

**СИНТЕЗ ГЕТЕРОГЕННЫХ САМООРГАНИЗУЮЩИХСЯ МОДЕЛЕЙ  
ДЛЯ АППРОКСИМАЦИИ СТРУКТУР НА ПЛОСКОСТИ<sup>1</sup>****С.А. Колпашиков, А.С. Рязанов, А.А. Юдашкин**Самарский государственный университет.  
443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244

E-mail: skolpaschikov@mail.ru

*Предложено решение проблемы аппроксимации заданной гетерогенной структуры с помощью эластичной динамической модели произвольной размерности на плоскости. Модель построена на основе потенциальной системы, совмещающей свойства «эластичной петли», в которую введена матрица связности, и самоорганизующейся формы с памятью состояния. Показано, что созданная модель самостоятельно субоптимальным образом описывает заданную структуру, при этом по возможности сохраняя свою форму, близкую к начальной или некоторой желаемой, причем части аппроксимирующей структуры взаимодействуют только с аналогичными по типу частями заданной структуры.*

**Ключевые слова:** *нелинейная динамика, аппроксимация структур, комбинаторная оптимизация, самоорганизация, гетерогенные сети.*

**Введение**

Динамическая аппроксимация является важнейшей проблемой в ряде областей науки и технологии, что связано с необходимостью подбора наилучшего совпадения двух или более различных наборов данных при их произвольных изменениях. В особенности данная задача характерна для робототехники [1], управления большими сетями передачи данных [2], нанотехнологий [3] и логистики. Проблема требует особого внимания в силу невозможности построения наилучшего решения на больших объемах данных из-за NP-сложности, возникающей в этих случаях [4]. Оптимальное решение при фиксации размерности находится только полным перебором. Одной из важных ситуаций является наличие требования сохранения или восстановления заданной формы аппроксимирующей структурой, что характерно, например, при наличии аппроксимирующих шаблонов. Более существенные трудности появляются в том случае, когда на данные аппроксимирующей и аппроксимируемой структур накладываются разбиения на непересекающиеся подмножества, причем взаимодействие возможно только между подмножествами одного типа. С одной стороны, указанные ограничения повышают качество аппроксимации, с другой – приводят к необходимости построения схем динамической адаптации к данным, учитывающих одновременно большое число различных ограничений, часть из которых может быть введена через формальные зависимости, а часть – сформулирована

<sup>1</sup> Работа выполнена при поддержке ООО «Рекогнишн»

*Колпашиков Сергей Александрович – доцент кафедры «Автоматика и управление в технических системах», к.т.н.*

*Рязанов Александр Сергеевич – аспирант кафедры «Автоматика и управление в технических системах».*

*Юдашкин Александр Анатольевич – профессор кафедры «Автоматика и управление в технических системах», д.т.н.*

скорее семантически. В работе [5] для решения проблемы гомогенной аппроксимации в задаче коммивояжера предложена модель «эластичной петли», где основной идеей был отказ от перебора и замена его динамической моделью достаточно большого набора точек, стягивающихся к городам под действием сил упругости. Однако в данной работе не существовало ограничений на удержание исходной формы петли, а также каких-либо подмножеств типов городов. В последнее время появился ряд работ, посвященных рассмотрению математических подходов к моделированию систем с памятью состояний, обладающих механизмом самостоятельного формирования структур [6, 7], то есть восстанавливающих свою форму. В работе [8] предложено введение матрицы связности в стандартную модель распознавания образов для синтеза системы распознавания классов, что в дальнейшем может быть использовано для решения задачи гетерогенной аппроксимации.

В данной работе ставится задача синтеза динамической модели для аппроксимации гетерогенной структуры на плоскости с помощью другой заданной гетерогенной структуры, производимого таким образом, чтобы аппроксимирующая структура самостоятельно наилучшим образом описывала бы заданную, при этом по возможности сохраняя свою форму, близкую к начальной (или некоторой желаемой). При этом должна обеспечиваться такая процедура, чтобы опорные точки аппроксимирующей структуры описывали бы только соответствующие им по типу точки заданной структуры. Модель строится на основе нелинейной динамической системы как совмещающей свойства гетерогенной «эластичной петли» и самоорганизующейся системы с памятью состояния.

#### Математическая модель

Модель вводится как совокупность двух наборов типизированных точек на комплексной плоскости. Первый определяется радиус-вектором  $R_i, i=1..N$ . Второй – радиус-вектором  $r_j, j=1..M$ . В общем случае число точек в наборах разное. При этом каждая точка набора должна обладать некой характеристикой  $T(x_k)$ , определяющей принадлежность точки к одному из известных типов. В условиях нашей задачи считаем, что  $T(R_i), i=1..N$  и  $T(r_j), j=1..M$  заданы. Первый набор точек лишь определяет сложную систему аттракторов для второго набора, и, следовательно, статичен. Динамика второго набора точек определяется притяжением точек первого набора, имеющих тот же тип. Таким образом, каждая точка  $r_j$  будет перемещаться только под действием сил притяжения точек  $R_i$ , имеющих тип  $T(r_j)$ . В такой ситуации не имеет значения конкретный тип точки, а важно лишь знать, какие точки имеют схожий с ним тип, поэтому типизация точек вводится в определяющие соотношения в виде матрицы связей:

$$C_{ij} = \begin{cases} 1, & T(R_i) = T(r_j); \\ 0, & T(R_i) \neq T(r_j). \end{cases} \quad (1)$$

Стоит отметить, что можно было вести разные наборы  $R_i^1, R_i^2, \dots, R_i^S$  для разных типов точек. И такой способ более очевиден. Однако он менее гибок к изменениям, таким как появление точек нового типа или переход точки из одного типа в другой, в то время как в предложенной модели эти изменения лишь повлекут перерасчет матрицы  $C$ .

Вторым важным условием при построении модели является сохранение исходной конфигурации, то есть взаимного расположения точек второго набора. При этом типизация точек не учитывается.

В качестве потенциала предложенной динамической системы возьмем функцию полной упругой энергии

$$E = \alpha E_1 + \beta E_2, \quad (2)$$

где  $E_1$  – энергия взаимодействия с неподвижным набором,  $E_2$  – энергия взаимодействия точек подвижного набора между собой для сохранения формы, а константы  $\alpha$  и  $\beta$  определяют относительный вклад каждого из слагаемых в общий потенциал.

При решении известной задачи коммивояжера методом, предложенным Р. Дурбином и Д. Уилшоу,  $E_1$  задается выражением [5], которое мы модифицировали с учетом матрицы связей (1):

$$E_1 = -\varepsilon \sum_{i=1}^N \ln \left[ \sum_{j=1}^M C_{ij} \exp \left( -\frac{|R_i - r_j|}{2\varepsilon^2} \right) \right] \quad (3)$$

и которое при  $\varepsilon \rightarrow 0$  не будет неограниченно возрастать только в том случае, если для каждой точки  $R_i$  найдется хотя бы одна  $r_j$  того же типа, удовлетворяющая условию  $|R_i - r_j| \rightarrow 0$ . Таким образом,  $E_1$  можно понимать как суммарную силу взаимодействия однотипных точек из разных наборов. Слагаемое  $E_2$  минимизирует расстояние между соседними точками контура, тем самым сжимая «петлю».

В нашей задаче  $E_1$  имеет такой же смысл, однако  $E_2$  должно модифицировать контур с помощью одних лишь аффинных преобразований. Поэтому введем  $E_2$  как инвариант относительно преобразований на плоскости, определенный на множестве точек Евклидова пространства, центрированных относительно начала координат. Для этого используем оператор [7]:

$$H = \frac{1}{N} \begin{bmatrix} N-1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & N-1 & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & -1 & N-1 \end{bmatrix}.$$

Согласно [7]  $E_2$  определяется выражением

$$E_2 = \bar{r}(J - H)r, \quad (4)$$

где матрица  $J$  строится по правилу Хебба:  $J_{ij} = v_i \cdot u_j$  и имеет смысл системной памяти. Вектор  $v$  есть комплексное представление вектора  $Hr$ , а вектор  $u$  – комплексно-сопряженный вектору  $v$  и образующий с ним ортонормированный базис, то есть имеет место равенство  $u \cdot v = 0$ .

Динамика системы описывается следующим уравнением, минимизирующим потенциал (2) с учетом (3) и (4):

$$r'_j = \alpha \sum_{i=1}^N K_{ij} (R_i - r_j) + \beta \varepsilon v_j \left( \sum_{k=1}^M u_k r_k - 1 \right), \quad (5)$$

где  $K_{ij} = C_{ij} \frac{\varphi(R_i - r_j)}{\sum_{k=1}^M C_{ik} (R_i - r_k)}$  в трактовке Р. Дурбина и Д. Уилшоу играет роль связи

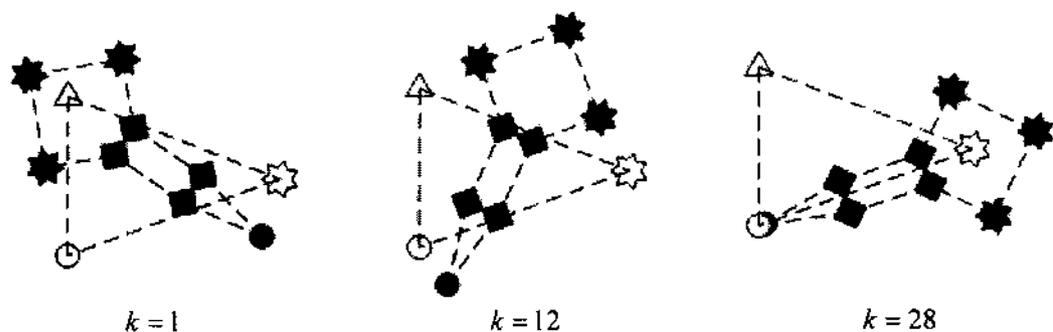
между  $i$  вершиной неподвижного контура и  $j$  вершиной подвижного. Здесь  $\varphi(d) = e^{-d^2/2\epsilon^2}$ . Данное выражение модифицировано с учетом введенной нами матрицы связей (1).

### Численные расчеты

На основе построенной модели (5) были проведены численные эксперименты по аппроксимации на плоскости, показавшие гибкость предложенного подхода. В качестве иллюстративного примера рассмотрим заданную и аппроксимирующую структуры, каждая из которых составлена из точек трех типов. Фиксированная структура состоит из  $N=3$  точек, а аппроксимирующая – из  $M=8$  точек, т.е. в данном случае меньшая по числу точек структура аппроксимируется более детализированной. Данная качественная иллюстрация условно имитирует процесс притяжения магнитной стрелки к одному из стационарных магнитов, а также последующее перемагничивание. Здесь меньшая структура – точка фиксации стрелки и два разнополюсных магнита, а аппроксимирующая структура – стрелка. Основание стрелки может взаимодействовать только с точкой фиксации, а конец – с одним из магнитов в зависимости от полюса.

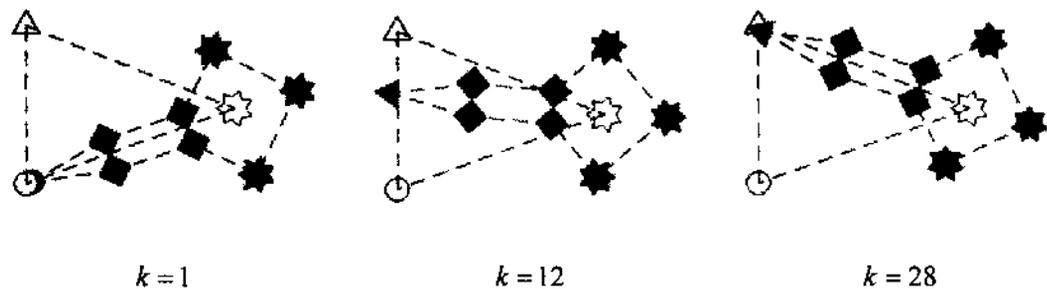
Значение соотношения  $\beta/\alpha$ , имеющего смысл жесткости внутренних связей, выбрано достаточно большим, исключая деформацию подвижного набора. Уравнение (5) решалось методом конечных приращений. Для расчетов использовался математический пакет MatLab 2006. Расчет проводился с шагом итерации  $h = 0.01$ , система уравнений достаточно быстро сходится к устойчивому состоянию.

На рисунках представлены положения системы на различных шагах итерационного процесса решения,  $k$  обозначает номер итерации. Незакрашенные точки принадлежат к заданной структуре, покрашенные – к подвижной аппроксимирующей, а форма знака точки обозначает ее тип. Движение аппроксимирующей системы определяется только точками совпадающих типов, что хорошо видно по конечному состоянию системы на рис. 1.



Р и с. 1. Динамика системы при движении из заданного состояния к устойчивому состоянию

Рис. 2 иллюстрирует переход системы к новому устойчивому состоянию при изменениях структуры неподвижного контура (перемагничивании полюсов) без каких-либо внешних воздействий. В начальный момент времени система находилась в устойчивом состоянии, соответствующем конечному состоянию первого примера. При изменении типа одной из точек система самостоятельно перемещается в новое устойчивое состояние.



Р и с. 2. Динамика системы при переходе к новому устойчивому состоянию, обусловленному изменением структуры неподвижного контура

### Заключение

В статье предложен подход к синтезу динамической системы, позволяющей аппроксимировать гетерогенную структуру на плоскости с помощью другой заданной гетерогенной структуры. Под гетерогенностью структур понимается отнесение точек структуры к различным типам. Предложенная модель обеспечивает самостоятельное движение аппроксимирующей структуры к такому устойчивому положению на плоскости, которое бы наилучшим образом описывало аппроксимируемую структуру, при этом по возможности сохраняя свою форму, близкую к начальной (или некоторой желаемой). Динамика системы определяется потенциалом, описывающим притяжение неподвижной структурой точек подвижной структуры и поддержание формы подвижной структуры системой с памятью состояний. Динамика притяжения, в отличие от известной модели «эластичной петли», где каждая точка неподвижной структуры притягивает все точки подвижной структуры, учитывает гетерогенность структур, исключая притяжение друг к другу точек разных типов.

С помощью численного моделирования проиллюстрировано движение системы, имитирующей стрелку магнита, из некоторого заданного начального к конечному устойчивому состоянию без изменения структур. Второй пример демонстрирует динамику системы при изменении типа точки подвижной структуры – перемагничивание магнита. Движение системы в обоих случаях происходит без внешних воздействий, т.е. система самостоятельно решает задачу субоптимальным способом.

Предложенный подход позволяет редуцировать большие системы к более мелким неким субоптимальным способом. Однако выбранный детерминированный алгоритм эквивалентен методу наискорейшего спуска при поиске минимума функции большого числа переменных. Это означает, что система принимает первое же свое стационарное состояние, которое далеко не всегда соответствует глобальному минимуму целевой функции, однако обеспечивает достаточно хорошее решение для NP-задач.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Passerone R., Burch J.R., Sangiovanni-Vincentelli A.L. Conservative approximations for heterogeneous design // International Conference On Embedded Software: Proc. of the 4th int. conf. – Pisa, Italy, 2004. – Session System Design. – P. 155-164
2. Khuller S., Kim Y., Woeginger G. Approximation Schemes for Broadcasting in Heterogenous Networks // Approximation, Randomization, and Combinatorial Optimization. – Springer Berlin/Heidelberg, 2004. – P. 163-170.
3. Self-assembly from milli- to nanoscales: methods and applications / M. Mastrangeli, S. Abbasi, C. Varel, C. Van Hoof, J-P Celis, K. F. Bohringer, – J. Micromech. Microeng. 19. – 2009.
4. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. – М.: Мир, 1982. – 416 с.
5. Durbin R., Willshaw D.J. An analogue approach to the traveling salesman problem using an elastic net method // Nature. – 1987. – V. 326. – P. 689.
6. Юдашкин А.А. Синтез самоорганизующихся систем, запоминающих и восстанавливающих несколько собственных конфигураций в трехмерном пространстве // Мехатроника, автоматизация и управление. – 2005. – №1. – С. 7-11.
7. Юдашкин А.А. О подходе к построению трансформирующихся систем с несколькими устойчивыми состояниями // Дифференциальные уравнения и их приложения: Межвуз. сб. науч. тр. – 2002. – №1. – С. 64-68.
8. Юдашкин А.А. Классификация образов и ее связь с топологией многообразий динамических систем // Изв. Самарского научного центра РАН. – 2001. – Т.3. – №1. – С. 93-98.

*Статья поступила в редакцию 11 сентября 2009 г.*

UDC 517.938

## SYNTHESIS OF HETEROGENEOUS SELF-ORGANIZING MODELS FOR FOR PLAIN STRUCTURES APPROXIMATION

*S.A. Kolpashchikov, A.S. Ryazanov, A.A. Yudashkin*

Samara State Technical University,  
244, Molodogvardeyskaya str., Samara, 443100

*A solution for a problem of a given heterogeneous structure approximation by an arbitrary dimensional elastic dynamical model in a plane is proposed. The model is developed on the as the potential system with the characteristics of the elastic loop with the connectivity matrix and the self-organizing form with the state memory. It is shown that the proposed model is able to fit the given structure as the sub-optimal solution, preserving its form at least close to its initial or desired construction, while the dynamic structure parts interact with same type parts of the given structure only.*

**Keywords:** *nonlinear dynamics, structure approximation, combinatorial optimization, self-organization, dynamic memory.*