

СИНТЕЗ СТРУКТУРЫ СИСТЕМЫ ОБОГРЕВА ПОМЕЩЕНИЙ В УСЛОВИЯХ НЕПОЛНОТЫ ИЗМЕРЕНИЙ

А.Н. Дилигенская, В.Г. Щетинин

Самарский государственный технический университет.
443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244

Рассматривается задача синтеза замкнутой системы поддержания температуры воздуха в помещении, недоступной для измерения в условиях действия неконтролируемых возмущений. Синтез системы управления сводится к независимому решению задач синтеза наблюдателя состояния и синтеза регулятора состояния.

Ключевые слова: *пространство состояний, характеристический полином, неконтролируемые возмущающие воздействия, регулятор состояния, идентификатор состояния.*

Рассмотрим задачу синтеза системы управления автономной отопительной установкой, предназначенной для поддержания заданной температуры воздуха в комплексе бытовых или производственных помещений в условиях действия неконтролируемых возмущений разнообразной природы – внешних, внутренних, параметрических. В этом случае подлежащая наложению требований на поведение величина – температура воздушной массы помещения – является недоступной для непосредственного контроля и соответствует цели управления со значительной долей отклонений. Величиной, доступной для измерения, является температура теплоносителя на выходе нагревателя.

Будем осуществлять синтез системы управления в пространстве состояний с использованием формализованных упрощенных векторно-матричных моделей. Построение векторно-матричной модели рассматриваемого объекта в условиях действия неконтролируемых возмущений приводит к следующим уравнениям [1]:

$$\begin{aligned}\frac{dX}{dt} &= AX(t) + BU(t) + v(t); \\ Y(t) &= CX(t) + \eta(t),\end{aligned}\tag{1}$$

где порядок объекта $n = 2$, $X = [x_1 \ x_2]^T$ – вектор состояния системы; $U = [u_1 \ u_2]^T$ – вектор входов системы; $[...]^T$ – знак транспонирования; Y – вектор наблюдений; $v(t)$ – помеха, действующая на входе объекта, которая считается аддитивной; $\eta(t)$ – погрешности измерения. Компонентами вектора состояния объекта являются величины, характеризующие процесс нагрева: x_1 – соответствует температуре на выходе нагревателя, x_2 – температуре воздушной массы помещения. Первая составляющая u_1 вектора входных воздействий соответствует объемной мощности тепловыделения в нагревателе, а u_2 – температуре окружающей среды.

Дилигенская Анна Николаевна – доцент кафедры «Автоматика и управление в технических системах», к.т.н., доцент.

Щетинин Владимир Георгиевич – доцент кафедры «Автоматика и управление в технических системах», к.т.н., доцент.

Матрица состояния объекта A , матрица управления B и матрица наблюдений C имеют следующий вид:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

и их коэффициенты считаются известными величинами, определяемыми технологическими характеристиками нагревательного устройства, габаритами и теплофизическими параметрами помещения. В случае их линейности и стационарности при синтезе системы управления динамические показатели системы, определяющие качество управления, можно формировать в виде желаемого полинома системы на основе распределения корней характеристического уравнения замкнутой системы на комплексной плоскости [2]. Конкретное размещение полюсов системы на комплексной плоскости определяется формализацией критерия качества управления и зависит от требований, предъявляемых к качеству переходного процесса с обязательным условием обеспечения его устойчивости.

В случае стационарного полностью наблюдаемого объекта синтез системы управления в пространстве состояний осуществляется с помощью регуляторов состояния на основе модального управления, изменяющего собственные значения матрицы системы (моды) для достижения заданных целей управления. Принципы модального управления используются при конструировании регуляторов состояния, включаемых в контуры обратных связей по состоянию и обеспечивающих заданное размещение собственных чисел замкнутой системы на комплексной плоскости.

В этом случае управляющее воздействие является линейной комбинацией компонент вектора состояния:

$$U(t) = -KX(t) + r(t), \quad (3)$$

где $r(t)$ – задающее воздействие, K – искомая матрица коэффициентов регулятора состояния.

Тогда уравнение динамики замкнутой системы без учета случайных воздействий определяется с учетом соотношений (1) и (3) и имеет вид

$$\frac{dX}{dt} = AX(t) + B(-KX(t) + r(t)) = (A - BK)X(t) + Br(t). \quad (4)$$

Синтез управляющего воздействия сводится к выбору такой матрицы коэффициентов обратной связи K , чтобы характеристический многочлен матрицы $[A - BK]$ совпадал с желаемым.

При такой постановке задачи для синтеза системы управления с регулятором состояния необходимо измерение всех компонент вектора состояния объекта X . В условиях действия неконтролируемых возмущений $v(t)$ и $\eta(t)$ одна из компонент вектора состояния объекта x_1 , необходимая для синтеза управления, измеряется с существенными случайными ошибками, а подлежащая наложению требований величина x_2 недоступна для измерения.

При недоступной непосредственному контролю компоненте оценим ее с помощью наблюдателя состояния. Применим для этой цели наблюдатель состояния с минимальной дисперсией – фильтр Калмана, формирующий на выходе оптимальную в смысле минимума среднеквадратичного отклонения оценку $\hat{X}$ частично ненаблю-

даемого и зашумленного вектора состояния X по результатам измерения входного и выходного сигналов объекта управления. При использовании фильтра Калмана оценка $\hat{X}$ вектора состояния асимптотически стремится к своему истинному значению. На этом основании для синтеза управляющего воздействия $u(t)$ (3) заменим в цепи обратной связи неконтролируемый вектор X на полученную оценку:

$$U(t) = -K\hat{X}(t) + r(t). \quad (5)$$

Таким образом, задача синтеза системы управления сводится к синтезу наблюдателя состояния, синтезу регулятора состояния и синтезу управляющего воздействия.

Согласно принципам разделимости и дуальности [3] характеристические полиномы замкнутой системы управления и наблюдателя независимы друг от друга и собственные числа наблюдателя и регулятора выбираются независимо. Следовательно, задачи синтеза наблюдателя состояния и синтеза регулятора состояния могут быть решены раздельно. При этом выбранные характеристические числа системы с обратной связью и характеристические числа наблюдателя войдут в замкнутую систему управления без изменений.

На этом основании рассмотрим решения задач синтеза регулятора состояния и наблюдателя, осуществляемые независимо друг от друга. Сначала рассмотрим задачу синтеза замкнутой системы управления, сводящуюся к выбору матрицы коэффициентов обратных связей K .

Положим, что система (1) управляема и наблюдаема [1]. Желаемый характеристический полином замкнутой системы управления объекта второго порядка имеет вид

$$D_*(p) = p^2 + d_1 p + d_2. \quad (6)$$

Для нахождения коэффициентов желаемого характеристического многочлена замкнутой системы будем использовать типовые стандартные распределения, аппроксимирующие переходный процесс в системе с заданными показателями качества. Применим фильтр Бесселя, минимизирующий среднеквадратичную ошибку и обладающий наилучшими показателями качества переходных процессов во временной области [4], и выберем для данного распределения конкретные значения коэффициентов d_1, d_2 .

С целью использования универсальных алгоритмов синтеза регуляторов состояния исходную математическую модель с двумя входами рассматриваемого объекта (1) преобразуем к новой инвариантной форме модели объекта с одним входом, при этом общность описания объекта сохраняется. Для этого введем новые базисные переменные

$$\xi_1 = x_1; \quad \xi_2 = x_2 + \frac{b_1}{a_{12}} u_1. \quad (7)$$

При этом

$$x_2 = \xi_2 - \frac{b_1}{a_{12}} u_1; \quad \frac{dx_2}{dt} = \frac{d\xi_2}{dt} - \frac{b_1}{a_{12}} \frac{du_1}{dt}. \quad (8)$$

Скалярное входное воздействие θ в новом инвариантном базисе формируется

соответственно следующей линейной комбинации:

$$\theta = -\frac{a_{22}b_1}{a_{12}}u_1 - \frac{b_1}{a_{12}}\frac{du_1}{dt} + b_2u_2. \quad (9)$$

Описание системы в новом базисе с учетом входной помехи и погрешностей измерения примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{dt} &= A\psi(t) + \bar{B}\theta(t) + v(t); \\ z(t) &= C\psi(t) + \eta(t), \end{aligned} \quad (10)$$

где $\psi = [\xi_1 \ \xi_2]^T$ – вектор состояния системы в новом базисе; $z(t)$ – вектор наблюдений в новом базисе; $\bar{B} = [0 \ 1]^T$ – матрица управления объекта в новом базисе. Матрицы A и C сохраняют тот же вид, что и в исходном базисе.

Характеристическое уравнение рассматриваемого объекта запишется как

$$\det(pI_2 - A) = \det \begin{vmatrix} p - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & p - a_{22} \end{vmatrix} = p^2 - (a_{11} + a_{22})p + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0, \quad (11)$$

где I_2 – единичная матрица второго порядка.

Таким образом, коэффициенты характеристического полинома второго порядка

$$A(p) = p^2 + a_1p + a_2 \quad (12)$$

принимают следующие значения: $a_0 = 1$; $a_1 = -(a_{11} + a_{22})$; $a_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Для вычисления значений коэффициентов регулятора перейдем к канонической управляемой форме представления объекта [3]. В этом случае матрицы A и B можно записать сразу в стандартном виде, а для вычисления матрицы C нужно найти матрицу преобразования T .

Переход к базису канонической управляемой формы осуществим через вычисление промежуточных матриц в соответствии с [3, 5]: матрицы управляемости

$$Q_y = [\bar{B} \ A\bar{B}]; \text{ вспомогательной матрицы } Q_v = \begin{bmatrix} a_1 & a_0 \\ a_0 & 0 \end{bmatrix}; \text{ определяющей матрицы}$$

$$Q = Q_y \cdot Q_v \text{ и матрицы линейного преобразования } T = Q^{-1}.$$

Матрица преобразования T задает переход матриц объекта $A, \bar{B}, C$ к базису канонической управляемой формы по соотношениям

$$\tilde{A} = TAT^{-1}; \tilde{B} = T\bar{B}; \tilde{C} = CT^{-1}. \quad (13)$$

В канонической управляемой форме матрица $\tilde{A}$ является матрицей Фробениуса $\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}$, где коэффициенты характеристического уравнения расположены

в последней строке, а матрица $\tilde{B}$ также имеет специальный вид $\tilde{B} = [0 \ 1]^T$ [3, 5].

В координатном базисе вектора состояний $q = [q_1, q_2]^T$, соответствующем канонической управляемой форме, динамическое уравнение объекта примет вид:

$$\frac{dq}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} q(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \theta(t). \quad (14)$$

При расчете коэффициентов регулятора положим задающее воздействие $r(t)$, не меняющее характер свободного движения системы, нулевым, и в этом случае запишем на основе (3) уравнение регулятора в следующем виде:

$$\theta(t) = -K_p^T q(t), \quad (15)$$

где матрица коэффициентов регулятора имеет вид $K_p = [k_{p1} \ k_{p2}]^T$.

Подставляя (15) в (14), получим векторное уравнение динамики замкнутой системы управления

$$\frac{dq}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(a_2 + k_{p1}) & -(a_1 + k_{p2}) \end{bmatrix} q(t) = \tilde{A} q(t). \quad (16)$$

Характеристический полином, отвечающий системе (16), запишем как

$$\det(pI_2 - \tilde{A}) = p^2 + (a_1 + k_{p2})p + (a_2 + k_{p1}). \quad (17)$$

Из сравнения полиномов желаемого расположения полюсов (6) и замкнутой системы (17) получим соотношения для вычисления коэффициентов матрицы регулятора:

$$k_{p1} = d_2 - a_2, \quad k_{p2} = d_1 - a_1. \quad (18)$$

Далее на основе уравнения (15) определим выражение, связывающее управляющую переменную θ и вектор состояния ψ в выбранном инвариантном базисе:

$$\theta(t) = -K_p^T q(t) = -K_p^T T \psi(t) = -K \psi(t). \quad (19)$$

Из соотношения (19) определим матрицу реальных коэффициентов обратных связей K по полному вектору состояния ψ :

$$K = K_p^T T. \quad (20)$$

На основе соотношений (7) и (8) осуществим обратный переход к переменным x_1 и x_2 в исходном базисе, отвечающим реальным переменным – значениям температуры нагревателя и воздуха в помещении.

Рассмотрим теперь независимое решение задачи синтеза наблюдателя состояния для объекта (10) [3, 6].

В реальных условиях эксплуатации системы нагрева учет помех разного рода и случайных возмущений приводит к тому, что задача детерминированного управления заменяется стохастической задачей. Помехи $v(t)$ и $\eta(t)$ будем считать случайными процессами типа белого шума с нулевыми математическими ожиданиями $M\{v\} = 0$, $M\{\eta\} = 0$ и известными ковариационными матрицами $\text{cov}\{v\} = M\{v(t)v(\tau)^T\} = V\delta(t - \tau)$, $\text{cov}\{\eta\} = M\{\eta(t)\eta(\tau)^T\} = R\delta(t - \tau)$, где $\delta(t)$ – дельта-функция, V и R – симметричные неотрицательно определенные матрицы интенсивности белого шума $v(t)$ и $\eta(t)$ соответственно. Положим, что начальное состояние системы $\psi(t_0)$ задано статистическими характеристиками: математическим ожиданием $M\{\psi\} = \psi_0$ и ковариационной матрицей $\text{cov}\{\psi\} = P_0$. Также поло-

жим, что процессы $\psi(t_0)$, $v(t)$ и $\eta(t)$ не коррелируют между собой.

При построении оптимального наблюдателя полного порядка с минимальной дисперсией в качестве идентификатора состояния примем математическую модель объекта в пространстве состояний. Наблюдатель формирует на выходе несмещенную оценку вектора состояния объекта по критерию минимума среднеквадратичного отклонения оцененного значения $\hat{\psi}(t)$ от истинного $\psi(t)$. Для этого идентификатор реализует рекуррентную процедуру обработки результатов наблюдений входного $\theta(t)$ и выходного $z(t)$ сигналов объекта, в которой для минимизации дисперсии оценок в алгоритм идентификатора вводится корректирующая обратная связь по выходу системы $z(t)$.

Уравнения наблюдателя имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\psi}}{dt} &= A\hat{\psi}(t) + \bar{B}\theta(t) + L[z(t) - C\hat{\psi}(t)], \\ \hat{\psi}(t_0) &= \psi_0. \end{aligned} \quad (21)$$

Матрица коэффициентов усиления фильтра L , формирующая динамические свойства идентификатора, определяется соотношением

$$L = PC^T R^{-1}. \quad (22)$$

В (22) P – ковариационная матрица ошибок оценивания, которая в случае стационарности процессов определяется решением алгебраического матричного уравнения Риккати:

$$AP + PA^T - PC^T R^{-1} CP + V = 0. \quad (23)$$

Решение матричного уравнения Риккати (23) найдем путем организации вычислительной процедуры на основе построения рекуррентных соотношений при $k = 1, 2, \dots$ [6].

По априорным значениям характеристик сигналов вычислим априорное значение ковариационной матрицы сигнала:

$$Q(k+1) = AP(k)A^T + V. \quad (24)$$

Рассчитаем апостериорное значение ковариационной матрицы сигнала:

$$P(k+1) = Q(k+1) - Q(k+1)C^T [CQ(k+1)C^T + R]^{-1} CQ(k+1). \quad (25)$$

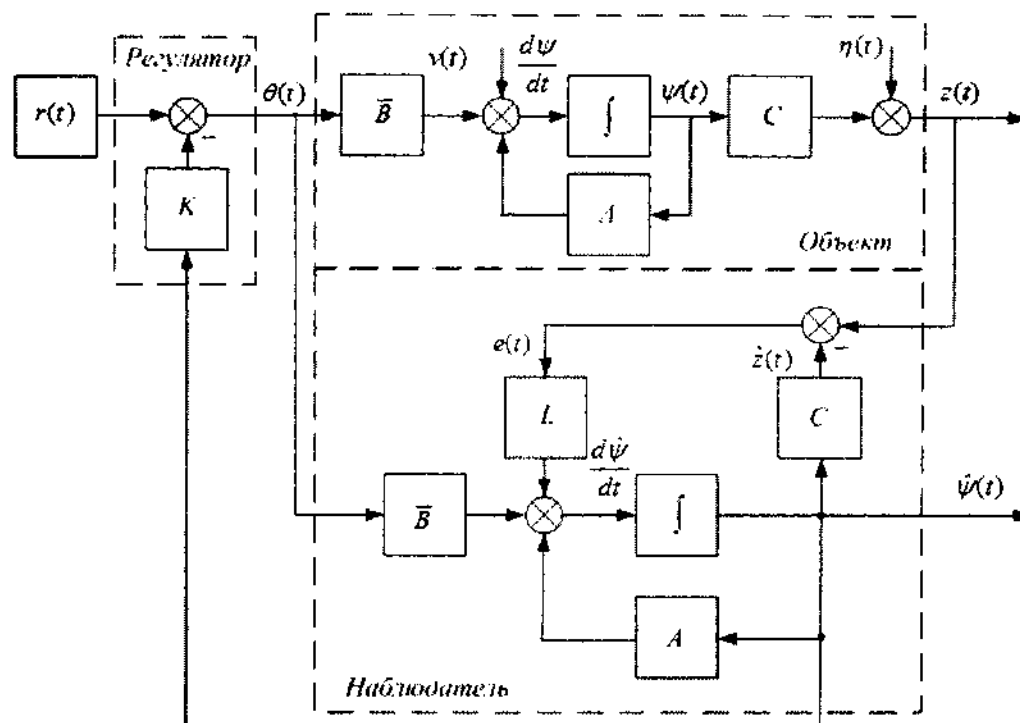
Найдем матрицу коэффициентов усиления $L(k+1)$, определяющую вес поправок к начальным условиям на основе ковариационных матриц оценок состояний:

$$L(k+1) = Q(k+1)C^T [CQ(k+1)C^T + R]^{-1} = P(k+1)C^T R^{-1}. \quad (26)$$

Вычисления на основе рекуррентных соотношений (24)-(26) будем продолжать, пока не установится стационарный режим работы фильтра, условием которого является равенство $P(k+1) = P(k) = P$ или, соответственно, $L(k+1) = L(k) = L$.

Матрица L , рассчитанная с помощью (22) и (23), обеспечивает минимальную ошибку $\varepsilon(t) = \psi(t) - \hat{\psi}(t)$ восстановления зашумленного и частично ненаблюдаемого вектора состояния, стремящуюся в асимптотике к нулю. Коэффициенты идентификатора однозначно определяются с помощью уравнений фильтра Калмана на основе априорной информации о характеристиках помех в соответствии с выбранным критерием.

В соответствии с изложенным, объединяя алгоритмы синтеза управляющего воздействия (5) с учетом инвариантного координатного базиса, регулятора (19) и наблюдателя состояния (21), структурную схему системы управления представим в следующем виде (рис. 1).



Р и с. 1. Структурная схема системы управления с регулятором состояния и наблюдателем

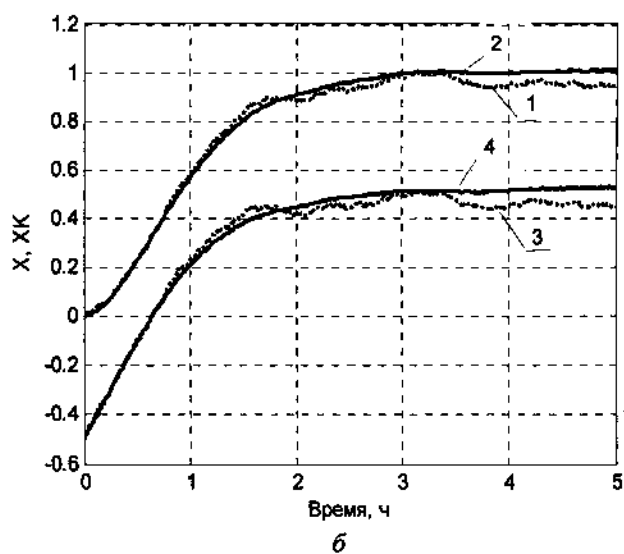
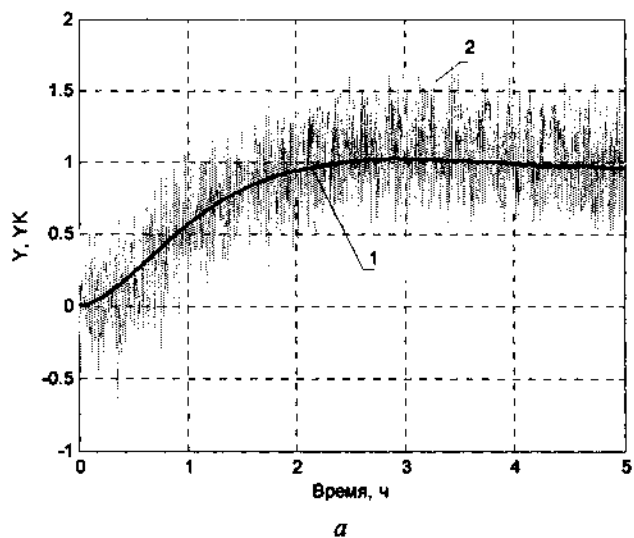
Проведенные вычислительные эксперименты с имитационными моделями синтезированных систем управления доказывают корректность алгоритмов синтеза регулятора и наблюдателя для рассматриваемого объекта нагрева. При проведении экспериментов случайные воздействия $v(t)$ и $\eta(t)$, отражающие неучтенные взаимодействия среды и изменение различных параметров в пределах $\pm (10 - 20)\%$, были имитированы с помощью случайных сигналов типа белого шума.

Результаты моделирования рассмотренной системы управления с использованием наблюдателя состояния представлены на рис. 2.

На рис. 2 а в относительных единицах представлено сравнение выходной величины объекта нагрева с учетом случайных воздействий (кривая 2) и ее оценка (кривая 1), полученная с помощью синтезированного наблюдателя состояния. Результаты экспериментов показывают удовлетворительное качество фильтрации помех.

На рис. 2 б показаны истинные (промоделированные) значения вектора состояния замкнутой системы управления, являющиеся ненаблюдаемыми величинами (кривые 1 и 3), и их оценки (кривые 2 и 4), полученные с выхода идентификатора. Кривые 1 и 2 соответствуют истинному значению координаты x_1 , отвечающей температуре нагревателя, и его оценке; кривые 3 и 4 – истинному значению и оценке координаты x_2 , соответствующей температуре воздушной массы помещения. От-

ставание полученной оценки от реальной траектории зависит от интенсивности помех, действующих на входе и выходе объекта, а также от вычислительных особенностей реализации алгоритма управления.



Р и с. 2. Выходные воздействия объекта и наблюдателя состояния (а) и истинные значения вектора состояния и его оценка (б)

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Дилигенская А.Н., Щетинин В.Г. Устойчивость, управляемость и наблюдаемость систем обогрева помещений в условиях неполноты измерений // Вестник СамГТУ. Серия «Технические науки». – 2009. – №2 (24). – С. 12-16.

2. Лето А.М. Аналитическое конструирование регуляторов, I-IV // Автоматика и телемеханика. – 1960. – №4. – С. 436-441; 1960. – №5. – С. 561-568; 1960. – №6. – С. 661-665; 1961. – №4. – С. 425-435.
3. Андреев Ю.Н. Управление конечномерными линейными объектами. – М.: Наука, 1976. – 424 с.
4. Справочник по активным фильтрам: Пер. с англ./ Д. Джонсон, Дж. Джонсон, Г. Мур. – М.: Энергоатомиздат, 1983. – 128 с.
5. Стрейц В. Метод пространства состояний в теории дискретных линейных систем управления: Пер. с англ. – М.: Наука, 1985. – 298 с.
6. Эйхофф П. Основы идентификации систем управления: Пер. с англ. – М.: Мир, 1975. – 683 с.

Статья поступила в редакцию 9 сентября 2009 г.

UDC 681.511.26

SYNTHESIS OF THE STRUCTURE OF INDOORS HEATING SYSTEM IN CONDITIONS OF INCOMPLETENESS OF MEASUREMENTS

A.N. Diligenskaya, V.G. Shchetinin

Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya str., Samara, 443100

The problem of synthesis of a closed system of maintaining the unmeasured indoors temperature in the presence of uncontrolled disturbances is now in consideration. Synthesis of control system is reduce to independent solution of the problems of synthesis of the state observer and synthesis of the state regulator.

Key words: State space, characteristic polynomial, uncontrollable perturbations, state regulator, state observer.