного распределенного объекта предложены критерии стабилизируемости и детектируемости.

6. Для линейного нестационарного распределенного объекта предложена процедура синтеза регулятора по выходу с наблюдателем. Получено выражение для определения нестационарного матричного коэффициента передачи регулятора, построенного по принципу обратной связи.

7. Выполнена проверка полученных теоретических результатов: решен численный пример. Исследована устойчивость объекта с использованием пространственно-временного спектрального представления. В соответствии с приведенным алгоритмом выбрано количество временных и пространственных мод разложения в ряд Фурье для функции, описывающей состояние исходного распределенного объекта. Решена задача синтеза регулятора и исследована устойчивость решения. Получен нестационарный матричный передаточный коэффициент регулятора. Выполнен анализ динамической системы с найденным регулятором.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Дегтярев Г.Л., Сиразетдинов Т.К.* Теоретические основы автоматизированного управления упругими космическими аппаратами. М.: Машиностроение, 1986.
2. *Дегтярев Г.Л., Сиразетдинов Т.К.* Синтез оптимального управления в системах с распределенными параметрами при неполном измерении состояния (обзор) // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1983. № 2. С. 123–136.
3. *Сиразетдинов Т.К.* Оптимизация систем с распределенными параметрами. М.: Наука, 1977.
4. *Сиразетдинов, Т.К.* Устойчивость систем с распределенными параметрами. Новосибирск: Наука, 1987.
5. *Рапопорт Э.Я.* Оптимальное управление системами с распределенными параметрами. М.: Высшая школа, 2009.
6. *Егоров А.И.* Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. М.: Наука, 1978.
7. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972.
8. *Бутковский А.Г.* Структурная теория распределенных систем. М.: Наука, 1977.
9. *Рапопорт Э.Я.* Структурное моделирование объектов и систем управления с распределенными параметрами. М.: Высшая школа, 2003.
10. *Першин И.М.* Синтез систем с распределенными параметрами. Пятигорск: РИА-КМВ, 2002.
11. *Рей У.* Методы управления технологическими процессами. М.: Мир, 1983.
12. *Коваль В.А.* Спектральный метод анализа и синтеза распределенных систем: учеб. пособие. Саратов: СГТУ, 2010. 145 с.
13. *Koval V.A., Torgashova O.Y., Solomin M.A.* Solution of the Analysis Problem of a Machine Assembly Distributed System with Time-Dependent Heat Transfer Coefficient // Applied Sciences, 2021. Vol. 11 (11). Pp. 5016.
14. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С.* Управление линейными системами при внешних возмущениях: Техника линейных матричных неравенств. М.: ЛЕНАНД, 2014.
15. *Солодовников В.В., Дмитриев А.Н., Егунов Н.Д.* Спектральные методы расчета и проектирования систем управления. – М.: Машиностроение, 1986.
16. *Солодовников В.В., Семенов В.В.* Спектральная теория нестационарных систем управления. М.: Наука, 1974.
17. *Boyd J.P.* Chebyshev and Fourier spectral methods. Courier Corporation, 2001.
18. *Lofberg J.* YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB // 2004 IEEE

- international conference on robotics and automation (IEEE Cat. No. 04CH37508). IEEE, 2004. P. 284–289.
19. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел: пер. с англ. М.: Наука, 1964.

*Статья поступила в редакцию 11 февраля 2022 г.*

# DISTRIBUTED NONSTATIONARY CONTROL SYSTEM SYNTHESIS ON A BASIS OF SPECTRAL REPRESENTATION IN SPACE-TIME DOMAIN

V.A. Koval<sup>1</sup>, O.Yu. Torgashova<sup>2</sup>, M.A. Solomin<sup>3</sup>

Yuri Gagarin Saratov State Technical University of Saratov  
77, Polytechnicheskaya st., Saratov, 410054, Russian Federation

E-mail: koval.va@yandex.ru, olgatorg@gmail.com, solomin75@gmail.com

**Abstract.** *It is proposed, based on the spectral representation of the system, to solve the problem of synthesis of a distributed control plant described by PDE, using LMI technique. The system is described by a spectral characteristic vector with the amplitudes of the space-time modes of the Fourier series as components. The spectral characteristic vector is satisfied to an infinite SLAE composed for an initial PDE using the spectral method. For the spectral plant representation in space-time domain the stability, controllability, and observability criteria are formulated. The procedure of control synthesis on the basis of solving of stabilization problem with full information and observation problem is proposed. The expression for time-dependent matrix regulator gain is received.*

**Keywords:** *Distributed system, Fourier series, spectral method, LMI, synthesis*

## REFERENCES

1. Degtyarev G.L., Sirazetdinov T.K. Teoreticheskie osnovy avtomatizirovannogo upravleniya uprugimi kosmicheskimi apparatami. M.: Mashinostroenie, 1986. (in Russian).
2. Degtyarev G.L., Sirazetdinov T.K. Sintez optimal'nogo upravleniya v sistemah s raspredelennymi parametrami pri nepolnom izmerenii sostoyaniya (obzor) // Izv. AN SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika. 1983. № 2. C. 123–136. (in Russian).
3. Sirazetdinov T.K. Optimizatsiya sistem s raspredelennymi parametrami. M.: Nauka, 1977. (in Russian).
4. Sirazetdinov T.K. Ustojchivost' sistem s raspredelennymi parametrami. Novosibirsk: Nauka, 1987. (in Russian).
5. Rapoport E.Ya. Optimal'noe upravlenie sistemami s raspredelennymi parametrami. M.: Vysshaya shkola, 2009. (in Russian).
6. Egorov A.I. Optimal'noe upravlenie teplovymi i diffuzionnymi processami. M.: Nauka, 1978. (in Russian).
7. Lions J.L. Controle optimal de systemes gouvernes par des equations aux derivees partielles. Paris, Dunod, Gauthier-Villars, 1968. 426 pp.
8. Butkovskij A.G. Strukturnaya teoriya raspredelennyh sistem. M.: Nauka, 1977. (in Russian).
9. Rapoport E.Ya. Strukturnoe modelirovanie ob'ektov i sistem upravleniya s raspredelennymi parametrami. M.: Vysshaya shkola, 2003. (in Russian).
10. Pershin I.M. Sintez sistem s raspredelennymi parametrami. Pyatigorsk: RIA-KMV, 2002. (in Russian).
11. Ray W.H. Advanced process control. New York etc., 1981.
12. Koval' V.A. Spektral'nyj metod analiza i sinteza raspredelennyh sistem: uchebnoe posobie. Saratov: SGTU, 2010. 145 s. (in Russian).
13. Koval' V.A., Torgashova O.Y., Solomin M.A. Solution of the Analysis Problem of a Machine Assembly Distributed System with Time-Dependent Heat Transfer Coefficient // Applied Sciences, 2021. Vol. 11 (11). Pp. 5016.

---

<sup>1</sup> Vladimir A. Koval' (Dr. Sci. (Techn.)), Professor.

<sup>2</sup> Olga Yu. Torgashova (Dr. Sci. (Techn.)), Professor.

<sup>3</sup> Maxim A. Solomin, Postgraduate Student.

14. *Polyak B.T., Hlebnikov M.V., Shcherbakov P.S.* Upravlenie linejnymi sistemami pri vneshnih vozmushcheniyah: Tekhnika linejnyh matrichnyh neravenstv. M.: LENAND, 2014. (in Russian).
15. *Solodovnikov V.V., Dmitriev A.N., Egupov N.D.* Spektral'nye metody rascheta i proektirovaniya sistem upravleniya. M.: Mashinostroenie, 1986. (in Russian).
16. *Solodovnikov V.V., Semenov V.V.* Spektral'naya teoriya nestacionarnykh sistem upravleniya. M.: Nauka, 1974.
17. *Boyd J.P.* Chebyshev and Fourier spectral methods. Courier Corporation, 2001.
18. *Lofberg J.* YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB // 2004 IEEE international conference on robotics and automation (IEEE Cat. No. 04CH37508). IEEE, 2004. Pp. 284–289.
19. *Karlsru G., Eger D.* Thermal conductivity of solids. M: Science, 1964.