УДК 519.246.27

ОЦЕНИВАНИЕ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ МОЩНОСТИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СТАТИСТИЧЕСКОГО СГЛАЖИВАНИЯ ПАРАМЕТРОВ ЛИНЕЙНОЙ РАЗНОСТНОЙ МОДЕЛИ ВРЕМЕННОГО РЯДА СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

В.Н. Якимов, А.Б. Филимонов

Самарский государственный технический университет
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244
E-mail: anton.philimonov@gmail.ru

В статье рассматривается задача параметрического оценивания спектральной плотности мощности случайного процесса на основе построения линейной разностной модели временного ряда исследуемого случайного процесса. Для устойчивого одновременного оценивания параметров линейной разностной модели используется процедура статистического сглаживания. Приводится схема алгоритма оценивания искомых параметров.

Ключевые слова*: случайный процесс, спектральная плотность мощности, временной ряд, линейная разностная модель, переопределенная система уравнений.*

При освоении месторождений и транспортировке углеводородного сырья сохранение природной среды в зоне размещения объектов, минимизация техногенного воздействия на окружающую среду имеют принципиальное значение. Поэтому обеспечение надежной работы ключевых звеньев газотранспортной инфраструктуры, таких как газоперекачивающие агрегаты (ГПА), является актуальной задачей.

Основным источником вибрации ГПА является ротор. Остаточный дисбаланс вращающегося ротора способствует появлению периодических центробежных сил, которые порождают сложный вибрационный процесс ГПА. По своей природе вибрационный процесс носит случайный характер и может быть описан как

$$x\,(t) = \sum_{k=1}^{N} a_k \cos(k\omega t - \varphi_k) + e.$$

Цифровой спектральный анализ случайных процессов (СП) является одним из важнейших разделов теории и практики статистических измерений. Как правило, в подобных случаях требуется оценивать спектральную плотность мощности (СПМ), которая выражает среднюю мощность, приходящуюся на единицу полосы частот, занимаемой исследуемым процессом [1].

Одним из наиболее перспективных направлений повышения эффективности цифрового спектрального анализа СП является параметрическое оценивание СПМ. В этом случае задача спектрального анализа сводится к выбору дискретной модели временного ряда x_n наблюдаемой реализации СП и оцениванию ее свободных параметров [1, 2]. В настоящее время в качестве такой модели чаще всего используют линейное разностное уравнение с постоянными параметрами a_k и b_k. Подобного рода модель достаточно адекватна для аппроксимации реально встречающихся на практике СП и имеет следующий вид:

Владимир Николаевич Якимов – д.т.н., профессор.
Антон Борисович Филимонов – аспирант.

$$x_n = \sum_{k=0}^{q} b_k u_{n-k} - \sum_{k=1}^{p} a_k x_{n-k} , \qquad (1)$$

где $q \le p$ и u_n – некоторая возбуждающая последовательность, которая выбирается априорно исходя из характера решаемой задачи.

Аппроксимация исследуемого СП с помощью модели (1) приводит к тому, что вычисление оценок его СПМ осуществляется на основе использования следующего соотношения [1]:

$$S_{XX}(f) = S_{UU}(f) \,|\, H(z)\,|^2_{z=j2\pi f} ,$$

где $S_{UU}(f)$ – СПМ последовательности u_n, а $H(z)$ – системная функция.

Системная функция $H(z)$ является рациональной функцией

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{q} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{p} a_k z^{-k}} = \frac{B(z)}{A(z)} .$$

В большинстве случаев принимают, что последовательность u_n является дискретным белым шумом с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией [1]. Тогда $S_{UU}(f) = 1$ и $S_{XX}(f) = |\, H(z)\,|^2_{z=j2\pi f}$. В соответствии с этим оценивание СПМ фактически сводится к выбору порядка модели (1) и оцениванию ее параметров a_k и b_k.

С целью упрощения и повышения эффективности вычислительных процедур рассмотрим подход, позволяющий осуществлять одновременное оценивание параметров a_n и b_n модели (1).

Введем обозначения:

$$c_k = \begin{cases} a_0 = 1, \ \ k = 0; \\ \mathrm{a}_k, \ 1 \le k \le p; \\ b_{k-p-1}, \ \ p+1 \le k \le q+p+1; \end{cases} \qquad (2)$$

$$y_{n,k} = \begin{cases} x_{n-k}, \ \ 0 \le k \le p; \\ u_{n-k+p+1}, \ \ p+1 \le k \le q+p+1. \end{cases}$$

С учетом этих обозначений получаем систему уравнений с неизвестными параметрами c_k

$$\sum_{k=0}^{q+p+1} c_k y_{n,k} = 0 , \qquad (3)$$

где $c_0 = 1$ и $n \in [p, 2p+q]$.

Число уравнений системы (3) минимально и равно числу неизвестных параметров a_k и b_k линейного разностного уравнения (1). Поэтому при ее решении будет наблюдаться повышенная чувствительность оценок этих параметров к исследуемому временному ряду x_n и возбуждающей последовательности u_n.

Получить устойчивые результаты оценивания искомых параметров a_k и b_k можно за счет их статистического сглаживания. Для этого в ходе экспериментальных исследований необходимо располагать дополнительной априорной информацией. Фактически это условие приводит к увеличению числа уравнений в системе (3), то есть число уравнений будет больше числа неизвестных параметров a_k и b_k. Такой подход в статистической теории параметрического оценивания известен и дает результаты, сходящиеся к точным решениям [3].

Увеличивая число уравнений в исходной системе (3), получаем переопределенную систему

$$\sum_{k=0}^{q+p+1} c_k y_{n,k} = 0,$$

где $n \in [p, Q]$ и $Q > 2p + q$.

С целью нахождения наилучших оценок параметров a_k и b_k применим метод наименьших квадратов, согласно которому необходимо обеспечить выполнение равенства минимуму суммы квадратов невязок

$$\Delta\varepsilon^2 = \sum_{n=p}^{Q} \left(\sum_{k=0}^{q+p+1} c_k y_{n,k} \right)^2 = \min.$$

Воспользовавшись необходимым условием существования экстремума, с учетом того, что $c_0 = 1$, получаем

$$\frac{\partial \Delta\varepsilon^2}{\partial c_m} = 2\sum_{n=p}^{Q} \left(\sum_{k=0}^{q+p+1} c_k y_{n,k} \right) y_{n,m} = 0,$$

где $m \in [1, q + p + 1]$.

В полученной системе уравнений изменим порядок суммирования по индексам n и k. Тогда

$$\sum_{k=0}^{q+p+1} c_k \sum_{n=p}^{Q} y_{n,m} y_{n,k} = 0.$$

Введем обозначение

$$\alpha_{m,k} = \sum_{n=p}^{Q} y_{n,m} y_{n,k}. \tag{4}$$

В результате будем иметь

$$\sum_{k=0}^{q+p+1} c_k \alpha_{m,k} = 0, \; m \in [1, q + p + 1].$$

С учетом того, что $c_0 = 1$, окончательно получаем следующую систему уравнений:

$$\sum_{k=1}^{q+p+1} c_k \alpha_{m,k} = -\alpha_{m,0}\,, \tag{5}$$

где $m \in [1, q+p+1]$.

Отметим, что минимальное значение суммы квадратов невязок, которое характеризует погрешность вычисления параметров c_k, равно

$$\Delta\varepsilon^2_{\min} = \sum_{k=0}^{q+p+1} c_k \alpha_{0,k}\,. \tag{6}$$

Из соотношения (4) следует, что величины $\alpha_{m,k}$ удовлетворяют условию $\alpha_{m,k} = \alpha_{k,m}$, то есть они образуют симметричную матрицу

$$\begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} & \ldots & \alpha_{1,q+p+1} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} & \ldots & \alpha_{2,q+p+1} \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} & \ldots & \alpha_{3,q+p+1} \\ \ldots & & & & \\ \alpha_{q+p+1,1} & \alpha_{q+p+1,2} & \alpha_{q+p+1,3} & \ldots & \alpha_{q+p+1,q+p+1} \end{pmatrix}.$$

Симметричность матрицы величин $\alpha_{m,k}$ позволяет для решения системы уравнений (5) воспользоваться компактным методом исключения. Согласно этому методу сформируем матрицы

$$\begin{pmatrix} \beta_{1,1} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \beta_{2,1} & \beta_{2,2} & 0 & \ldots & 0 \\ \beta_{3,1} & \beta_{3,2} & \beta_{3,3} & \ldots & 0 \\ \ldots & & & & \\ \beta_{q+p,1} & \beta_{q+p,2} & \beta_{q+p,3} & \ldots & 0 \\ \beta_{q+p+1,1} & \beta_{q+p+1,2} & \beta_{q+p+1,3} & \ldots & \beta_{q+p+1,q+p+1} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & B_{1,2} & B_{1,3} & B_{1,4} & \ldots & B_{1,q+p} & B_{1,q+p+1} \\ 0 & 0 & B_{2,3} & B_{2,4} & \ldots & B_{2,q+p} & B_{2,q+p+1} \\ 0 & 0 & 0 & B_{3,4} & \ldots & B_{3,q+p} & B_{3,q+p+1} \\ \ldots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & B_{q+p,q+p+1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Величины $\beta_{m,k}$ и $B_{m,k}$ вычисляются следующим образом:

$$\beta_{m,1} = \alpha_{m,1}, \; 1 \le m \le q + p + 1;$$

$$\beta_{m,k} = \alpha_{m,k} - \sum_{j=1}^{k-1} \beta_{m,j} \frac{\beta_{k,j}}{\beta_{j,j}}, \; 2 \le m \le q + p + 1 \text{ и } 2 \le k \le m;$$

$$B_{1,k} = \frac{\alpha_{1,k}}{\alpha_{1,1}}, \; 2 \le k \le q + p + 1;$$

$$B_{m,k} = \frac{\beta_{k,m}}{\beta_{m,m}}, \; 2 \le m \le q + p + 1 \text{ и } m + 1 \le k \le q + p + 1.$$

Матрица величин $B_{m,k}$ представляет собой верхнюю строго треугольную матрицу. В соответствии с этим, а также с учетом того, что $c_0 = 1$, находим параметры c_{q+p+1}, c_{q+p}, …, c_2 и c_1 в указанном порядке из системы уравнений

$$c_m + \sum_{k=m+1}^{q+p+1} c_k B_{m,k} = D_m, \; 1 \le m \le q + p + 1.$$

Величины D_m равны

$$D_1 = -\frac{\alpha_{1,0}}{\alpha_{1,1}} = -B_{1,0};$$

$$D_m = -\frac{1}{\beta_{m,m}} \left(\alpha_{m,0} + \sum_{j=1}^{m-1} \beta_{m,j} D_j \right), \; 2 \le m \le q + p + 1.$$

Фактически имеем

$$c_{q+p+1} = D_{q+p+1};$$

$$c_m = D_m - \sum_{k=m+1}^{q+p+1} c_k B_{m,k}, \; 1 \le m \le q + p.$$

Таким образом, система уравнений (5) решена. После вычисления параметров c_k определяем искомые параметры a_k и b_k:

$$\begin{cases} a_0 = 1, \quad k = 0; \\ a_k = c_k, \; 1 \le k \le p; \\ b_k = c_k, \; p + 1 \le k \le q + p + 1. \end{cases}$$

На рисунке представлена краткая запись схемы алгоритма вычисления оценок параметров a_k и b_k, которая в виде отдельных этапов отражает последовательность решения системы уравнений (5).

$$y[n,k]=\begin{cases} x[n-k], \ 0\le k\le p; \\ u[n-k+p+1], \ \ p+1\le k\le q+p+1. \end{cases}$$

$$\alpha[m,0]=\sum_{n=p}^{Q} y[n,m]y[n,0], \ \ 1\le m\le q+p+1.$$

$$\alpha[m,k]=\sum_{n=p}^{Q} y[n,m]y[n,k],$$
$$0\le m\le q+p+1, \ \ m\le k\le q+p+1.$$
$$\alpha[m,k]=\alpha[k,m].$$

$$\beta[m,1]=\alpha[m,1], \ \ 1\le m\le q+p+1.$$
$$\beta[m,k]=\alpha[m,k]-\sum_{j=1}^{k-1}\beta[m,j]\frac{\beta[k,j]}{\beta[j,j]},$$
$$2\le m\le q+p+1, \ 2\le k\le m.$$

$$B[1,k]=\frac{\alpha[1,k]}{\alpha[1,1]}, \ 2\le k\le q+p+1.$$
$$B[m,k]=\frac{\beta[k,m]}{\beta[m,m]},$$
$$2\le m\le q+p, \ m+1\le k\le q+p+1.$$

$$D[1]=-\frac{\alpha[1,0]}{\alpha[1,1]}=-B[1,0].$$
$$D[m]=-\frac{1}{\beta[m,m]}\left(\alpha[m,0]+\sum_{j=1}^{m-1}\beta[m,j]D[j]\right),$$
$$2\le m\le q+p+1.$$

$$c[0]=1.$$
$$c[q+p+1]=D[q+p+1].$$
$$c[m]=D[m]-\sum_{k=m+1}^{q+p+1}c[m]B[m,k], \ q+p\ge m\ge 1.$$

$$\begin{cases} a[0]=1, \quad k=0; \\ a[k]=c[k], \ 1\le k\le p; \\ b[k]=c[k], \ \ p+1\le k\le q+p+1. \end{cases}$$

Краткая запись схемы алгоритма вычисления оценок параметров линейной разностной модели

Теперь остановимся на вопросе выбора порядка линейной разностной модели (1), то есть выбора таких значений q и p, которые обеспечивали бы достаточно хорошую аппроксимацию исследуемого временного ряда x_n. Так как в большинстве случаев порядок модели заранее неизвестен, то его приходится выбирать путем сравнения нескольких моделей различных порядков. Но для этого следует располагать критерием ошибки приближения, позволяющим судить о степени достоверности сделанного выбора. В качестве простейшего такого критерия можно использовать сумму квадратов невязок $\Delta\varepsilon^2$, так как ее значение находится в прямой зависимости от значений q и p и по мере их приближения к наилучшим значениям уменьшается. Минимальное значение суммы квадратов невязок для заданных значений q и p равно $\Delta\varepsilon^2_{c\min}$ и вычисляется согласно (6). Поэтому для последовательно возрастающих порядков модели будем анализировать разность двух соседних значений суммы квадратов невязок $\Delta\varepsilon^2_{c\min}$. Момент, начиная с которого значение этой разности будет незначительным, может служить показателем правильного или наиболее правдоподобного выбора порядка модели. Однако необходимо отметить, что данный подход дает достаточно субъективную оценку правильности выбора порядка модели. Принятие решения о том, какую разность двух соседних значений величин $\Delta\varepsilon^2_{c\min}$ следует считать достаточно малой, во многом зависит как от конкретного приложения, так и от эмпирического опыта, накопленного исследователем.

В заключение следует отметить два существенных преимущества данного подхода. Во-первых, подобного рода переход (2) обеспечивает одновременное оценивание искомых параметров. Одновременность оцениваемых параметров a_k и b_k повысит быстродействие вычислительных процедур, так как исчезает необходимость вычислять одни параметры через оценки других. Во-вторых, увеличение уравнений в (3) повысило устойчивость оцениваемых параметров a_k и b_k. Это объясняется тем, что избыточность уравнений (что фактически означает избыточность эмпирических данных) ведет к статистическому сглаживанию. В итоге, вследствие статистического сглаживания можно получить кривую СПМ с выраженными особенностями, а также следует подчеркнуть и тот факт, что получение достаточно простого соотношения (6) позволяет оценить необходимый порядок модели, что также становится возможным при переопределенной системе.

Кроме того, следует отметить, что степень улучшения разрешения и повышения достоверности спектральных оценок определяется соответствием выбранной модели анализируемому процессу и возможностью аппроксимации измеряемых данных с помощью нескольких параметров модели (2) [1:215].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Марпл.-мл. С.Л.* Цифровой спектральный анализ и его приложения. – М.: Мир, 1990. – 584 с.
2. *Журбенко И.Г., Кожевникова И.А.* Стохастическое моделирование процессов. - М.: Изд-во МГУ, 1990. – 148 с.
3. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. – М.: Наука; Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. – 288 с.

Статья поступила в редакцию 21 июня 2010 г.

UDC 519.246.27

SPECTRAL POWER DENSITY ESTIMATION WITH PARAMETRICAL STATISTIC SMOOTHING USING OF DIFFERENCE-LINEAR MODEL OF TIME SERIES RANDOM PROCESS

V.N. Yakimov, A.B. Philimonov

Samara State Technical University
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100

The paper refers to parametric evaluation of a random process spectral power density based on building of a linear differential model of random process time series. To obtain stable results of parameter evaluation data smoothing is conducted. The algorithm scheme for desired parameters evaluation is presented..

Keywords: *random process, spectral power density, time series, difference-linear model, override system equation.*

Vladimir N. Yakimov – Doctor of Technical Sciences, Professor.
Anton B. Philimonov – Postgraduate student.