

Системный анализ, управление и автоматизация

УДК 681.518.3

ИССЛЕДОВАНИЕ АППРОКСИМАЦИОННЫХ АЛГОРИТМОВ РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ТЕХНИЧЕСКОЙ ДИАГНОСТИКИ

В.И. Батищев, И.И. Волков, А.Г. Золин

Самарский государственный технический университет
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244

E-mail: zolin.a@gmail.com

Рассматриваются алгоритмы решения обратных задач технической диагностики, полученные с применением аппроксимационного подхода. Исследуются аппроксимационные свойства ортогонального базиса на основе дробно-рациональных функций. Приведены результаты исследования численных реализаций алгоритмов оценки распределения размеров частиц в двухфазных дисперсных потоках с использованием критерия моментов.

Ключевые слова: аппроксимация, ортогональные полиномы, автокорреляционная функция, обратные некорректно поставленные задачи.

Получение информации в рабочих режимах функционирования оборудования для оперативного технического контроля и промышленной диагностики порождает проблемы, обусловленные случайным характером диагностируемых процессов, некорректностью задач нахождения неизвестных характеристик по косвенным измерениям и необходимостью получения результатов обработки данных в минимальные сроки. Повышение быстродействия за счет увеличения производительности вычислительных средств ведет к прогрессирующему удорожанию средств диагностики.

Решению таких проблем способствует применение аппроксимационного подхода, позволяющего использовать априорную информацию в форме аналитических моделей исследуемых зависимостей. В случае, когда аналитическая форма искомого решения известна или решение с высокой степенью достоверности может быть аппроксимировано моделью, построенной либо на основе априорных сведений, либо путём обобщения результатов измерений числовых и функциональных характеристик объекта диагностирования и протекающих в нём процессов, размерность задачи может быть существенно уменьшена. Как правило, соответствующая система уравнений для нахождения небольшого числа неизвестных параметров оказывается хорошо обусловленной. Важным преимуществом этого подхода является то, что практически никогда нельзя получить абсурдное решение, если аналитическая модель выбрана в соответствии с исследуемым процессом.

В зависимости от типа диагностируемых объектов, характера протекающих в

Виталий Иванович Батищев – д.т.н., профессор.

Игорь Иванович Волков – к.т.н., доцент.

Алексей Георгиевич Золин – к.т.н., доцент.

них процессов и способа организации диагностических процедур известны два вида математической постановки задачи диагностики [1].

Первая характерна для задач тестовой диагностики, когда на объект подается специально сформированное воздействие, а отклики объекта в заданных контрольных точках позволяют делать заключение о его техническом состоянии. Такая зависимость описывается интегральным уравнением Фредгольма I рода, решение которого представляет собой некорректно поставленную обратную задачу. В случае, когда есть основания для априорного выбора аналитической модели искомой функциональной характеристики, можно применить аппроксимационный метод, используя модели заданного вида либо ортогональные функции или полиномы.

В случае диагностики оборудования в режимах его нормального функционирования исследуемые сигналы, как правило, имеют случайный характер. В этом случае используют уравнение Винера – Хопфа, общее решение которого аппроксимационным методом с использованием критерия среднеквадратического приближения описано в [1]. Импульсная переходная функция (ИПФ) и взаимная корреляционная функция (ВКФ) представляются моделями, построенными на основе ортогональных функций и полиномов. Получившуюся систему линейных уравнений решают относительно коэффициентов ИПФ. При таком подходе важную роль играет выбор ортогонального базиса, на основе которого строятся модели.

Из теории известно, что спектральная плотность физически осуществимых процессов представляет собой дробно-рациональную функцию. В работе [2] предложен метод формирования ортогональных базисных систем для создания аппроксимационных моделей, спектральная плотность которых будет соответствовать спектральной плотности физически осуществимых процессов на основе семейства дробно-рациональных функций (1).

Путем фиксации параметров N , A и λ можно получить ортогональные полиномы во временной области, Фурье-преобразования которых будут также дробно-рациональными функциями:

$$\phi_{k,N}(j\omega) = \frac{\sum_{v=0}^{N-1} A_v (j\omega)^v}{\sum_{v=0}^N \lambda_{v,k} (j\omega)^v} \prod_{q=0}^{k-1} \frac{\sum_{v=0}^N (-1)^v \lambda_{v,q} (j\omega)^v}{\sum_{v=0}^N \lambda_{v,q} (j\omega)^v}. \quad (1)$$

В случае $N = 2$ соотношение (1) принимает вид:

$$\phi_{k,2}(j\omega) = \left. \frac{A_0 + A_1 j\omega}{\lambda_{0,k} + \lambda_{1,k} j\omega - \omega^2} \prod_{q=0}^{k-1} \frac{\lambda_{0,q} - \lambda_{1,q} j\omega - \omega^2}{\lambda_{0,q} + \lambda_{1,q} j\omega - \omega^2} \right\}. \quad (2)$$

Данный класс дробно-рациональных соотношений порождает большое множество базисных систем $\{\varphi_{k,2}(\tau)\}$, получаемое соответствующим выбором параметров $A_0, A_1, \lambda_{0,q}, \lambda_{1,q}$. При $A_0 = \alpha_1(1 + \alpha_3)$, $A_1 = 1$, $\lambda_{0,q} = \alpha_1^2 + \alpha_2^2$, $\lambda_{1,q} = 2\alpha_1$ получаются ортогонализированные экспоненциальные функции, соответствующие обобщенному виду АКФ реально осуществимых процессов.

$$\phi_{k,2}(j\omega) = \frac{j\omega + \alpha_1(1 + \alpha_3)}{(j\omega + \alpha_1)^2 + \alpha_2^2} \left[\frac{(j\omega - \alpha_1)^2 + \alpha_2^2}{(j\omega + \alpha_1)^2 + \alpha_2^2} \right]^k. \quad (3)$$

Для соответствующих им во временной области функций $\varphi_{k,2}(\tau)$ можно записать рекуррентные соотношения

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{0,2}(\tau) &= e^{-\alpha_1 \tau} \left(\cos \alpha_2 \tau + \alpha_3 \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \sin \alpha_2 \tau \right), \\ \varphi_{k+1,2}(\tau) &= \varphi_k(\tau) - \int_0^\tau \varphi_k(u) w(\tau - u) du, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где

$$w(\tau) = 4\alpha_1 e^{-\alpha_1 \tau} \left(\cos \alpha_2 \tau - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \sin \alpha_2 \tau \right),$$

$$\|\varphi_{k,2}(\tau)\|^2 = \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_1^2(1+c)^2}{4\alpha_1(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)}.$$

Алгоритмы параметрической оптимизации данного базиса приведены в [2].

Для исследования аппроксимационных свойств было проведено построение моделей АКФ и ИПФ с использованием ортогональных функций Лагерра и полиномов (4). Порядок модели увеличивался до тех пор, пока относительная среднеквадратическая погрешность (ОСП) аппроксимации не становилась меньше 5%. ОСП рассчитывалась по формуле

$$\Delta = \int_0^\infty (f - f_M)^2 / \int_0^\infty f^2, \quad (5)$$

где f – значение аппроксимируемой функции, f_M – значение модели.

Порядок моделей и ОСП наиболее часто встречающихся на практике АКФ, полученных с использованием полиномов Лагерра (L_k) и полиномов (4) (φ_k), представлены в табл. 1.

Таблица 1

Аппроксимация АКФ

№	Автокорреляционная функция	α_1 / α_2	Порядок модели		Погрешность	
			L_k	φ_k	L_k	φ_k
1	$e^{-\alpha \tau }$	–	3	0	0.0390547	0.000000
2	$e^{-\alpha \tau }(1 + \alpha \tau)$	–	6	1	0.0272484	0.000002
3	$e^{-\alpha \tau }(1 - \alpha \tau)$	–	7	1	0.0374476	0.000001
4	$e^{-\alpha \tau }(1 + \alpha \tau + \alpha^2\tau^2/3)$	–	2	1	0.0312578	0.000004
5	$e^{-\alpha_1 \tau } \cos(\alpha_2\tau)$	1	3	0	0.0308504	0.000000
		2	6	0	0.0301112	0.000000
		3	7	0	0.0452567	0.000000
		4	9	0	0.0428375	0.000000
		5	11	0	0.0427132	0.000000
6	$e^{-\alpha_1 \tau }(\cos(\alpha_2\tau) + \alpha_1/\alpha_2 \sin(\alpha_2\tau))$	1	2	0	0.0298755	0.000000
		2	4	0	0.0280648	0.000000
		3	4	0	0.0413209	0.000000
		4	5	0	0.0385181	0.000000
		5	6	0	0.0383327	0.000000

№	Автокорреляционная функция	α_1 / α_2	Порядок модели		Погрешность	
			L_k	φ_k	L_k	φ_k
7	$e^{-\alpha_1 \tau }(\cos(\alpha_2\tau) - \alpha_1/\alpha_2 \sin(\alpha_2\tau))$	1	5	0	0.0277098	0.000000
		2	10	0	0.0309058	0.000000
		3	14	0	0.0427962	0.000000
		4	15	0	0.0437651	0.000000
		5	16	0	0.0467318	0.000000
8	$e^{-\alpha_1 \tau }(\cos(\alpha_2\tau) + C \sin(\alpha_2\tau))$, где C - константа	1	2	0	0.0298755	0.000000
		2	4	0	0.041191	0.000000
		3	4	0	0.0445553	0.000000
		4	5	0	0.0437583	0.000000
		5	6	0	0.0444327	0.000000

Ввиду того, что полиномы нулевого порядка, построенные на основе базиса (4) при соответствующих коэффициентах $A_0, A_1, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, совпадают по виду с большинством рассмотренных здесь АКФ, погрешность аппроксимации равна нулю при нулевом порядке модели, общая погрешность оценивания АКФ будет определяться только статистической погрешностью оценок параметров.

Порядок моделей и ОСП наиболее часто встречающихся на практике ИПФ, полученных с использованием полиномов Лагерра (L_k) и полиномов (4) (φ_k), представлены в табл. 2.

Таблица 2

Аппроксимация ИПФ

№	Импульсная переходная функция	Порядок модели		Погрешность	
		L_k	φ_k	L_k	φ_k
1	$w(t) = K / T e^{-t/T}$	3	0	0.0390547	0.0001
2	$w(t) = C e^{-\lambda t} \sin(\lambda t)$	5	0	0.0487649	0.0000
3	$w(t) = K(1 - e^{-t/T})$	24	0	0.0321653	0.0000
4	$w(t) = C(e^{-t/T_1} - e^{-t/T_2})$	2	0	0.0420977	0.0000
5	$w(t) = K(C_1 e^{-t/T_1} + C_2 e^{-t/T_2})$	1	0	0.0243066	0.0000
6	$w(t) = K(1 + C_1 e^{-t/T_1} + C_2 e^{-t/T_2})$	24	1	0.0312157	0.0000
7	$w(t) = KT(e^{-t/T} - 1) + Kt$	26	1	0.028367	0.0000
8	$w(t) = K(1 + C e^{-(\varepsilon/T)t} \sin(\lambda t + \theta))$	24	1	0.0316	0.0001

Из полученных результатов видно, что при аппроксимации АКФ и ИПФ использование данного базиса имеет явное преимущество по сравнению с ортогональными функциями Лагерра.

Таким образом, использование базиса (4) при решении обратных задач промышленной диагностики в стохастической постановке позволяет существенно снизить размерность системы уравнений, что приводит к получению простых в реализации и устойчивых результатов.

В постановке задачи диагностики в случае детерминированных процессов возможен аппроксимационный метод решения с использованием параметрических моделей заданного вида.

В настоящее время в различных областях, таких как аналитическая химия, рентгеновская дифрактометрия, γ -спектроскопия, ультразвуковая дефектоскопия и других, известно большое количество работ, посвященных обоснованию аналитических математических моделей, свойственных и адекватных различным объектам, процессам и ситуациям.

Использование этих методов в производстве, т.е. в условиях устоявшихся технологических процессов, в рамках узкоспециализированных задач, с ограниченным диапазоном вариации параметров, позволяет накапливать экспериментальную информацию об исследуемых процессах и явлениях. Данная информация может быть использована как априорная при решении обратных задач диагностики.

Практическая реализация метода решения обратных задач технической диагностики, основанного на среднеквадратической аппроксимации экспериментальных зависимостей и искомых решений, может оказаться чрезвычайно затруднительной при использовании моделей с нелинейно входящими в них параметрами. В случае использования параметрических моделей заданного вида целесообразно разрабатывать и применять подходы, позволяющие получать простые и статистически устойчивые решения.

Такие решения могут быть получены при использовании обобщенного критерия моментов. Рассмотрим задачу оценки распределения диаметров частиц в двухфазном дисперсном потоке [3, 4].

Непосредственно измерению подлежат значения функции скорости счета $f(s)$, связанной с искомой плотностью распределения $u(\theta)$ диаметров θ капель интегральным уравнением Фредгольма I рода:

$$\int_s^{\infty} K(s, \theta) u(\theta) d\theta = f(s). \quad (6)$$

Ядро уравнения $K(s, \theta)$ в случае анализа распределения размеров капель электропроводящей жидкости в газожидкостном потоке, основанном на подсчете количества капель с диаметром, большим определенного числа, в некоторой области потока за единицу времени, вычисляется по формуле:

$$K(s, \theta) = \frac{P}{2Fc} \theta^2 \left[\arccos \frac{s}{\theta} - \frac{s}{\theta} \sqrt{1 - \left(\frac{s}{\theta}\right)^2} \right], \quad (7)$$

где Fc – площадь сечения сопла в месте измерения, P – общее число капель, проходящих в единицу времени в сечении Fc , s – параметр измерительного преобразователя, обеспечивающий формирование импульса при $\theta \geq s$.

Для данной задачи известны четыре модели распределения диаметров частиц в двухфазных дисперсных потоках:

$$u_{M_1}(\theta, \alpha) = (\theta / \alpha^2) \exp(-\theta / \alpha); \quad (8)$$

$$u_{M_2}(\theta, \alpha, \beta) = (\alpha^{\beta-1} / (\beta - 2)!) \theta^\beta \exp(-\alpha / \theta); \quad (9)$$

$$u_{M_3}(\theta, \alpha, \beta) = (\theta^\beta / \beta! \alpha^{\beta+1}) \exp(-\theta / \alpha); \quad (10)$$

$$u_{M_4}(\theta, \alpha, \beta) = (\theta^{2\beta+1} / \beta! 2^{\beta+1} \alpha^{2\beta+2}) \exp(-\theta^2 / 2\alpha^2). \quad (11)$$

После составления уравнения моментов получим систему из $(m+1)$ уравнений:

$$\mu^{(q)} = A_q(p) \mu_M^{(q+3)}(\alpha_1, \dots, \alpha_m), \quad q = 0, 1, \dots, m, \quad (12)$$

где

$$\mu_M^{(q+3)}(\bar{\alpha}) = \int_0^{\infty} \theta^{q+3} u_M(\theta, \bar{\alpha}) d\theta$$

– начальный момент порядка $(q+3)$ случайной величины θ с распределением $u_M(\theta, \alpha)$,

$$A_q = \left\{ \begin{array}{l} \frac{p}{F_c} (N+1)!(N+1)2^{2N+2}, \text{ при } q = 2N \\ \frac{p}{F_c} \frac{\pi C_{2n+4}^{N+2}}{2^{2N+5} (2N+2)(2N+3)}, \text{ при } q = 2N+1 \end{array} \right\}. \quad (13)$$

Система должна быть решена относительно $\alpha_l, \dots, \alpha_m$ и p .

Тогда при использовании модели (8) система будет содержать два уравнения для моментов порядка 0 и 1. Учитывая дискретный характер функций скорости счета $f(s)$ и ограниченный диапазон изменения размеров частиц $\theta_{min} \leq \theta \leq \theta_{max}$, получим алгоритм оценки значения параметра α .

$$\alpha^* = (32/15\pi) \sum_{i=1}^n s_i f(s_i) \sum_{i=1}^n f(s_i). \quad (14)$$

Для модели (9) система будет содержать три уравнения. Решая ее, получим следующий алгоритм оценивания параметров α и β :

$$\left. \begin{array}{l} \lambda^* = \frac{2048}{135\pi^2} \frac{\left(\sum_{i=1}^n s_i f(s_i) \right)^2}{\sum_{i=1}^n f(s_i) \sum_{i=1}^n s_i^2 f(s_i)}, \beta^* = \left[6 + \frac{\lambda^*}{1 - \lambda^*} \right], \\ \alpha^* = \frac{32(\beta^* - 5) \sum_{i=1}^n s_i f(s_i)}{3\pi \sum_{i=1}^n f(s_i)} = \frac{45\pi(\beta^* - 6) \sum_{i=1}^n s_i^2 f(s_i)}{64 \sum_{i=1}^n s_i f(s_i)}. \end{array} \right\} \quad (15)$$

Для модели (10) алгоритмы вычисления оценок параметров α и β будут иметь следующий вид:

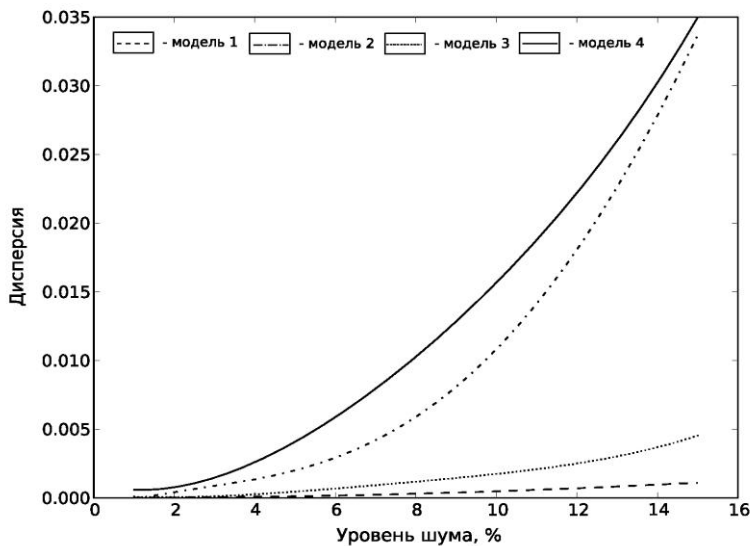
$$\left. \begin{array}{l} \lambda^* = \frac{2048}{135\pi^2} \frac{\left(\sum_{i=1}^n s_i f(s_i) \right)^2}{\sum_{i=1}^n f(s_i) \sum_{i=1}^n s_i^2 f(s_i)}, \beta^* = \left[\frac{\lambda^*}{1 - \lambda^*} - 4 \right], \\ \alpha^* = \frac{32 \sum_{i=1}^n s_i f(s_i)}{3\pi(\beta^* + 4) \sum_{i=1}^n f(s_i)} = \frac{45\pi \sum_{i=1}^n s_i^2 f(s_i)}{64(\beta^* + 5) \sum_{i=1}^n s_i f(s_i)}. \end{array} \right\} \quad (16)$$

Наконец, для модели (11) получим систему:

$$\left. \begin{aligned} \frac{2048}{135\pi^2} \frac{\left(\sum_{i=1}^n s_i f(s_i)\right)^2}{\sum_{i=1}^n f(s_i) \sum_{i=1}^n s_i^2 f(s_i)} = \psi(\beta^*), \text{ где } \psi(\beta) = \frac{2^{4\beta+10} [(\beta+2)!]^3 (\beta+3)!}{\pi(2\beta+4)!(2\beta+6)!}, \\ \alpha^* = \frac{32\sqrt{2\pi}(2\beta+4)! \sum_{i=1}^n s_i f(s_i)}{3\pi 2^{2\beta+5} [(\beta+2)!]^2 \sum_{i=1}^n f(s_i)}. \end{aligned} \right\} (17)$$

Поскольку оценка параметра β не может быть получена в явном виде и должна принимать только целочисленные значения, для решения первого уравнения в системе (17) может быть предложена следующая процедура. Функции $\psi(\beta^*)$ могут быть вычислены рекуррентно:

$$\psi(0) = \frac{128}{45\pi}, \psi(\beta+1) = \frac{(2\beta+6)^2}{(2\beta+5)(2\beta+7)} \psi(\beta). \quad (18)$$



Зависимость дисперсии от уровня шума

Исследование представленных алгоритмов проводилось путем имитационного моделирования. Для каждой модели была получена «точная» правая часть. Затем с помощью генератора случайных чисел к значениям правой части добавлялся шум, имеющий нормальный закон распределения и нулевое математическое ожидание. Значение шума выбиралось таким образом, чтобы значение математического ожидания его амплитуды составляло 1-15% значения математического ожидания правой части уравнения.

В результате эксперимента по алгоритмам (14)-(18) были получены значения параметров моделей. По полученным параметрам строилась модель решения и вычислялась дисперсия.

Для каждой модели с каждым уровнем шума проводилось по 500 экспериментов. Таким образом, были получены данные ансамбля из 500 реализаций по каждому

эксперименту. Для анализа результатов было проведено усреднение по ансамблю реализаций. Полученные зависимости дисперсии от амплитуды шума представлены на рисунке. Лучшие результаты получились при использовании модели (8); дисперсия полученных результатов также самая низкая из всех моделей. Вычисления с моделью (9) показали, что определение параметров модели сильнее зависит от уровня помех. Разброс значений полученных данных превышает аналогичный показатель у моделей (8) и (10) (см. рисунок), что говорит о большей неустойчивости решения.

Модель (8) является частным случаем (10) при $\beta=1$. Наличие дополнительного параметра в модели (10) ухудшает качество решения: относительная погрешность результата находится в районе 15-16%, однако при увеличении уровня помех значительно не возрастает. Дисперсия полученных результатов также достаточно низкая.

Модель (11) в ходе экспериментов показала наихудший результат, что объясняется сложностью самой модели. Однако при уровне помех до 5% погрешность результатов меньше, чем у модели (10). Вычисления с моделью (11) имеют самую большую дисперсию, существенно превышающую дисперсию результатов с использованием моделей (8) и (9).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Батищев В.И., Мелентьев В.С.* Аппроксимационные методы и системы промышленных измерений, контроля, испытаний, диагностики. – М.: Машиностроение, 2007. – 393 с.
2. *Батищев В.И., Волков И.И., Золин А.Г.* Построение и оптимизация ортогональных базисных систем для аппроксимации спектрально-корреляционного анализа и идентификации линейных динамических объектов // Вестник Самар. гос. техн. ун-та. – Сер. Технические науки. – 2007. – №40. – С.47-52.
3. *Батищев В.И., Волков И.И., Панфилов Г.А.* Аппроксимативный метод экспериментальной оценки характеристик распределения размеров капель в газожидкостных потоках / Куйбышев. политехн. ин-т, Куйбышев, 1981. – 4 с. – Деп. в ВИНТИ. 09.11.81, №1700-В81.
4. *Батищев В.И., Волков И.И., Панфилов Г.А.* Оценка параметров модели плотности распределения частиц по размерам на основе критерия моментов / Куйбышев. политехн. ин-т, Куйбышев, 1981. – 6 с. – Деп. в ВИНТИ. 09.11.81, №1702-В81.

Статья поступила в редакцию 15 июля 2010 г.

UDC 681.518.3

RESEARCH OF THE APPROXIMATION ALGORITHMS THE INVERSE PROBLEMS OF THE TECHNICAL DIAGNOSTICS SOLVING

V.I. Batishchev, I.I. Volkov, A.G. Zolin

Samara State Technical University
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100

We consider algorithms for the inverse problems of the technical diagnostics solving, obtained by using an approximation approach. We research the approximation properties of an orthogonal basis on the basis of the rational functions. The findings of investigation of numerical implementations of the estimation algorithms of particle size allocation in biphasic mist flows using the moment criterion are given.

Keywords: *approximation, orthogonal polynomials, the autocorrelation function, inverse ill-posed problem.*

*Vitaly I. Batishchev – Doctor of Technical Sciences, Professor.
Igor I. Volkov – Candidate of Technical Sciences, Associate professor.
Aleksey G. Zolin – Candidate of Technical Sciences, Associate professor.*