

ПРИМЕНЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ АППРОКСИМАЦИИ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИГНАЛОВ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ТЕПЛООБМЕННЫХ АППАРАТОВ*

М.А. Гусева, И.А. Данилушкин

Самарский государственный технический университет
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244

E-mail: idanilushkin@mail.ru

В работе исследуется математическая модель теплообменного аппарата как объекта с распределенными параметрами. Рассмотрена возможность аппроксимации распределенного сигнала полиномиальной зависимостью, использования аппроксимации в структурном представлении систем с распределенными параметрами, дальнейшей реализации полученной численно-аналитической модели в пакете численного моделирования динамических систем и оценки результатов проведенного исследования.

Ключевые слова: теплообменный аппарат, моделирование, система с распределенными параметрами, аппроксимация, численно-аналитическая модель.

Введение. Одной из основных задач современной промышленности (энергетической, химической, нефтеперерабатывающей и др.) являются создание новых высокоэффективных систем управления технологическими процессами и совершенствование уже существующих. Решение данного вопроса возможно с помощью разработки и применения математических моделей реальных процессов и систем.

Теплообменные аппараты широко применяются в различных отраслях промышленности. Получение адекватных моделей подобных промышленных объектов управления возможно только с учетом их пространственной распределенности. В работах [1-3] с помощью методов структурной теории были получены аналитические модели для прямоточных и противоточных теплообменных аппаратов, но они очень громоздки и сложны для последующей реализации и анализа. Применение пространственной аппроксимации распределенных сигналов при структурном моделировании систем с распределенными параметрами позволяет строить модели объектов в пакетах моделирования сосредоточенных динамических систем с учетом особенностей поведения систем с распределенными параметрами.

Математическая модель теплообменного аппарата. Процесс теплообмена между двумя потоками жидкости может быть описан системой дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial T_1(x,t)}{\partial t} + v_1 \cdot \frac{\partial T_1(x,t)}{\partial x} = \beta_1 \cdot (T_2(x,t) - T_1(x,t)), \quad (1)$$

$$\frac{\partial T_2(x,t)}{\partial t} \pm v_2 \cdot \frac{\partial T_2(x,t)}{\partial x} = \beta_2 \cdot (T_1(x,t) - T_2(x,t)), \quad (2)$$

$$0 \leq x \leq L, \quad t \geq 0.$$

* Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ №09-08-00297-а, №10-08-00754-а; ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009-2013 годы», контракты НК-66П/11, 2010-1.3.1-230-009/8; АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы», проект №2.1.2/4236.

Мария Александровна Гусева – аспирант.

Иван Александрович Данилушкин – к.т.н., докторант.

С начальными и граничными условиями:

$$T_1(x,0) = 0, T_2(x,0) = 0,$$

для прямотока:

$$T_2(0,t) = g_2(t),$$

для противотока:

$$T_2(L,t) = g_2(t),$$

где $T_i(x,t)$ – распределение температуры i -го потока по длине, град, $i = \overline{1, 2}$; v_i – скорость i -го потока жидкости, м/с; β_i – приведённый коэффициент конвективного теплообмена i -го потока с соседним потоком, 1/с; L – длина теплообменного аппарата, м.

Режим течения потоков принят ламинарным, значения скоростей и приведённых коэффициентов конвективного теплообмена постоянны по всей длине теплообменного аппарата.

Для потока, направление которого совпадает с осью абсцисс, передаточная и стандартизирующая функции имеют вид [1]:

$$W(x, \xi, p) = \mathbf{1}(x - \xi) \cdot \frac{1}{v} \cdot \exp\left(-\frac{p + \beta}{v} \cdot (x - \xi)\right), \quad (3)$$

$$\omega(x, p) = \beta \cdot T_{env}(x, p) + v \cdot \delta(x) \cdot g(p) + T(x), \quad (4)$$

где p – оператор преобразования по Лапласу, $\mathbf{1}(x - \xi)$ – единичная функция:

$$\mathbf{1}(x - \xi) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq \xi, \\ 1, & \text{при } x > \xi. \end{cases}$$

$T_{env}(x, p)$ – произвольное распределение теплоисточников по длине теплообменного аппарата (рис. 1). В уравнениях (1), (2) в роли $T_{env}(x, p)$ выступает температурное распределение соседнего потока.

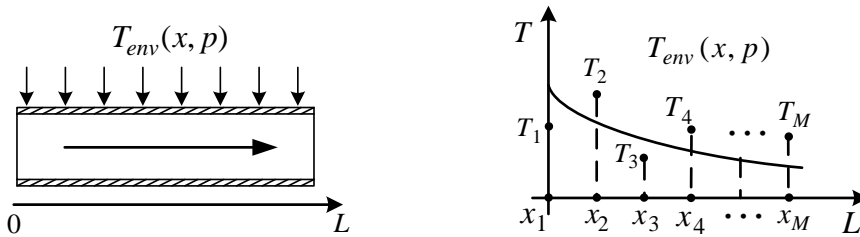


Рис. 1. Пример распределения теплоисточников $T_{env}(x, p)$

Распределенный сигнал можно аппроксимировать полиномиальной зависимостью N -го порядка (см. рис. 1):

$$T_{env}(x, p) = \sum_{n=0}^N k_n(p) \cdot x^n; \quad N < M, \quad (5)$$

где N – степень полинома, M – количество точек.

При $N = M - 1$ коэффициенты аппроксимации k_n могут быть вычислены из системы линейных выражений по измеренным значениям температур в M точках по длине теплообменника:

$$T(x_m, p) = T_m(p) = \sum_{n=0}^N k_n(p) \cdot x_m^n, \quad \text{где } m = \overline{1, M}. \quad (6)$$

Коэффициенты аппроксимации (5) могут быть найдены в общем случае по методу наименьших квадратов [4]:

$$\mathbf{K}(p) = (\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{X})^{-1} \cdot \mathbf{X}^T \cdot \mathbf{T}(p), \quad (7)$$

где $\mathbf{K}(p)$ – вектор неизвестных коэффициентов линеаризации,

$$\mathbf{K}(p) = (k_0(p), k_1(p), \dots, k_N(p))^T;$$

$$\mathbf{X} \text{ – матрица размерности } M \times (N+1), \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1^0 & x_1^1 & \dots & x_1^N \\ x_2^0 & x_2^1 & \dots & x_2^N \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_M^0 & x_M^1 & \dots & x_M^N \end{pmatrix};$$

$\mathbf{T}(p)$ – вектор измеренных значений температур, $\mathbf{T}(p) = (T_0(p), T_1(p), \dots, T_M(p))^T$.

Температурное распределение потока теплообменного аппарата может быть найдено по формуле [1]:

$$T(x, p) = \int_0^L W(x, \xi, p) \cdot \omega(\xi, p) d\xi. \quad (8)$$

Тогда значение температуры потока в определенной точке x_m с учетом (3) – (5) рассчитывается по формуле:

$$\begin{aligned} T(x, p) &= \int_0^L \mathbf{1}(x - \xi) \cdot \frac{1}{v} \cdot \exp\left(-\frac{p + \beta}{v} \cdot (x - \xi)\right) \cdot \left(\beta \cdot \sum_{n=0}^N k_n(p) \cdot \xi^n + v \cdot \delta(\xi) \cdot g(p)\right) d\xi = \\ &= \frac{\beta}{v} \cdot \exp\left(-\frac{p + \beta}{v} \cdot x\right) \cdot \int_0^x \left(\exp\left(\frac{p + \beta}{v} \cdot \xi\right) \cdot \sum_{n=0}^N k_n(p) \cdot \xi^n\right) d\xi + g(p) \cdot \exp\left(-\frac{p + \beta}{v} \cdot x\right) = \\ &= \frac{\beta}{v} \cdot \exp\left(-\frac{p + \beta}{v} \cdot x\right) \cdot \left[\exp\left(\frac{p + \beta}{v} \cdot x\right) \cdot \frac{v}{p + \beta} \cdot \left(x^n - n \cdot x^{n-1} \cdot \frac{v}{p + \beta} + n \cdot (n-1) \cdot x^{n-2} \times \right. \right. \\ &\times \left. \left. \left(\frac{v}{p + \beta}\right)^2 - \dots + (-1)^n \cdot n! \cdot \left(\frac{v}{p + \beta}\right)^n\right) - (-1)^n n! \cdot \left(\frac{v}{p + \beta}\right)^{n+1} \right] + g(p) \cdot \exp\left(-\frac{p + \beta}{v} \cdot x\right). \end{aligned}$$

Используя известное выражение для размещений $A_N^j = N!/(N-j)!$, можно свернуть получившееся выражение, тогда температурное распределение примет вид:

$$\begin{aligned} T(x, p) &= \beta \cdot \sum_{n=0}^N k_n(p) \cdot \left[\sum_{j=0}^{N-1} \frac{(v)^j}{(p + \beta)^{j+1}} \cdot x^{N-j} \cdot A_N^j \cdot (-1)^j + \right. \\ &\left. + \frac{(v)^N}{(p + \beta)^{N+1}} \cdot (-1)^N \cdot N! \cdot \left(1 - \exp\left(-\frac{p + \beta}{v} \cdot x\right)\right) \right] + g(p) \cdot \exp\left(-\frac{p + \beta}{v} \cdot x\right). \quad (9) \end{aligned}$$

На основе выражения (9) модель теплообменного аппарата, описываемого системой уравнений (1) – (2), можно представить в виде структурной схемы (рис. 2); Δ_1 , Δ_2 – векторы настраиваемых параметров теплообменника (скорость потока, длина теплообменника, коэффициент теплопередачи и т.д.).

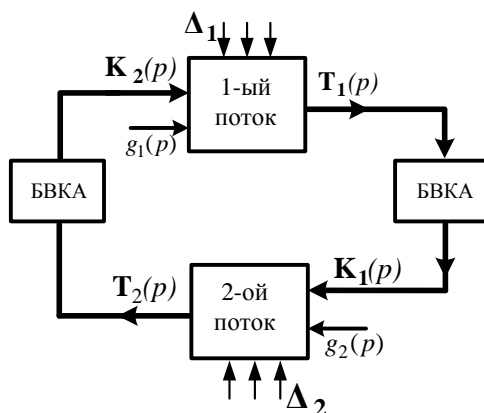


Рис. 2. Структурная схема теплообменного аппарата

В блоке вычисления коэффициентов аппроксимации (БВКА) реализован алгоритм вычисления коэффициентов аппроксимации по выражениям (6) или (7).

Синтез и анализ численно-аналитических моделей теплообменного аппарата с различными способами аппроксимации распределенного сигнала. Полученная структурная схема (см. рис. 2) может быть легко реализована в пакетах численного моделирования динамических систем. Ранее, в работах [5, 6], на основе предложенного метода была разработана и реализована численно-аналитическая модель противоточного теплообменного аппарата с аппроксимацией распределенного сигнала линейной зависимостью вида

$$T(x, p) = k_1(p) \cdot x + k_0(p). \quad (10)$$

Коэффициенты аппроксимации k_1 , k_0 вычисляются по измеренным значениям температур теплообменного аппарата в фиксированных точках – на входе и выходе теплообменника.

В рамках проделанной работы были разработаны численно-аналитические модели противоточных теплообменников:

- с аппроксимацией распределенного сигнала полиномиальной зависимостью третьего порядка:

$$T(x, p) = k_3(p) \cdot x^3 + k_2(p) \cdot x^2 + k_1(p) \cdot x + k_0(p). \quad (11)$$

Коэффициенты аппроксимации k_3 , k_2 , k_1 , k_0 вычисляются по выражению (6). Значения температур измерены в фиксированных точках – на входе и выходе теплообменника; на $1/3$ и $2/3$ его длины;

- с аппроксимацией распределенного сигнала полиномиальной зависимостью второго порядка:

$$T(x, p) = k_2(p) \cdot x^2 + k_1(p) \cdot x + k_0(p). \quad (12)$$

Коэффициенты аппроксимации k_2 , k_1 , k_0 вычисляются методом наименьших квадратов (7) по тем же четырем точкам $(0, 1/3 \cdot L, 2/3 \cdot L, L)$.

При расчете теплообменного аппарата были заданы следующие конструктивные и теплофизические характеристики:

- длина теплообменника $L=6$ м;

– скорость греющего потока воды $v_1=1,7$ м/с;
 – скорость нагреваемого потока воды $v_2=3$ м/с;
 – температуры теплоносителей на входе теплообменника: $T_{in 1}=100$ град;
 $T_{in 2}=20$ град.

Приведённые коэффициенты конвективного теплообмена между потоками:
 $\beta_1=0,2153$ 1/с; $\beta_2=0,3821$ 1/с.

В результате исследований трех реализованных моделей теплообменных аппаратов (10) – (12) были получены кривые температурного распределения на выходе нагреваемого потока после нанесения возмущения на входе (рис. 3) и переходный процесс температуры греющего потока при различных способах аппроксимации температурного распределения нагреваемого потока (рис. 4).

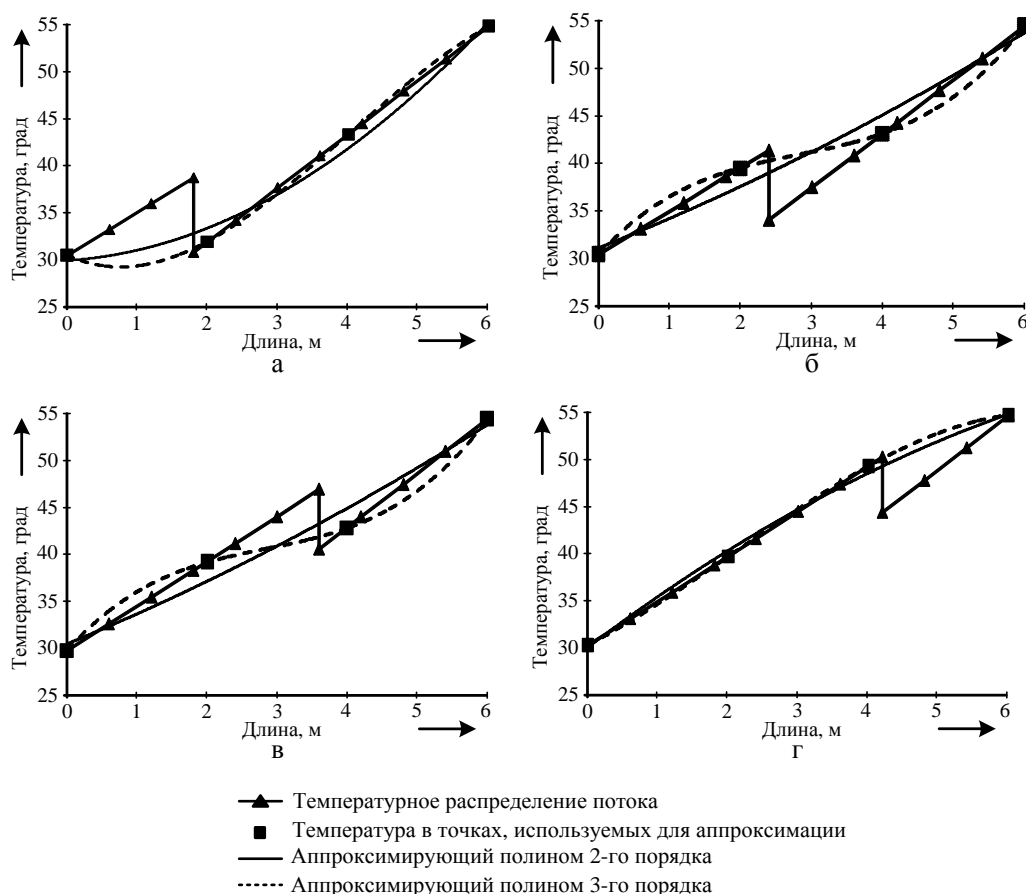


Рис. 3. Температурное распределение нагреваемого скачка на выходе после нанесения возмущения температурой на входе:

а – 0,6 сек после нанесения возмущения; б – 0,8 сек после нанесения возмущения;
 в – 1,2 сек после нанесения возмущения; г – 1,4 сек после нанесения возмущения

Оценка точности предложенных способов аппроксимации распределенного сигнала была проведена по выражению (13) в разные моменты времени (значения температур были сняты в 11 точках – с шагом $0,1 \cdot L$):

$$\sigma = \sum_{m=0}^M |T_m - T_{m \text{ apr}}|, M = 11. \quad (13)$$

Полученные данные были сведены в таблицу.

Оценка погрешности аппроксимации распределенного сигнала

Момент времени после нанесения возмущения, сек	σ при различных способах аппроксимации		
	Линейная зависимость (аппроксимация по 2 точкам)	Полином 3-го порядка	Полином 2-го порядка (МНК)
0,6	23,0386	20,642	19,9953
0,8	18,4915	13,5276	15,8053
1,2	15,5886	12,9857	15,172
1,4	14,1326	8,40132	9,55497

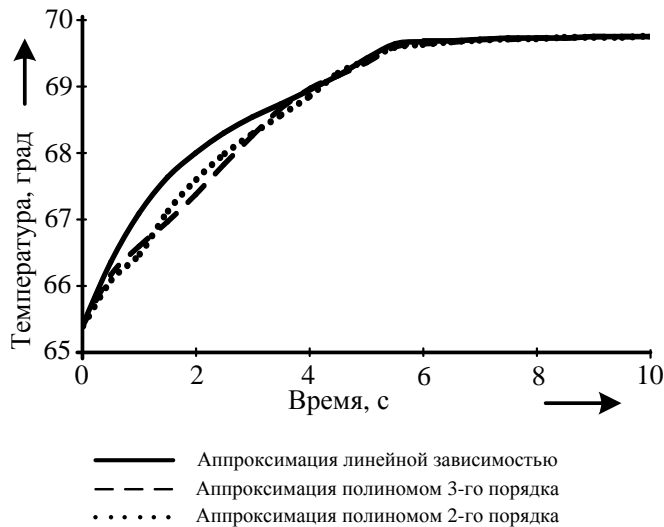


Рис. 4. Переходный процесс температуры греющего потока при различных способах аппроксимации температурного распределения потоков

Анализ результатов погрешностей при аппроксимации распределенного сигнала полиномами разных порядков позволяет сделать вывод о том, что аппроксимация взаимного влияния температурных потоков друг на друга полиномом третьего порядка наиболее адекватно отражает поведение реальной системы теплообменного аппарата.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бутковский А.Г. Структурная теория распределённых систем. – М.: Наука, 1977.
2. Данилушкин И.А., Лежнев М.В. Структурное представление процесса теплообмена при встречном направлении взаимодействующих потоков // Вестник Самарского гос. техн. ун-та. Сер. Технические науки. Вып. 1(19)–2007. – Самара: СамГТУ, 2007. – С. 16-22.
3. Данилушкин И.А., Тимофеева О.Н. Структурное представление и передаточные функции прямочного теплообменника// Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. Технические науки. Вып. 1(21)–2008. – Самара: СамГТУ, 2008. – С. 9-13.

4. Линник Ю.В. Метод наименьших квадратов и основы теории обработки наблюдений. – М.: Гос. изд-во физико-математической литературы, 1958.
5. Данилушкин И.А., Гусева М.А. Построение численно-аналитических моделей теплообменных аппаратов // Международ. науч. конф. «Проблемы управления, передачи и обработки информации – АТМ-ТКИ-50»: Сб. трудов / Под ред. А.Г. Александрова, М.Ф. Степанова. – Саратов: Саратов. гос. техн. ун-т, 2009. – С. 168-170.
6. Данилушкин И.А., Гусева М.А. Численно-аналитическая модель нагрева потока жидкости // Высокие технологии, исследования, промышленность. Т. 1: IX Международная научно-практ. конференция «Исследование, разработка и применение высоких технологий в промышленности», 22-23 апреля 2010: Сб. трудов / Под. ред. А.П. Кудинова. – СПб.: Изд-во политехн. ун-та, 2010. – С. 297-298.

Статья поступила в редакцию 2 сентября 2010 г.

UDC 517.958

APPLICATION OF SPATIAL APPROXIMATION OF THE DISTRIBUTED SIGNALS FOR MODELING OF HEAT EXCHANGERS

M.A. Guseva, I.A. Danilushkin

Samara State Technical University
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100

In this paper, the mathematical model of heat exchanger is investigated, as an object with distributed parameters. The possibility of polynomial approximation of distributed signal dependence, the use of approximations in the structural representation of distributed parameter systems, the further implementation of the received numerically-analytical models in software for numerical simulation of dynamic systems, and estimation of results of the conducted research are considered.

Keywords: heat exchanger, simulation, distributed parameter system, approximation, numerically-analytical model.