

РЕШЕНИЕ МНОГОМЕРНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ КОНЕЧНОГО ЦИЛИНДРА В ВИДЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ РЕШЕНИЙ ОДНОМЕРНЫХ ЗАДАЧ¹

Е.Г. Ульченко

Самарский государственный технический университет,
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244. Главный корпус

Рассмотрен аналитический метод поиска решения двумерной задачи теплопроводности конечного цилиндра в виде произведения решений одномерных уравнений теплопроводности бесконечной пластины и бесконечного цилиндра.

Ключевые слова: уравнение теплопроводности, бесконечная пластина, бесконечный цилиндр, стандартизирующая функция, функция Грина, температурное поле

Получение решения многомерных задач теплопроводности в аналитической форме является либо очень трудоемким, либо невыполнимым процессом. Тем не менее существует ряд методов, позволяющих получить решение исходной задачи в аналитической форме. Одним из таких методов является метод представления решения многомерной задачи в виде произведения решений одномерных задач [1, стр. 39]. Для широкого круга задач определены так называемые функции Грина. Функция Грина описывает реакцию управляемой распределенной системы с нулевыми начальными и однородными граничными условиями на точечное импульсное воздействие вида дельта-функции, приложенное в произвольной, но фиксированной точке [2, стр. 50]. Зная функцию Грина, можно записать решение задачи для ненулевых начальных и неоднородных граничных условий при заданном входном воздействии, которые учитываются стандартизирующей функцией.

Общее уравнение теплопроводности для случая комбинированного радиального и осевого потока тепла в сплошном или полом цилиндре имеет вид

$$\frac{\partial \theta(x, r, t)}{\partial t} - a^2 \left[\frac{\partial^2 \theta(x, r, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta(x, r, t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta(x, r, t)}{\partial r} \right] = f(x, r, t), \quad (1)$$

где $\theta(x, r, t)$ – температура цилиндра, $r \in (0; R)$ – радиус цилиндра, $x \in (0; l)$ – длина цилиндра, a^2 – температурный коэффициент, $f(x, r, t)$ – функция внутренних источников тепла.

Рассмотрим наиболее простой случай:

$$\frac{\partial \theta(x, 0, t)}{\partial r} = 0, \quad \theta(x, R, t) = 0, \quad \theta(0, r, t) = \theta(l, r, t) = 0, \quad \theta(x, r, 0) = \theta_0, \quad f(x, r, t) = 0. \quad (2)$$

Уравнение теплопроводности для бесконечной пластины имеет вид [3, стр. 51]:

$$\frac{\partial \theta(x, t)}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial x^2} = f(x, t). \quad (3)$$

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Гранта РФФИ (проект 09-08-297а).

Ульченко Евгений Геннадиевич – аспирант.

Если $\theta(x,0)=\theta_0(x)$, $\theta(0,t)=0$, $\theta(l,t)=0$, $0 < x < l$, $t > 0$, $f(x,t)=0$, то стандартизирующая функция $\omega(x,t)=\theta_0(x)\delta(t)$, а функция Грина [3, стр. 51]:

$$G_1(x,\xi,t)=\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{n\pi\xi}{l}\cdot\exp\left[-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2t\right]. \quad (4)$$

Уравнение теплопроводности для радиального потока в бесконечном цилиндре [3, стр. 64]:

$$\frac{\partial\theta(r,t)}{\partial t}-a^2\left[\frac{\partial^2\theta(r,t)}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\theta(r,t)}{\partial r}\right]=f(r,t). \quad (5)$$

Если $\theta(r,0)=\theta_0(r)$, $\theta(R,t)=0$, $0\leq r\leq R$, $t\geq 0$, $f(x,t)=0$, то стандартизирующая функция $\omega(r,t)=\theta_0(r)\delta(t)$, а функция Грина [1, стр. 197]:

$$G_2(r,\rho,t)=\frac{2}{R^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_0(\mu_k r)J_0(\mu_k \rho)\rho}{J_1^2(\mu_k R)}\cdot\exp(-a^2\mu_k^2 t), \quad (6)$$

где μ_k – корни уравнения $J_0(\mu_k R)=0$.

Стандартизирующая функция для ограниченного цилиндра (1) в условиях (2):

$$\omega(x,r,t)=\theta_0\delta(t), \quad (7)$$

а функция Грина $G(x,\xi,r,\rho,t)$ определяется произведением:

$$G(x,\xi,r,\rho,t)=G_1(x,\xi,t)\times G_2(r,\rho,t), \quad (8)$$

$$G(x,\xi,r,\rho,t)=\frac{4}{R^2 l}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{n\pi\xi}{l}\cdot\frac{J_0(\mu_k r)J_0(\mu_k \rho)\rho}{J_1^2(\mu_k R)}\cdot\exp\left[-\left[\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2+a^2\mu_k^2\right]t\right]. \quad (9)$$

Температурное поле цилиндра определяется [2, стр. 64]

$$\theta(x,r,t)=\int_0^t\int_0^l\int_0^R G(x,\xi,r,\rho,t-\tau)\cdot\omega(x,r,\tau)d\xi d\rho d\tau. \quad (10)$$

После соответствующей подстановки (7) и (9) в (10) и интегрирования решение уравнения (1) в условиях (2) примет вид:

$$\theta(x,r,t)=\frac{4\theta_0}{\pi R}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot\sin\frac{n\pi x}{l}\cdot(1-\cos(n\pi))\cdot\frac{J_0(\mu_k r)}{\mu_k J_1(\mu_k R)}\cdot\exp\left[-\left[\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2+a^2\mu_k^2\right]t\right]. \quad (11)$$

Задав начальную температуру, геометрические размеры и свойства материала цилиндра (например стали): $\theta_0=50^\circ\text{C}$, $r\in[0;0,25]\text{ м}$, $x\in[0;2]\text{ м}$, $a^2=0,000013\text{ м}^2/\text{с}$, построим температурное поле цилиндра по формуле (11) в заданный произвольный момент времени t , например при $t=60\text{ с}$. Для проверки построим температурное поле цилиндра с использованием математического пакета Comsol Femlab 3.1, задав исходное уравнение (1), граничные условия (2) и $t=60\text{ с}$.

Сравнение рис. 1 а и 1 б показывает, что решение (11), полученное аналитически, и решение, полученное с использованием математического пакета, совпадают,

следовательно, полученное аналитическое решение (11) верно.

При наличии теплообмена на боковой поверхности цилиндра со средой нулевой температуры граничные условия изменятся, т.е. условия (2) примут вид:

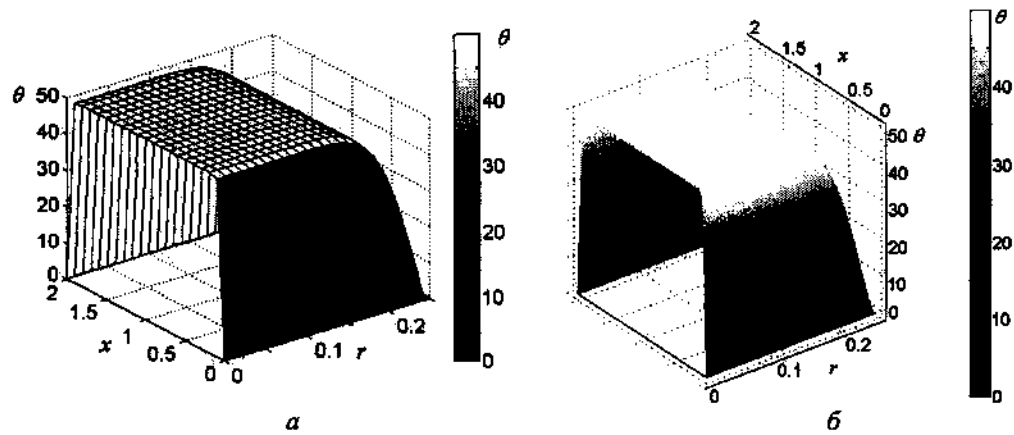
$$\begin{cases} \frac{\partial \theta(x, 0, t)}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \theta(x, R, t)}{\partial r} + \alpha \theta(x, R, t) = 0, \\ \theta(0, r, t) = \theta(l, r, t) = 0, \quad \theta(x, r, 0) = \theta_0, \quad f(x, r, t) = 0. \end{cases} \quad (12)$$

Уравнение теплопроводности (3) и функция Грина (4) для бесконечной пластины будут такие же, как и в предыдущем случае, т.к. условия на границах пластины остались прежними. Для цилиндра уравнение теплопроводности (5) не изменится, а функция Грина (6) в новых условиях:

$$\theta(r, 0) = \theta_0, \quad \frac{\partial \theta(R, t)}{\partial r} + \alpha \theta(R, t) = 0, \quad 0 < r < R, \quad t > 0, \quad \alpha \neq 0, \quad \text{примет вид [1, стр. 199]:}$$

$$G_2(r, \rho, t) = \frac{2}{R^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k^2 J_0(\mu_k r) J_0(\mu_k \rho) \rho}{(\alpha^2 + \mu_k^2) J_0^2(\mu_k R)} \cdot \exp(-a^2 \mu_k^2 t), \quad (13)$$

где μ_k – корни уравнения $\mu_k J_0'(\mu_k R) + \alpha J_0(\mu_k R) = 0$.



Р и с. 1. Температурное поле цилиндра при $t=60$ с:

a – рассчитанное по формуле (11), b – рассчитанное методом КЭ в пакете Femlab 3.1

Подставив (13) и (4) в (8), запишем функцию Грина для конечного цилиндра с теплообменом на боковой поверхности:

$$\begin{aligned} G(x, \xi, r, \rho, t) = & \frac{4}{R^2 l} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{n\pi \xi}{l} \cdot \frac{\mu_k^2 J_0(\mu_k r) J_0(\mu_k \rho) \rho}{(\alpha^2 + \mu_k^2) J_0^2(\mu_k R)} \times \\ & \times \exp \left(- \left[\left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 + a^2 \mu_k^2 \right] t \right). \end{aligned} \quad (14)$$

Стандартизирующая функция, в условиях (12):

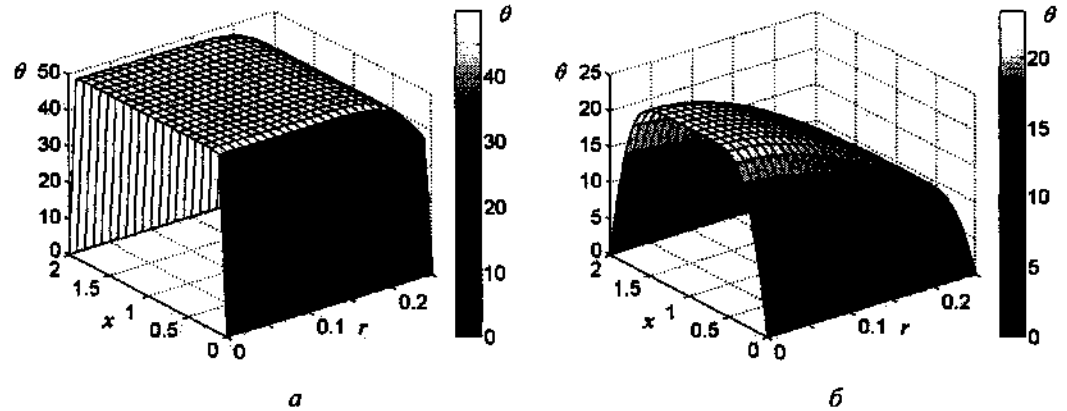
$$\omega(x, r, t) = \theta_0 \delta(t). \quad (15)$$

После подстановки (14) и (15) в (10) и интегрирования решение уравнения (1) в условиях (12) примет вид:

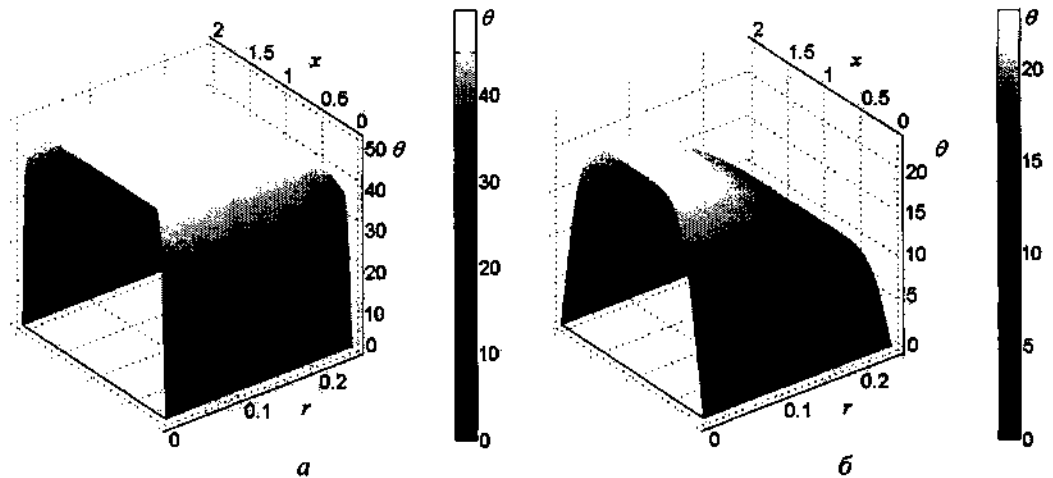
$$\theta(x, r, t) = \frac{4\theta_0}{\pi R} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n} (1 - \cos(n\pi)) \sin \frac{n\pi x}{l} \cdot \frac{\mu_k J_0(\mu_k r) J_1(\mu_k R)}{(\alpha^2 + \mu_k^2) J_0^2(\mu_k R)} \times \exp \left(- \left[\left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 + \alpha^2 \mu_k^2 \right] t \right) \quad (16)$$

Температурные поля цилиндра, рассчитанные по формуле (16), при $\alpha = 10 \text{ м}^{-1}$ в различные моменты времени t представлены на рис. 2.

Для проверки на рис. 3 построены температурные поля цилиндра в математическом пакете Comsol Femlab 3.1 с использованием исходного уравнения (1) и граничных условий (12).



Р и с. 2. Температурное поле цилиндра, рассчитанное по формуле (16):
а – при $t=60$ с, б – при $t=1800$ с



Р и с. 3. Температурное поле цилиндра, рассчитанное методом КЭ в пакете Femlab 3.1:
а – при $t=60$ с, б – при $t=1800$ с

Как и в первом случае, решения, представленные на рис. 2 а и 3 а, 2 б и 3 б, совпадают, что подтверждает верность полученного решения (16).

Таким образом, в данной работе получены точные решения в аналитической форме для двумерной задачи теплопроводности путем перемножения известных функций Грина одномерных задач и последующего интегрирования их произведения. Совпадение аналитических решений с решениями, полученными численными методами в компьютерных пакетах, доказывает верность полученных аналитических решений.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Карслоу Г., Езер Д. Теплопроводность твердых тел. – М.: Наука, 1964. – 487 с.
2. Рапопорт Э.Я. Структурное моделирование объектов и систем управления с распределенными параметрами. – М.: Высшая школа, 2003. – 299 с.
3. Бутковский А.Г. Характеристики систем с распределенными параметрами. – М.: Наука, 1977. – 224 с.

Статья поступила в редакцию 16 октября 2009 г.

UDC 517.925.7

SOLUTION OF MULTIDIMENSIONAL HEAT CONDUCTIVITY PROBLEMS OF FINITE-LENGTH CYLINDER AS A COMPOSITION OF SOLUTIONS OF ONE-DIMENSIONAL PROBLEMS

E.G. Ulchenko

Samara State Technical University,
2446 Molodogvardeyskaya str., Samara, 443100

Analytical method of heat conductivity of finite-length cylinder two-dimensional problems solution searching as a composition of one-dimensional problems solutions of infinite plate and infinite-length cylinder is considered in the article.

Key words: heat conduction equation, infinite plate, infinite-length cylinder, standardizing function, Green's function, thermal field.