УДК 681.3

ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКАЯ ПРОЦЕДУРА ОПТИМАЛЬНОГО СИНТЕЗА ГИБРИДНЫХ СИСТЕМ*

Г.Н. Рогачев, В.А. Егоров

Самарский государственный технический университет
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244
E-mail: grogachev@mail.ru

Статья посвящена способу решения задачи оптимального синтеза гибридных систем управления, содержащих непрерывный объект управления и дискретный по времени регулятор. Рассмотрен численно-аналитический алгоритм оптимального синтеза гибридных систем, включающий численную процедуру поиска оптимальных параметров регулятора и моментов его срабатывания и базирующуюся на достаточных условиях оптимальности аналитическую процедуру поиска оптимального позиционного закона управления с полной обратной связью. Приводится пример возможного использования численно-аналитической процедуры для решения задачи оптимального синтеза гибридной системы.

Ключевые слова*: оптимальный синтез, гибридная система, закон управления с полной обратной связью.*

В современных условиях, когда большинство систем управления техническими средствами строится на базе компьютерной техники, приоритетным направлением теории управления является исследование гибридных систем. В таких системах непрерывно изменяющиеся компоненты отражают физические законы, технологические или технические принципы, а дискретно меняющиеся моделируют работу устройств управления. Важнейшим этапом проектирования таких гибридных систем является разработка цифровых законов управления непрерывными объектами. Известно несколько подходов к решению этой задачи [1, 2]:

– переоборудование регулятора – синтез непрерывного регулятора и последующая его замена (аппроксимация) дискретной моделью;
– дискретизация объекта – построение дискретной модели непрерывного объекта и последующий синтез дискретного регулятора методами теории дискретных систем;
– прямой синтез цифрового регулятора для непрерывного объекта без каких-либо упрощений и аппроксимаций.

Первые два подхода являются приближенными и фактически означают замену одной задачи другой с целью применить известные результаты теории непрерывных или дискретных систем. В первом случае игнорируется наличие цифровой части (импульсного элемента, дискретного регулятора и экстраполятора). Однако дискретизация полученного аналогового регулятора иногда не позволяет добиться желаемого эффекта. При использовании второго подхода не учитывается поведение системы в промежутках между моментами квантования, что может дать принципи-

*Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ №09-08-00297-а, №10-08-00754-а; ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009-2013 годы» (проекты НК 66П/11, 2010-1.3.1-230-009/8); АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект №2.1.2/4236).

Геннадий Николаевич Рогачев – к.т.н., доцент.
Владимир Анатольевич Егоров – аспирант.

ально неверные результаты, например вследствие скрытых колебаний. Поскольку приближенные методы проектирования могут приводить к неработоспособным решениям, на современном этапе в теории систем управления основное внимание уделяется прямым методам анализа и синтеза [3, 4]. В качестве одной из основных при разработке прямых методов синтеза оптимальных цифровых регуляторов можно выделить проблему создания методов, применимых к широкому классу задач и обладающих вычислительной надежностью.

Для решения этой задачи в настоящей работе предлагается подход, основанный на совместном использовании методов численной оптимизации для поиска оптимальных параметров регулятора и моментов его срабатывания и базирующейся на достаточных условиях оптимальности аналитической процедуры поиска оптимального закона управления с полной обратной связью. Это позволяет рассмотреть ряд новых задач, а уже известные решать в рамках единого подхода.

Рассмотрим численно-аналитическую процедуру синтеза, оптимального по квадратичному критерию качества. Примем в качестве математической модели гибридной системы совокупность линейных дифференциальных и разностных уравнений. Динамическая часть гибридной системы, задающая движение объекта управления, описывается дифференциальными уравнениями, а логическая (автоматная) часть, моделирующая работу устройства управления, – рекуррентными включениями или уравнениями. Такая модель применима для описания широкого класса систем автоматического управления техническими комплексами и технологическими процессами. Изменение состояний дискретной части может происходить в заранее заданные (тактовые) или в произвольные моменты времени. Более того, выбор тактовых моментов может считаться ресурсом управления и подлежать оптимизации так же, как параметры регулятора и оптимальный закон управления.

Пусть поведение системы управления описывается совокупностью линейных дифференциальных и разностных уравнений:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + F(t)y(t_k), t_k \le t < t_{k+1},$$
$$y(t_{k+1}) = C_{k+1}y(t_k) + D_{k+1}v(t_{k+1}) + G_{k+1}x(t_{k+1}),\ k = 0,1,\ldots,N-1, \quad (1)$$

где x, y – векторы состояния непрерывной и дискретной частей системы соответственно, $x \in R^n, y \in R^m$; u, v – векторы управления непрерывной и дискретной частями соответственно; $u \in U \subseteq R^q, v \in V \subseteq R^s$, U и V – заданные множества допустимых значений управления; t – время, $t \in T = [t_0, t_N)$, T – промежуток времени функционирования системы, на котором выделены моменты $t_k, k = 0,1,\ldots N-1$, разбивающие множество T на непересекающиеся подинтервалы $T_k = [t_k, t_{k+1}), k = 0,1,\ldots N-1;$ $f(t,x,y,u): T \times R^n \times R^m \times U \to R^n$, $x(t_N) = x(t_N - 0)$. Входящие в (1) матрицы $A(t)$, $B(t)$, $F(t)$ имеют соответственно размер $(n \times n)$, $(n \times q)$, $(n \times m)$, их элементы непрерывны; $C_{k+1}, D_{k+1}, G_{k+1}$ — матрицы размера $(m \times q)$, $(m \times s)$, $(m \times n)$ соответственно; на управление ограничений не наложено, $u \in U = R^q$, $v \in V = R^s$. Начальное состояние системы (1) задано:

$$x(t_0) = x_0 \in R^n, y(t_0) = y_0 \in R^m. \quad (2)$$

Конечное состояние $(x(t_N), y(t_N))$ системы произвольно. Предполагается, что при управлении используется информация о текущем времени и о векторе состояния (*x,y*). Множество допустимых управлений с полной обратной связью U_n образуют функции $u(t,x,y): T \times R^n \times R^m \to U$ и $v(t,x,y):(t_1,...,t_N) \times R^n \times R^m \to V$, которые на траекториях системы (1) для различных начальных состояний (2) порождают допустимые процессы $d = (x^*(\cdot), y^*(\cdot), u^*(\cdot), v^*(\cdot)) \in D(t_0, x_0, y_0)$. На множестве $D(t_0, x_0, y_0)$ задан функционал качества управления:

$$I = \sum_{k=0}^{N-1} \{ \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left[\frac{1}{2} x^T(t) S(t) x(t) + \frac{1}{2} u^T(t) Q(t) u(t) + x^T(t) \Phi(t) y(t_k) \right] dt + \frac{1}{2} y^T(t_k) R_{k+1} y(t_k) +$$

$$+ \frac{1}{2} v^T(t_{k+1}) P_{k+1} v(t_{k+1}) + x^T(t_{k+1}) \Psi_{k+1} y(t_k) + \frac{1}{2} x^T(t_{k+1}) \Lambda_{k+1} x(t_{k+1}) \} + \tag{3}$$

$$+ \frac{1}{2} x^T(t_N) \Lambda_{N+1} x(t_N) + \frac{1}{2} y^T(t_N) R_{N+1} y(t_N) + x^T(t_N) \Psi_{N+1} y(t_N),$$

где $S(t), R_{k+1}, \Lambda_{k+1}$ – неотрицательно определенные симметрические матрицы размера $(n \times n)$, $(m \times m)$, $(n \times n)$ соответственно; $Q(t), P_{k+1}$ – положительно определенные матрицы размера $(q \times q)$, $(s \times s)$ соответственно; $\Phi(t), \Psi_{k+1}$ – матрицы размера $(n \times m)$. Определению подлежат матрицы $C_{k+1}, D_{k+1}, G_{k+1}$, моменты $t_k, k = 0,1,...N-1$ разбиения промежутка времени функционирования системы T и оптимальное управление $(u^*(t,x,y), v^*(t,x,y)) \in U_n$ с полной обратной связью, минимизирующие функционал (3).

Поставленная задача естественным образом разбивается на две подзадачи. Для определения параметров регулятора и режима его работы (матриц $C_{k+1}, D_{k+1}, G_{k+1}$ и моментов $t_k, k = 0,1,...N-1$) целесообразно использовать один из численных методов глобальной оптимизации (генетическое программирование, метод отжига). Эта процедура является внешней по отношению к процессу вычисления предельно возможного значения критерия качества оптимального управления с полной обратной связью, который должен выполняться на каждом шаге внешней процедуры при фиксированных значениях параметров регулятора. Внутренняя аналитическая процедура, подробно описанная в [5], базируется на достаточных условиях оптимальности позиционного закона управления с полной обратной связью и состоит в решении на каждом из временных подинтервалов задачи Коши для уравнения с частными производными первого порядка относительно функции Беллмана. Так, в линейном случае функция Беллмана $\varphi(t,x,y)$ ищется в виде

$$\varphi(t,x,y) = \frac{1}{2} x K(t) x^T + L(t) x^T y + \frac{1}{2} y M(t) y^T,$$

где $K(t), L(t), M(t)$ – неизвестные матрицы размера $(n \times n)$, $(n \times m)$, $(m \times m)$ соответственно. Для нахождения матриц *K(t), L(t), M(t)* используются уравнения

$$\begin{aligned} &\dot{K} + A^T K + KA + KBQ^{-1} B^T K - S = 0, \\ &\dot{L} + A^T L + KF + KBQ^{-1} B^T L - \Phi = 0, \quad t_k \le t < t_{k+1}, \\ &\dot{M} + F^T L + L^T F + L^T BQ^{-1} B^T L = 0, \end{aligned} \tag{4}$$

условия перехода к следующему полуинтервалу (условия скачка)

$$K(t_{k+1}-0)=K+LG+G^TL^T+G^TMG-\Lambda+[L+G^TM]D[P-D^TMD]^{-1}D^T[L^T+MG],$$

$$L(t_{k+1}-0)=LC+G^TMC-\Psi+[L+G^TM]D[P-D^TMD]^{-1}D^TMC, \qquad (5)$$

$$M(t_{k+1}-0)=C^TMC-R+C^TMD[P-D^TMD]^{-1}D^TMC$$

и конечные условия

$$K(t_N)=-\Lambda_{N+1},\ L(t_N)=-\Psi_{N+1},\ M(t_N)=-R_{N+1}. \qquad (6)$$

В правых частях выражений (5) для вычисления $K(t_{k+1}-0),\ L(t_{k+1}-0),\ M(t_{k+1}-0)$ матрицы $K(t), L(t), M(t)$ берутся в момент $t=t_{k+1}$, а матрицы $P, R, \Psi, \Lambda, C, D, G$ имеют индексы k+1.

Оптимальное управление на каждом интервале вычисляется так:

$$u*(t,x,y(t_k))=Q^{-1}(t)B^T(t)[K(t)x+L(t)y(t_k)],\ t_k\le t<t_{k+1},$$

$$v*(t_{k+1},x(t_{k+1}),y(t_k))=[P_{k+1}-D_{k+1}^TM(t_{k+1})D_{k+1}]^{-1}D_{k+1}^T\times\{[L^T(t_{k+1})+M(t_{k+1})G_{k+1}]x(t_{k+1})+$$
$$+M(t_{k+1})C_{k+1}y(t_k)),\ k=0,1,...,N-1. \qquad (7)$$

Алгоритм вычисления оптимального управления состоит из следующей последовательности шагов:

1. Из конечного условия (6) определяются матрицы $K(t_{k+1}),\ L(t_{k+1}),\ M(t_{k+1})$ при $k=N$ -1.

2. По формуле (5) вычисляются матрицы $K(t_{k+1}-0),\ L(t_{k+1}-0),\ M(t_{k+1}-0)$.

3. Решается система уравнений (4) справа налево от момента $t=t_{k+1}-0$ до $t=t_k$ с конечными условиями, найденными в п. 2. В результате находятся матрицы *K(t), L(t), M(t)*.

4. Выполняются пп. 2, 3 для $k=N-2, N-3, ..., 1, 0$. В результате находятся матрицы *K(t), L(t), M(t)* на всех полуинтервалах T_k.

5. Подставляя найденные матрицы *K(t),L(t),M(t)* в (7), получим искомое оптимальное управление с обратной связью.

Минимальное значение функционала (3) находится по формуле:

$$\min_{d\in D(t_0,x_0,y_0)} I(d)=-\varphi(0,x_0,y_0)=-\frac{1}{2}x_0^TK(t_0)x_0-x_0^TL(t_0)y_0-\frac{1}{2}y_0^TM(t_0)y_0. \qquad (8)$$

Выделим основные достоинства численно-аналитической процедуры:

– используемые численные методы оптимизации позволяют выявлять глобально-оптимальные настройки и режим работы регулятора;
– критерий качества (3) весьма общего вида позволяет решать самые разнообразные задачи;
– с помощью такой процедуры определяется точное решение задачи оптимального управления с полной обратной связью;
– значение критерия качества может быть рассчитано по (8) без определения оптимального управления, что позволяет снизить объем вычислений на промежуточных этапах поиска оптимальных настроек и режимов работы регулятора.

Помимо этого, такой подход позволяет поставить и решить ряд новых задач, а уже известные рассматривать с единых вычислительных позиций. Например, отличительной чертой цифрового регулятора является то, что при подаче на вход единичного дискретного импульса или ступенчатого сигнала переходный процесс полностью заканчивается за конечное число тактов, т.е. за конечное время. Это явление не имеет аналога для непрерывных систем. Такое управление называют апериодическим (в англоязычной литературе – deadbeat control) [1]. Рассмотрим в качестве примера задачу по переводу объекта управления в виде двойного интегратора из произвольного начального состояния в нулевое конечное за минимальное число шагов срабатывания цифрового регулятора. Подобная проблема исследуется в [4], там она решена как проблема размещения полюсов передаточной функции, определен цифровой регулятор второго порядка с дискретной передаточной функцией $W_{рег} = \dfrac{2.5 - 1.5z^{-1}}{1 + 0.75z^{-1}}$. Включаясь в работу, он переводит объект управления в нулевое конечное состояние за три такта. Сформулируем эту же задачу как задачу оптимального синтеза гибридной системы управления. В этом случае

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, F(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, S(t) = \Phi(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, t \in T = [t_0, t_N),$$

$$R_k = \Psi_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, k = 1, 2, \ldots, N+1, \quad \Lambda_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, k = 1,2 \wedge \Lambda_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, k = 3,4, \ldots, N+1.$$

Из-за требования положительной определенности $Q(t)$ и P_k вынужденно примем $Q(t) = 0.01, t \in T = [t_0, t_N)$ и $P_k = 0.01, k = 1, 2, \ldots, N+1$. Считаем, что структура регулятора остается неизменной в процессе управления, т.е. матрицы $C_{k+1}, D_{k+1}, G_{k+1}$ постоянны, $C_{k+1} = C, D_{k+1} = D, G_{k+1} = G, k = 0,1,..., N-1$. Матрицы C, D, G подлежат определению. Если будет выбран аритмический режим работы регулятора, то дополнительно будет необходимо определить длительности подинтервалов или, что эквивалентно, моменты $t_k, k = 0,1,...N-1$ разбиения промежутка времени Т функционирования системы. С целью предотвращения скрытых колебаний в системе можно изменить параметры критерия качества (3), выбрав $S(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, t \in T = [t_0, t_N)$.

Таким образом, задача синтеза апериодического регулятора может быть поставлена и решена как задача оптимального синтеза гибридной системы управления.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Острем К., Виттенмарк Б.* Системы управления с ЭВМ. – М.: Мир, 1987. – 480 с.
2. *Джури Э.И.* Импульсные системы автоматического регулирования. – М.: Физматгиз, 1963. – 456 с.
3. *Розенвассер Е.Н.* Линейная теория цифрового управления в непрерывном времени. – М.: Наука, 1994. – 455 с.
4. *Поляков К.Ю.* Основы теории цифровых систем управления / СПбГМТУ. – СПб., 2006. – 161 с.
5. *Пантелеев А.В.* Теория управления в примерах и задачах. – М.: Высшая школа, 2003. – 583 с.

Статья поступила в редакцию 2 сентября 2010 г.

UDC 681.3

NUMERICAL ANALYTIC PROCEDURE OF THE OPTIMAL SYNTHESIS OF HYBRID SYSTEMS

G.N. Rogachev, V.A. Egorov

Samara State Technical University
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100
E-mail: grogachev@mail.ru

The article is devoted to the method of solving the problem of optimal synthesis of hybrid control systems that contain continuous control object and discrete-time controller. A numerical analytic algorithm for optimal synthesis of hybrid systems, which includes a numerical procedure for searching the optimal parameters of the controller and the moments of its release and based on sufficient optimality conditions analytic procedure for searching the optimal position control law with the complete feedback. Examples of use of numerical analytic procedure for the solving some problems of optimum synthesis of hybrid systems are given.

Keywords: *Optimal Synthesis, Hybrid System, Control Law with Full Feedback.*

Gennadiy N. Rogachev – Candidate of Technical Sciences, Associate professor.
Vladimir A. Egorov – Postgraduate student.