УДК 681.5.015

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ ПРОЦЕССОВ УПРАВЛЕНИЯ ПРОИЗВОДСТВЕННЫМИ СИСТЕМАМИ*

А.Н. Дилигенская

Самарский государственный технический университет
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244
E-mail: adiligenskaya@mail.ru

Решается модельная задача анализа качества управляемых производственных систем, находящихся в среде производственно-экономических взаимоотношений с другими системами и с внешней окружающей средой.

Ключевые слова: *производственно-экономические системы, макроэкономическая математическая модель, пропорциональное регулирование, параметрический анализ, оценки качества процессов управления.*

Динамика производственных и производственно-экономических систем является объективной тенденцией развития и выражается в росте объемов производства, а также потребления материальных и финансовых ресурсов. Вместе с тем фактическое поведение протекающих производственных процессов зачастую существенно отличается от желаемого, запланированного, что обуславливает актуальность проблемы управления производственными системами. Цикличность и волнообразность производственных и экономических процессов, порождаемые неравновесным изменением макроэкономических показателей, выражаются в колебаниях разнообразной природы, различающихся по длительности, характеру проявления и вызывающим их причинам. Наиболее адекватно изучение поведения производственно-экономических систем, позволяющее выявить нежелательные режимы функционирования и выработать оптимальную стратегию управления, производится с использованием моделей макроэкономической динамики с позиции теории нелинейных систем.

В статье поведение производственно-экономических систем изучается на основе модификации нелинейной обобщенной макроэкономической модели Солоу [1]. В этом случае модель динамики системы создается на основе описания соотношения производства и потребления продукции, баланса материальных и финансовых потоков, и в дискретной форме имеет вид разностного уравнения относительно некоторого обобщенного ресурса x:

$$x_{n+1} = f(b, \alpha, a, I, x_n) = bx_n^{\alpha} - ax_n + I, \quad n = 1,2... \qquad (1)$$

Здесь $f(\bullet)$ – функция последования, характеризующая закон изменения состояний системы; b и α – параметры, характеризующие эффективность технологии; a – коэффициент расходования ресурса; I – внешние инвестиции; n – дискретное время.

Таким образом, уравнение (1) описывает динамику обобщенной системы при взаимодействии внешнего воздействия и внутренних механизмов самоорганизации,

---

* Работа выполнена при поддержке АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы (2009-2010 годы)», проект 2.1.2/4236.

Анна Николаевна Дилигенская – к.т.н., доцент.

и его правая часть состоит из комбинации трех слагаемых, первое из которых определяет саморазвитие системы, второе соответствует процессу саморегулирования, обеспечивающему устойчивость функционирования системы, и третье – механизму целенаправления.

Параметры b, α и I связаны прямой зависимостью с выходной величиной системы x, параметр a – обратной. С учетом противоречивого влияния параметров модели на выходную величину процессы функционирования системы могут иметь качественно различные варианты развития в зависимости от сочетания параметров модели.

Будем рассматривать устойчивую систему, характеризующуюся параметрами b, α, a, I, расположенными внутри области существования устойчивых равновесных состояний.

Постановка и решение прикладных задач управления производственными процессами требуют достижения заданных значений $x_{зад}$ состояния системы, для чего в модель должно быть введено управляющее воздействие $u = k(x_{зад} - x)$, корректирующее поведение системы с помощью сигнала ошибки текущего положения системы x относительно заданного $x_{зад}$. В этом случае модель системы с учетом управления примет следующий вид:

$$x_{n+1} = bx_n^{\alpha} - ax_n + k(x_{зад} - x_n) + I, \quad n = 1,2\ldots, \tag{2}$$

или, после преобразований,

$$x_{n+1} = bx_n^{\alpha} - (a+k)x_n + I + kx_{зад}, \quad n = 1,2\ldots. \tag{3}$$

Структурную схему, соответствующую модели системы (3), можно представить в следующей форме (рис. 1).

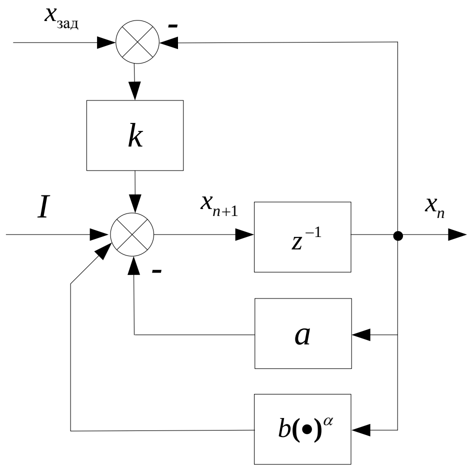


Рис. 1. Структурная схема дискретной модели динамики обобщенной производственной системы при учете управляющего воздействия: z^{-1} – оператор временного сдвига

При отсутствии управления $u = k(x_{зад} - x) = 0$ поведение системы характеризуется уравнением (1) и временная траектория (рис. 2) с течением времени $n \to \infty$ выходит не на заданное значение $x_{зад}$, а на некоторое установившееся значение $x_{уст}$, определяемое из решения стационарной задачи при $x_{n+1} = x_n$. В общем случае (при $x_{уст} \neq x_{зад}$) в системе присутствует неустранимая статическая ошибка $\varepsilon = x_{зад} - x_{уст}$.

На рис. 2 приведен переходный процесс в системе для конкретных значений параметров модели (3) α, a, b и начального условия x(1). Из рисунка видно, что для принятых значений переходная функция соответствует апериодическому процессу с выходом на установившееся значение, равное $x_{уст} = 60$.

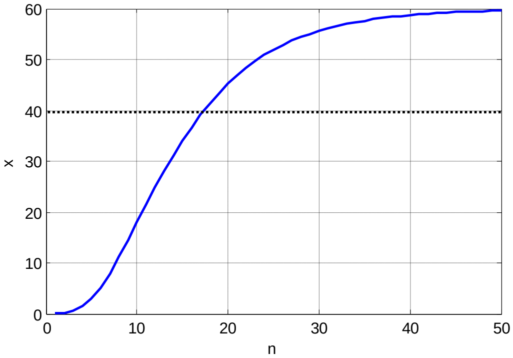
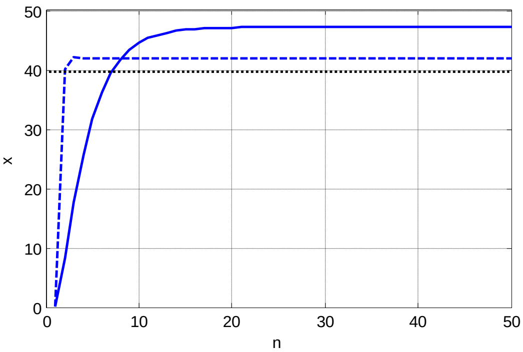


Рис. 2. Неуправляемый переходный процесс



———— k= 0.2; — — - k= 1;

Рис. 3. Устойчивые апериодические временные траектории системы

Сформулируем задачу достижения требуемого производственно-экономического потенциала системы $x\big|_{n\to\infty} = x_{зад}$ при нахождении ограничений на динамическое отклонение производственных траекторий Δ:

$$\left| x_n - x_{зад} \right| < \Delta, \ n > n_{баз}, \tag{4}$$

где $n_{баз}$ – время протекания базового периода управления до вхождения траектории x_n в зону допустимых значений $x_{зад} - x_{n_{баз}} = \Delta$.

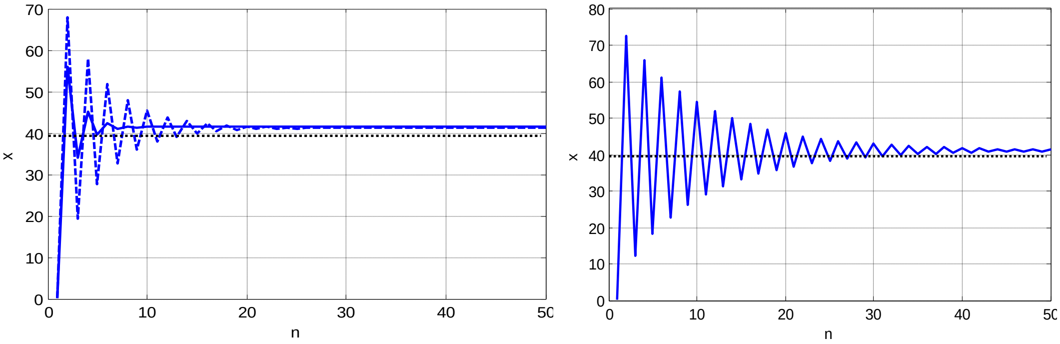
Поставим задачу достижения заданного значения $x_{зад} = 40$ и проанализируем процессы регулирования для различных коэффициентов усиления регулятора *k*. Анализ показывает, что при учете в системе контура обратной связи, задающего с помощью коэффициента *k* интенсивность подачи управляющего воздействия, происходит качественное изменение временных траекторий системы. Вначале при возрастании коэффициента *k* на некотором интервале значений $k \in (0;\ \ k_1)$ переходные процессы составляют множество устойчивых апериодических траекторий и происходит уменьшение статической ошибки $\varepsilon = x_{зад} - x_{уст}$ за счет приближения установившегося значения координаты *x* к заданному значению, при этом происходит уменьшение времени переходного процесса.

На рис. 3 приведены переходные процессы при *k=0.2* и *k=1*. Видно уменьшение статических ошибок до 15% и 2% соответственно. Время переходного периода уменьшается до 35% и 8% соответственно.

При дальнейшем увеличении коэффициента $k \in (k_1; k_2)$ временные траектории обобщенного показателя приобретают колебательные свойства, асимптотически стремясь к состоянию устойчивого равновесия, при этом время переходного процесса начинает увеличиваться. Границей раздела $k = k_1$ двух качественно различных классов устойчивых фазовых портретов является гиперповерхность [2]

$$\left.\frac{\partial f(b,\alpha,a,I,k,x)}{\partial x}\right|_{x=x^*} = 0, \qquad (5)$$

где x^* – величина обобщенного показателя в равновесном состоянии.



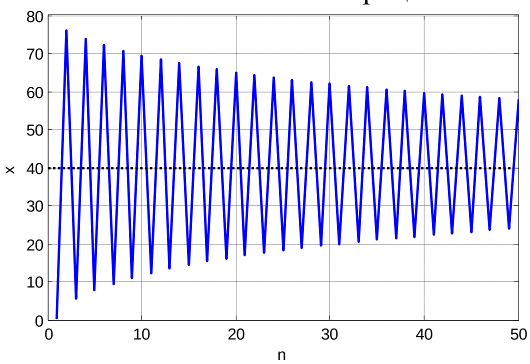
а б

———— k= 1.4; — — - k= 1.7; *k=1.8*

Рис. 4. Колебательные временные траектории системы

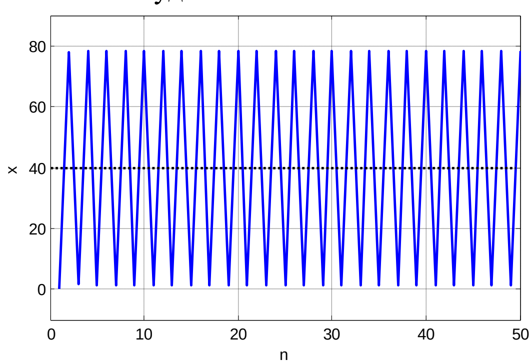
На рис. 4 приведены переходные процессы для следующих значений коэффициента регулирования: *k=1.4; 1.7; k=1.8*. Этим значениям соответствуют сходящиеся колебательные процессы. Видно, что при увеличении k на интервале колебательных свойств объекта уменьшается статическая ошибка регулирования, но при этом возрастают динамические ошибки и перерегулирование колебательных процессов и увеличивается продолжительность времени регулирования. При таких значениях k начинает проявляться высокая чувствительность процессов управления к изменению коэффициента регулирования.

При дальнейшем увеличении коэффициента k происходит резкое затягивание процесса регулирования (рис. 5) и постепенный переход в режим автоколебаний (рис. 6). При *k=1.95* сходимость процесса регулирования отсутствует, в системе протекают автоколебательные процессы с большой амплитудой колебаний.



k=1.9

Рис. 5. Переход к автоколебаниям



k=1.95

Рис. 6. Автоколебательный процесс

При дальнейшем увеличении k происходит потеря устойчивости, и в системе возникают ограниченные непериодические процессы со стохастической динамикой, означающие нарушение целостности и взаимосвязей в системе (рис. 7). Поведение системы становится непрогнозируемым.

Область существования устойчивых равновесных процессов может быть определена на основании неравенства [2]

$$-1 < \left. \frac{\partial f(b,\alpha,a,I,k,x)}{\partial x} \right|_{x=x^*} < 1, \qquad (6)$$

и выход за левую или правую границы данной области означает потерю целостности в системе и переход к неустойчивым неравновесным состояниям.

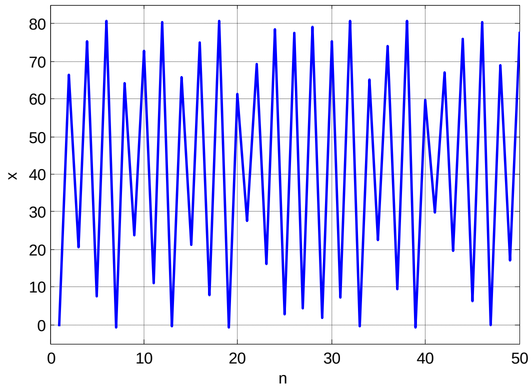


Рис. 7. Стохастический процесс

Таким образом, задача пропорционального регулирования нелинейными производственно-экономическими системами имеет многообразие существенно различных вариантов поведения системы, многофакторно зависящих как от внутренних макроэкономических и производственных показателей, так и от внешних воздействий. Функциональный анализ качества динамических траекторий позволяет выявить общесистемные закономерности и особенности протекания переходных процессов, построить область существования устойчивых равновесных фазовых траекторий, предсказать переход от равновесных к неравновесным режимам функционирования системы.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Аллен Р.* Математическая экономия. – М.: Изд-во иностранной литературы, 1963. – 667 с.
2. *Баутин Н.Н., Леонтович Е.А.* Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. – М.: Наука, 1976. – 496 с.

Статья поступила в редакцию 22 июня 2010 г.

UDC 681.5.015

MATHEMATICAL MODELING AND ANALYSIS OF THE CONTROL PROCESSES OF PRODUCTION SYSTEMS

A.N. Diligenskaya

Samara State Technical University
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100

The model problem of analysis of quality of managed production systems, surrounded of production and economic relations with other systems and the external environment is solved.

***Keywords**: production and economic systems, macroeconomic mathematical model, proportional control, parametric analysis, assessing the quality control processes.*

Anna N. Diligenskaya – Candidate of Technical Sciences, Associate professor.