

## **МЕТОД ВЫБОРА ПОКАЗАТЕЛЕЙ ОПТИМАЛЬНОСТИ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, ОРИЕНТИРОВАННЫЙ НА ПРЕДПОЧТЕНИЯ ПОТРЕБИТЕЛЯ**

***В.Г. Саркисов***

Самарский государственный технический университет  
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244

E-mail: vigen.sarkisov@mail.ru

*Рассматривается вопрос выбора показателей, адекватно характеризующих результат работы системы управления с точки зрения потребителя. Выбранные показатели ранжируются по степени соответствия предпочтениям потребителя. Исследуется стабильность предпочтений.*

**Ключевые слова:** оптимизация, целевая функция, показатель, критерий, предпочтение, оценка, потребитель.

**Введение.** В данной работе рассматриваются системы управления, качество результата работы которых апостериори оценивается потребителем, причем предпочтения потребителя не формализованы.

Как правило, при построении системы управления показатели качества работы системы выбраны заранее, и регулятор строится из соображений оптимизации целевой функции, построенной на основе выбранных показателей. Часто имеют место ситуации, когда количество возможных показателей достаточно велико и потребитель не может определить, какие из показателей реально описывают его предпочтения.

Общепринятые показатели качества работы системы удобны с точки зрения математического описания и анализа, но зачастую непонятны конечному потребителю, отражают его предпочтения лишь косвенно, не отражают их вообще или даже противоречат им [1]. В настоящей работе решается задача выбора и ранжирования показателей по степени их соответствия неформализованным предпочтениям потребителя.

Существенной проблемой является взаимозависимость показателей. Показатели, призванные разносторонне описывать качество результата работы системы, зачастую связаны корреляционной зависимостью с очень высоким коэффициентом корреляции (более 0,9). Результаты оптимизации системы по таким показателям практически идентичны. Следовательно, учет нескольких взаимозависимых показателей при оптимизации приводит лишь к усложнению самой процедуры оптимизации, не влияя на результат. В данной работе решается задача выявления взаимозависимых показателей.

Целью работы является формирование обоснованного подхода к выбору совокупности показателей, характеризующих некоторый класс систем с точки зрения полезности потребителю.

**Формирование матрицы предпочтений потребителя.** Пусть  $A$  – множество возможных результатов работы системы, представленных в некотором стандартизованном, понятном потребителю виде;  $A_i$  –  $i$ -тый эталонный результат работы сис-

темы,  $A_i \in A$ .

Для каждой пары результатов  $A_i$  и  $A_j$  из множества  $A$  потребитель определяет бинарное отношение (предпочтения или неразличимости) одного из трех видов:

- 1)  $A_i \succ A_j$  – результат  $A_i$  более предпочтителен для потребителя, чем  $A_j$ ;
- 2)  $A_i \prec A_j$  – результат  $A_i$  менее предпочтителен для потребителя, чем  $A_j$ ;
- 3)  $A_i \approx A_j$  – результат  $A_i$  не более и не менее предпочтителен, чем  $A_j$ .

На основе выбора потребителя формируется матрица отношений предпочтения, например вида

$$\begin{pmatrix} A_1 \approx A_1 & A_1 \succ A_2 & \dots & A_1 \succ A_N \\ A_2 \prec A_1 & A_2 \approx A_2 & \dots & A_2 \prec A_N \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_N \prec A_1 & A_N \succ A_2 & \dots & A_N \approx A_N \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Анализ матрицы (1) должен в дальнейшем позволить проранжировать все результаты  $A_i$  по степени полезности потребителю.

**Общий подход к оценке показателей.** Показателем  $P_k$  качества результата  $A_i$  будем называть функционал  $P_k$ , ставящий в соответствие результату  $A_i \in A$  действительное число  $P_k(A_i) \in R$ , где  $k \in \overline{1, N}$ .

Далее будем полагать, что все показатели построены таким образом, что большему значению показателя  $P_k(A_i)$  соответствует более высокое качество результата  $A_i$  (если большему значению соответствует худший результат, то достаточно умножить значение показателя на -1).

Для оценки каждого показателя оптимальности системы по степени его соответствия предпочтениям потребителя рассмотрим две величины, характеризующие свойства показателя:

- 1)  $R_k$  – средний уровень соответствия показателя  $P_k$  предпочтениям потребителя;
- 2)  $S_k$  – стабильность уровня соответствия показателя  $P_k$  предпочтениям потребителя.

Данные величины будут далее рассчитаны на основе матриц предпочтений, сформированных по аналогии с (1) для каждого из показателей.

**Формирование матриц и цепочек предпочтений по рассматриваемым показателям.** Так как показатель ставит в соответствие каждому результату действительное число, то формирование отношений предпочтения по каждому показателю производится однозначно:

$P_k(A_i) > P_k(A_j) \Rightarrow A_i \overset{P_k}{\succ} A_j$  – по показателю  $P_k$  результат  $A_i$  более предпочтителен, чем  $A_j$ ;

$P_k(A_i) = P_k(A_j) \Rightarrow A_i \overset{P_k}{\approx} A_j$  – по показателю  $P_k$  результат  $A_i$  не более и не менее предпочтителен, чем  $A_j$ ;

$P_k(A_i) < P_k(A_j) \Rightarrow A_i \overset{P_k}{\prec} A_j$  – по показателю  $P_k$  результат  $A_i$  менее предпочтителен, чем  $A_j$ .

Отсортировав результаты  $A_i$  в порядке убывания значения  $P_k(A_i)$ , получим цепочку отношений предпочтения вида

$$(P_k(A_{i_1}) > P_k(A_{i_2}) > \dots > P_k(A_{i_N})) \Leftrightarrow \left( A_{i_1} \stackrel{P_k}{>} A_{i_2} \stackrel{P_k}{>} \dots \stackrel{P_k}{>} A_{i_N} \right), \quad (2)$$

где  $i_1, i_2, \dots, i_N$  – номера результатов  $A_i$ , отсортированные по убыванию  $P_k(A_i)$ .

Из полученных отношений по аналогии с (1) для каждого показателя  $P_k$  формируется матрица предпочтений вида

$$\begin{pmatrix} P_k & P_k & \dots & P_k \\ A_1 \approx A_1 & A_1 \succ A_2 & \dots & A_1 \succ A_N \\ P_k & P_k & \dots & P_k \\ A_2 \prec A_1 & A_2 \approx A_2 & \dots & A_2 \succ A_N \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_k & P_k & \dots & P_k \\ A_N \prec A_1 & A_N \prec A_2 & \dots & A_N \approx A_N \end{pmatrix}. \quad (3)$$

**Анализ соответствия показателя предпочтениям потребителя.** На основе сравнительного анализа матриц предпочтений (1) и (3), а также цепочки предпочтений (2) можно установить степень соответствия каждого показателя  $P_k$  предпочтениям потребителя. В настоящей статье для этого предлагается три различных подхода:

- 1) сравнение матриц предпочтения,
- 2) формирование цепочки предпочтений потребителя и усредненное сравнение с цепочкой предпочтений по показателю;
- 3) сравнение цепочки предпочтений потребителя с цепочкой предпочтений по показателю с точки зрения выбора экстремальных результатов.

**Непосредственное сравнение матриц предпочтений.** При непосредственном сравнении матриц предпочтений соответствие показателя  $P_k$  предпочтениям потребителя характеризуется сходством матриц (1) и (3). Будем считать, что одинаковые отношения предпочтения (потребителя и по показателю  $P_k$ ) в матрицах (1) и (3) положительно сказываются на сходстве, отношения неразличимости на сходство не влияют, а противоположные отношения предпочтения в (1) и (3) уменьшают сходство:

$$R_k = \frac{2}{N(N-1)} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \begin{cases} 1, & \left( A_i \stackrel{P_k}{>} A_j \right) \wedge \left( A_i \succ A_j \right) \vee \left( A_i \prec A_j \right) \wedge \left( A_i \prec A_j \right) \\ 0, & \left( A_i \approx A_j \right) \vee \left( A_i \approx A_j \right) \\ -1, & \left( A_i \succ A_j \right) \wedge \left( A_i \prec A_j \right) \vee \left( A_i \prec A_j \right) \wedge \left( A_i \succ A_j \right) \end{cases} \quad (4)$$

При использовании данного подхода  $R_k \in [-1, 1]$ . Чем больше значение  $R_k$ , тем лучше показатель  $P_k$  отражает предпочтения потребителя:

$$(R_k > R_m) \Leftrightarrow (P_k \succ P_m). \quad (5)$$

Показатели с отрицательными  $R_k$  в среднем противоречат предпочтениям потребителя.

**Формирование цепочки предпочтений потребителя и усредненное сравнение с цепочкой предпочтений по показателю.** Формирование цепочки предпочтений потребителя по аналогии с (2) и ее сопоставление с (2) даст более точную оценку показателя с точки зрения соответствия предпочтениям потребителя, чем сравнение матриц. Формирование цепочки предпочтений потребителя на основе матрицы (1) связано со следующими двумя проблемами, обусловленными нечеткостью формулировок и интуитивным характером предпочтений:

1) нарушение условия транзитивности (условие транзитивности: если  $A_i \succ A_j, A_j \succ A_k$ , то  $A_i \succ A_k$ ). Данная проблема проявляется в формировании в матрице (1) закольцованных цепочек вида  $A_1 \succ A_2 \succ \dots \succ A_n \succ A_1$ . В такой цепочке элемент  $A_1$ , с одной стороны, является более предпочтительным, а с другой – менее предпочтительным, чем все остальные элементы. Эти же рассуждения справедливы и для любого другого элемента закольцованной цепочки;

2) нелогичные решения, когда потребитель предпочитает худший результат лучшему (по некоторым базовым критериям). Если первая проблема однозначно является следствием ошибки потребителя, то вторая, кроме того, может быть вызвана несовершенством принятых базовых критериев.

Если набор базовых критериев может быть сведен к некоторому единому обобщенному критерию, то появление первой проблемы неизбежно приводит к появлению второй. Например, потребитель сформировал закольцованную цепочку предпочтений  $A_1 \succ A_2 \succ A_3 \succ A_1$ . Из этой цепочки можно сделать выводы, что  $A_1 \succ A_2$  и  $A_2 \succ A_1$  (так как  $A_2 \succ A_3 \succ A_1$ ). С точки зрения базового критерия правильным может быть лишь одно из отношений:  $A_1 \succ A_2$  или  $A_2 \succ A_1$ .

Обратное не верно, то есть из нелогичности решений потребителя по отношению к базовым критериям не всегда следует нарушение условия транзитивности. Например, потребитель сформировал цепочку предпочтений  $A_1 \succ A_2 \succ A_3$ , а с точки зрения базовых критериев верны предпочтения  $A_1 \prec A_2 \prec A_3$ . Нарушения условия транзитивности нет ни в той, ни в другой цепочке, но при этом с точки зрения базовых критериев решения потребителя нелогичны.

При разрешении первой проблемы (восстановлении транзитивности) вторая может разрешиться автоматически в том случае, если базовые критерии хорошо отражают предпочтения потребителя.

Для разрешения обеих проблем необходимо вмешательство потребителя. На первом этапе целесообразно указать ему на закольцованные цепочки, начиная с самых коротких (содержащих минимальное число элементов), предлагая изменить свой выбор в целях восстановления транзитивности. При этом потребитель может поменять отношение предпочтения на противоположное или ввести вместо него отношение неразличимости. После восстановления транзитивности результаты  $A_i$  уже могут быть однозначно проранжированы.

На втором этапе потребителю предлагается пересмотреть нелогичные (по базовым критериям) выборы. Сохранение первоначального выбора говорит о несоответствии базовых критериев предпочтениям потребителя.

Пусть после разрешения проблем потребителем на основании предпочтений потребителя была сформирована цепочка предпочтений

$$A_{j_1} \succ A_{j_2} \succ \dots \succ A_{j_N}. \quad (6)$$

С точки зрения потребителя  $A_{j_n} \succ_{P_k} A_{j_{n+1}}$ . Для оценки сходства цепочек (6) и (2) рассмотрим отношение между этими же двумя результатами в цепочке (2). Сходство цепочек предпочтений будет описываться формулой

$$R_k = \frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^{N-1} \begin{cases} 1, & A_{j_n} \succ_{P_k} A_{j_{n+1}} \\ 0, & A_{j_n} \approx_{P_k} A_{j_{n+1}} \\ -1, & A_{j_n} \prec_{P_k} A_{j_{n+1}} \end{cases} . \quad (7)$$

Как и при использовании предыдущего подхода,  $R_k \in [-1, 1]$  и большему значению  $R_k$  соответствует более точное описание предпочтений потребителя.

**Сравнение цепочки предпочтений потребителя с цепочкой предпочтений по показателю с точки зрения выбора экстремальных результатов.** Формула (7) дает усредненное представление о степени соответствия показателя предпочтениям потребителя. С практической точки зрения часто наибольший интерес представляет выбор лучших результатов.

Оценим соответствие показателя предпочтениям потребителя с помощью  $r_k$  – количества совпадающих элементов в начале цепочек (2) и (6). Найдем  $r_k$  из условия

$$i_n = j_n, \forall n \in [1..r_k], i_{r_k+1} \neq j_{r_k+1} . \quad (8)$$

При вычислении по (8) получим  $r_k \in [0, N]$ . Нормировав  $r_k$ , получим  $R_k \in [0, 1]$ :

$$R_k = r_k / N . \quad (9)$$

Если интерес представляет выбор наихудших результатов (например, для оценки рисков), то вместо (8) условие для нахождения  $r_k$  примет вид

$$i_n = j_n, \forall n \in [r_k..N], i_{r_k-1} \neq j_{r_k-1} . \quad (10)$$

Данный подход наиболее эффективен для большого числа показателей.

**Выявление дублирующих показателей.** По аналогии с (4), (7) и (8) можно исследовать показатель  $P_k$  не только на соответствие предпочтениями потребителя, но и на взаимозависимость с другим показателем (например,  $P_m$ ). При этом вместо матрицы отношений предпочтения (1) и цепочки (6) будут рассматриваться матрица вида (3) и цепочка предпочтений вида (2), построенные для показателя  $P_m$ .

Для оптимизации системы из группы существенно взаимозависимых показателей достаточно оставить лишь один.

**Анализ стабильности предпочтений потребителя.** При выборе тех или иных показателей существенную роль играет стабильность предпочтений потребителя. Так как эти предпочтения изначально не формализованы, в различных наборах результатов наиболее значимыми могут становиться различные показатели. Для выявления наиболее значимых для потребителя показателей предлагается рассмотреть несколько наборов результатов и сопоставить цепочки предпочтения показателей [2].

Определим на множестве  $A$  подмножества  $A^l$ , ( $A^l \subset A$ ,  $l = \overline{1..L}$ ):

$$\bigcup_{l=1}^L A^l \subseteq A. \quad (11)$$

Пусть подмножество  $A^l$  содержит  $n_l$  результатов  $A_i^l$  ( $i = \overline{1..n_l}$ ). В общем случае один и тот же результат  $A_i$  из множества  $A$  может принадлежать нескольким подмножествам.

Обозначим через  $R_k^l$  значение  $R_k$ , рассчитанное по формулам (4), (7), (8) или (10) на подмножестве  $A^l$ . Сопоставляя значения  $R_k^l$  при различных  $l$ , можно выявить изменения в предпочтениях потребителя и выбрать показатели, наиболее стабильно отражающие эти предпочтения.

В качестве меры стабильности  $S_k$  предпочтений по отношению к показателю  $P_k$  может быть выбрана оценка дисперсии  $R_k^l$  (взятая с противоположным знаком):

$$S_k = -\frac{1}{L-1} \sum_{l=1}^L (R_k^l - R_k^*)^2, \quad (12)$$

где  $R_k^* = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L R_k^l$  – выборочное среднее  $R_k^l$ .

Чем больше значение  $S_k$ , тем меньше отношение потребителя к показателю  $P_k$  зависит от выбора подмножества  $A^l$ .

В зависимости от поставленных задач управления в качестве меры стабильности предпочтения  $S_k$  можно выбрать и другие величины. Например, наименьшее (наихудшее) значение  $R_k^l$ :

$$S_k = \min_l R_k^l. \quad (13)$$

Таким образом, в разработанном методе ранжирования каждый из показателей характеризуется двумя величинами:

- 1)  $R_k^*$  – мерой соответствия показателя  $P_k$  предпочтениям потребителя;
- 2)  $S_k$  – мерой стабильности предпочтений потребителя относительно показателя  $P_k$ .

Если  $R_k^* > R_m^*$  и  $S_k > S_m$ , то очевидно, что показатель  $P_k$  отражает предпочтения потребителя лучше, чем  $P_m$ . Если же  $R_k^* > R_m^*$ , а  $S_k < S_m$ , то для однозначного ранжирования необходимо использование дополнительных условий.

**Выводы.** Разработанный метод выбора показателей оптимальности системы управления позволяет:

- 1) производить выбор показателей оптимальности системы управления на основе анализа неформализованных предпочтений потребителя;
- 2) группировать и отсеивать дублирующиеся показатели;
- 3) анализировать и структурировать предпочтения потребителя;
- 4) классифицировать потребителей по их предпочтениям, формируя соответствующие наборы показателей.

Полученный в результате применения метода упорядоченный и минимизированный набор показателей может быть использован при многокритериальной оптимизации системы управления.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Саркисов В.Г., Саркисов Г.А. Модели оценки риска инвестиционных портфелей // Актуальные задачи математического моделирования и информационных технологий: Мат-лы V Всероссийской научно-практической конференции, Соч. гос. ун-т. – Сочи, 2009, с. 46-48.
2. Саркисов В.Г., Саркисов Г.А. Метод оценки и выбора алгоритма принятия инвестиционных решений на основе его параметрической оптимизации // Вестник СамГТУ. Сер. Технические науки. – №2 (24). – 2009. – С. 39-46.
3. Железко Б., Синявская О. Скоринг ценных бумаг как способ оптимизации инвестиционных решений // Финансовый директор. – 2005. – №5-6. – С. 65-69; с. 67-71.
4. Орлов А.И. Статистический контроль по двум альтернативным признакам и метод проверки их независимости по совокупности малых выборок // Заводская лаборатория. – 2000. – Т. 66. – №1. – С. 58-62.

*Статья поступила в редакцию 21 февраля 2011 г.*

UDC 007, 336.76

#### **CONTROL SYSTEM OPTIMALITY INDICATORS CHOICE METHOD, FOCUSED ON CONSUMER'S PREFERENCES**

***V.G. Sarkisov***

Samara State Technical University  
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100

*The problem of choice of the indicators adequately characterizing result of work of a control system from the point of view of the consumer is considered. The chosen indicators are ranged on degree of conformity to preferences of the consumer. Stability of preferences is investigated.*

**Keywords:** *optimization, criterion function, an indicator, criterion, preference, estimation, consumer.*

---

*Vilen G. Sarkisov – Candidate of Technical Sciences.*