

Машиностроение

УДК 539.3; 532.5; 517.9

О НЕКОТОРЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ «ТРУБОПРОВОД – ДАТЧИК ДАВЛЕНИЯ»¹

П.А. Вельмисов, Ю.В. Покладова

Ульяновский государственный технический университет
432027, Россия, г. Ульяновск, ул. Северный Венец, 32
E-mail: pokladovau@inbox.ru

Рассматриваются математические модели механической системы, включающей в себя трубопровод с рабочей средой и датчик, составной частью которого является упругий элемент. Датчик предназначен для определения давления рабочей среды (например, на выходе из камеры сгорания двигателя), закон изменения которого считается заданным. Получены дифференциальные уравнения, описывающие колебания упругого элемента, и на их основе проведен численный эксперимент по исследованию динамики элемента.

Ключевые слова: трубопровод, датчик давления, деформация, упругий элемент, интегро-дифференциальные уравнения, динамика.

Введение

Независимо от принципа преобразования все датчики давления в той или иной степени критичны к воздействию широкого диапазона температур и повышенных уровней виброускорений. Размещение датчика давления непосредственно на корпусе двигателя принципиально обеспечивает более высокую достоверность измерения, но, как правило, сопровождается воздействием на датчики давления высоких температур и виброускорений. Причем во многих реальных случаях (например, при взлете и посадке аппарата) температура воздействия как на авиационный, так и на ракетный двигатель носит нестационарный характер. В результате датчики подвергаются воздействию нестационарной температуры, повышенных виброускорений, что приводит к погрешности измерений, а в ряде случаев к разрушению упругого чувствительного элемента датчика.

В связи с вышеизложенным, возникает задача проектирования механической системы «трубопровод – датчик давления». В системе датчик расположен на некотором расстоянии от двигателя и соединен с ним с помощью трубопровода, что позволяет ослабить воздействие высоких температур и виброускорений. Задача состоит в получении уравнений, связывающих закон изменения рабочей среды на входе в трубопровод (на выходе из камеры сгорания двигателя) и деформацию упругого элемента датчика, и предназначенных по величине деформации элемента рассчитать давление в двигателе. Математические модели системы «трубопровод – датчик дав-

¹ Работа выполнена в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 годы (НК-177П, ГК №П1183).

Петр Александрович Вельмисов – д.ф.-м.н., профессор.
Юлия Валерьевна Покладова – к.ф.-м.н.

ления» рассматривались в [1-5]. Здесь предложены новые модели системы «трубопровод – датчик давления», отличающиеся или уравнениями, описывающими колебания упругого элемента датчика (нелинейные модели), или геометрией трубопровода.

1. Математические модели механической системы «трубопровод – датчик давления»

Рассматриваются плоские модели механической системы «трубопровод – датчик давления» для трубопровода конечной длины (см. рис.1,а), бесконечно длинного трубопровода (см. рис.1,б) с датчиком, закрепленным на боковой стенке, и бесконечно длинного трубопровода с датчиком, расположенным на стенке полости трубопровода (см. рис.1,в).

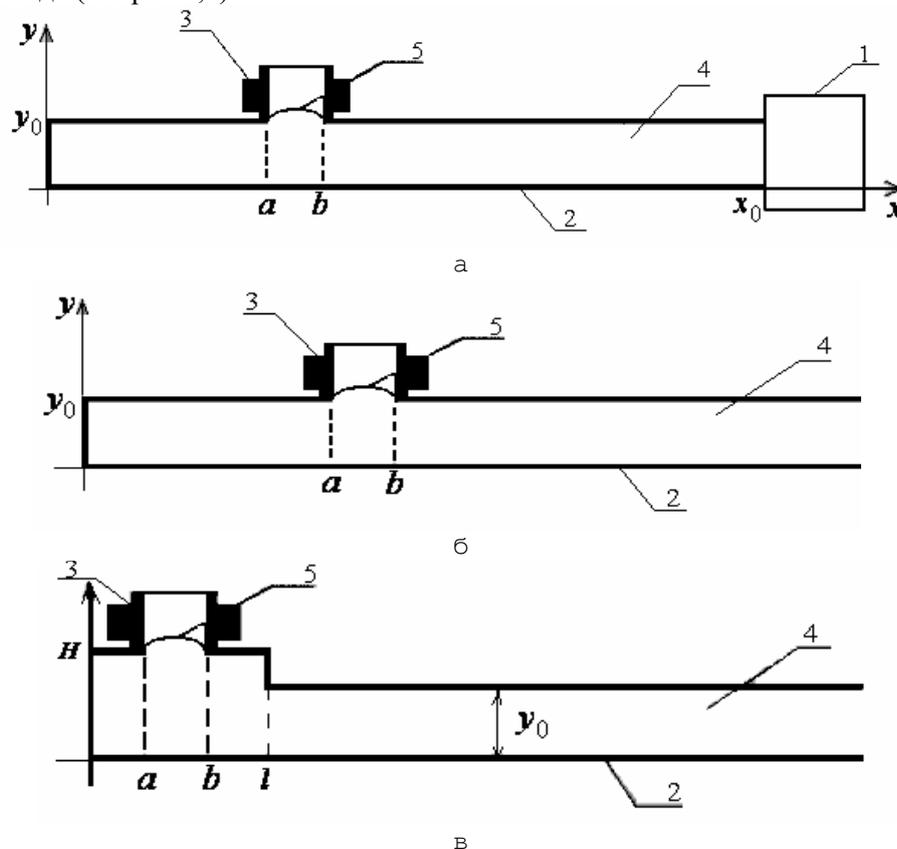


Рис. 1. Схема механической системы:

1 – двигатель, 2 – трубопровод, 3 – датчик, 4 – рабочая среда,
5 – пластина (упругий элемент датчика).

Рассмотрим задачу о динамике упругого элемента датчика давления рабочей среды, расположенного на боковой стенке трубопровода конечной длины (рис.1,а).

В линейной постановке уравнения и граничные условия имеют следующий вид:

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0, \quad (x, y) \in G = \{(x, y): \quad 0 < x < x_0, \quad 0 < y < y_0\}; \quad (1)$$

$$\varphi_y(x, 0, t) = 0, \quad x \in (0, x_0); \quad (2)$$

$$\varphi_x(0, y, t) = 0, \quad y \in (0, y_0); \quad (3)$$

$$\varphi_y(x, y_0, t) = 0, \quad x \in (0, a) \cup (b, x_0); \quad (4)$$

$$\varphi_y(x, y_0, t) = \dot{\omega}(x, t), \quad x \in (a, b); \quad (5)$$

$$\tilde{P} - \rho\varphi_t(x_0, y, t) = P_*(y, t), \quad y \in (0, y_0); \quad (6)$$

$$\begin{aligned} L(\omega) &\equiv M\ddot{\omega} + D\omega'''' + N\omega'' + \alpha\dot{\omega}'''' + \beta\dot{\omega} + \gamma\omega = \\ &= \tilde{P} - P_0(x, t) - \rho\varphi_t(x, y_0, t), \quad x \in (a, b). \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь (1) – уравнение Лапласа, описывающее движение рабочей среды (жидкости) в трубопроводе; (2)-(5) – условия непротекания среды через соответствующие границы; условие (6) задает закон изменения давления на входе в трубопровод; (7) – уравнение динамики пластины; $\varphi(x, y, t)$ – потенциал скорости среды; $\omega(x, t)$ – прогиб упругого элемента; $P_*(y, t)$ – закон распределения давления среды в сечении $x = x_0$ (на выходе из двигателя); $P_0(x, t)$ – распределенная внешняя нагрузка, действующая на упругий элемент; x_0, y_0 – продольный и поперечный размеры трубопровода; a, b – координаты концов упругого элемента; \tilde{P} – давление рабочей среды в трубопроводе в состоянии покоя; ρ – плотность среды; M – погонная масса; D – изгибная жесткость; N – сжимающее (растягивающее) усилие; α, β – коэффициенты внутреннего и внешнего демпфирования; γ – коэффициент жесткости основания; точка и штрих, также как и индексы t и y снизу, обозначают частную производную по t и y соответственно.

Если продольный размер трубопровода x_0 значительно превосходит его поперечный размер y_0 , то можно считать $x_0 = +\infty$ (рис.1,б). Для модели, изображенной на рис. 1,б, линеаризованные уравнения и граничные условия имеют следующий вид:

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0, \quad (x, y) \in G = \{(x, y) : 0 < x < +\infty, 0 < y < y_0\}; \quad (8)$$

$$\varphi_y(x, 0, t) = 0, \quad x \in (0, +\infty); \quad (9)$$

$$\varphi_y(x, y_0, t) = 0, \quad x \in (0, a) \cup (b, +\infty); \quad (10)$$

$$\varphi_x(0, y, t) = 0, \quad y \in (0, y_0); \quad (11)$$

$$\varphi_y(x, y_0, t) = \dot{\omega}(x, t), \quad x \in (a, b); \quad (12)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\varphi_x^2 + \varphi_y^2) = 0; \quad (13)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\tilde{P} - \rho\varphi_t) = P_*(t); \quad (14)$$

$$\begin{aligned} L(\omega) &\equiv M\ddot{\omega} + D\omega'''' + N\omega'' + \alpha\dot{\omega}'''' + \beta\dot{\omega} + \gamma\omega = \\ &= \tilde{P} - P_0(x, t) - \rho\varphi_t(x, y_0, t), \quad x \in (a, b). \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь $P_*(t)$ – закон изменения давления на входе в трубопровод; $P_0(x, t)$ – распределенная внешняя нагрузка.

В линейной постановке, соответствующей малым прогибам упругого элемента и малым возмущениям потенциала скорости рабочей среды, математическая модель, геометрическая схема которой изображена на рис.1,в, определяется следующими уравнениями и граничными условиями:

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0, \quad (x, y) \in G_0; \quad (16)$$

$$\varphi_y(x, 0, t) = 0, \quad x \in (0, \infty); \quad (17)$$

$$\varphi_y(x, y_0, t) = 0, \quad x \in (l, \infty); \quad (18)$$

$$\varphi_x(0, y, t) = 0, \quad y \in (0, H); \quad (19)$$

$$\varphi_x(l, y, t) = 0, \quad y \in (y_0, H); \quad (20)$$

$$\varphi_y(x, H, t) = 0, \quad x \in (0, a) \cup (b, l); \quad (21)$$

$$\varphi_y(x, H, t) = \dot{\omega}(x, t), \quad x \in (a, b); \quad (22)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (P_* - \rho\varphi_t(x, y, t)) = P(t), \quad y \in (0, y_0); \quad (23)$$

$$\begin{aligned} L(\omega) &\equiv M\ddot{\omega} + D\omega'''' + N\omega'' + \alpha\dot{\omega}'''' + \beta\dot{\omega} + \gamma\omega = \\ &= P_* - \rho\varphi_t(x, H, t) - P_0(x, t), \quad x \in (a, b). \end{aligned} \quad (24)$$

Постановка задач (1) – (7), (8) – (15), (16) – (24) соответствует линейной теории аэрогидроупругости, когда динамика жидкости (газа), а также динамика чувствительного элемента датчика описываются линейными уравнениями.

Линейные математические модели системы «трубопровод – датчик давления» рассматривались в [1 – 5]. В данной статье авторами предлагаются нелинейные модели, которые определяются приведенными выше уравнениями (1) – (6), (8) – (14), (16) – (23), при этом в уравнениях (7), (15), (24), описывающих динамику пластины, дифференциальный оператор $L(\omega)$ заменяется следующим:

$$L(\omega) \equiv M\ddot{\omega} + \left(\frac{D\omega''}{[1 + (\omega')^2]^{\frac{3}{2}}} \right)'' + N\omega'' + \alpha\dot{\omega}'''' - \delta\ddot{\omega}'' + \beta\dot{\omega} + \varepsilon\dot{\omega}^3 + \gamma\omega + \mu\omega^3.$$

Полагая прогибы малыми, заменим $\frac{1}{[1 + (\omega')^2]^{\frac{3}{2}}}$ на $(1 - \frac{3}{2}(\omega')^2)$. В результате получим

$$\begin{aligned} L(\omega) &\equiv M\ddot{\omega} + D\omega'''' - \frac{3}{2}D\omega''''(\omega')^2 - 9D\omega'\omega''\omega'''' - 3D(\omega'')^3 + N\omega'' + \alpha\dot{\omega}'''' - \\ &- \delta\ddot{\omega}'' + \beta\dot{\omega} + \gamma\omega + \mu\omega^3 + \varepsilon\dot{\omega}^3. \end{aligned} \quad (25)$$

2. Сведение задачи к исследованию уравнения для функции деформации упругого элемента

В случае трубопровода конечной длины (рис.1,а) решение аэрогидродинамической задачи осуществлялось на основе метода Фурье, при этом потенциал скорости рабочей среды был представлен в виде ряда.

В результате получено уравнение, связывающее закон изменения давления $P_*(y, t)$ рабочей среды на входе в трубопровод ($x = x_0$) и функцию прогиба $\omega(x, t)$ упругого элемента датчика, расположенного в сечении $x = 0$:

$$L(\omega) = -P_0(x, t) + \frac{1}{y_0} \int_0^{y_0} P_*(y, t) dy - \frac{2\rho}{x_0} \sum_{n=1}^{\infty} \cos(\lambda_n x) \frac{cth(\lambda_n y_0)}{\lambda_n} \int_a^b \ddot{\omega}(x, t) \cos(\lambda_n x) dx +$$

$$+ \frac{2}{y_0} \sum_{n=1}^{\infty} ch(v_n x) \frac{\cos(v_n y_0)}{ch(v_n x_0)} \int_0^{y_0} P_*(y, t) \cos(v_n y) dy, \quad (26)$$

$$v_n = \frac{n\pi}{y_0}, \quad \lambda_n = \frac{(2n-1)\pi}{2x_0}.$$

Это уравнение выражает связь между прогибом $\omega(x, t)$ упругого элемента датчика и законом изменения давления $P_*(y, t)$ на входе в трубопровод.

В случае бесконечно длинного трубопровода (рис.1,б, рис.1,в) на основе методов теории функций комплексного переменного (с помощью интеграла Кристоффеля-Шварца, формул Шварца и Сохоцкого) получено уравнение, связывающее закон изменения давления $P(t)$ на входе в трубопровод и деформацию $\omega(x, t)$ упругого элемента датчика.

Для модели, изображенной на рис.1,б, имеем

$$L(\omega) = P_*(t) - P_0(x, t) + \frac{\rho}{\pi} \int_a^b \ddot{\omega}(s, t) \ln \left| \operatorname{ch} \frac{\pi s}{y_0} - \operatorname{ch} \frac{\pi x}{y_0} \right| ds, \quad (27)$$

а для модели, изображенной на рис.1,в –

$$L(\omega) = P(t) - P_0(x, t) - \frac{\rho}{\pi} \int_a^b \ddot{\omega}(\tau, t) \ln \left| \frac{\xi(\tau) - n}{\xi(\tau) - \xi(x)} \right| d\tau, \quad x \in (a, b), \quad (28)$$

где $\xi(x)$ – функция, обратная к функции $x(\xi) = C_0 \int_0^{\xi} \sqrt{\frac{m-s}{s(1-s)}} \frac{ds}{n-s}$, $\xi \in [0, 1]$. Концы интервала (α, β) определяются из условий: $x(\alpha) = a$, $x(\beta) = b$. Параметры C_0 , m , n выражаются через параметры l , y_0 , H .

3. Решение уравнения для деформации

Согласно методу Галеркина, решение $\omega(x, t)$ уравнений (26), (27), (28) ищется в

виде $\omega(x, t) = \sum_{k=1}^m \omega_k(t) g_k(x)$, где $\{g_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ – полная на $[a, b]$ система базисных функций, удовлетворяющих граничным условиям, соответствующим условиям закрепления пластины.

Например, в случае жесткого защемления концов пластины ($\omega = 0, \omega' = 0$, при $x = a, x = b$) решение уравнений (26), (27), (28) будем искать в

виде $\omega(x, t) = \sum_{k=1}^m \omega_k(t) \psi_k(x)$, где

$$\psi_k(x) = \frac{\operatorname{ch}(\mu_k(x-a)) - \cos(\mu_k(x-a)) - \frac{\operatorname{ch}(\mu_k(b-a)) - \cos(\mu_k(b-a))}{\operatorname{sh}(\mu_k(b-a)) - \sin(\mu_k(b-a))} (\operatorname{sh}(\mu_k(x-a)) - \sin(\mu_k(x-a)))}{\operatorname{sh}(\mu_k(b-a)) - \sin(\mu_k(b-a))}$$

при этом μ_k находятся из уравнения $\operatorname{ch}(\mu_k(b-a))\cos(\mu_k(b-a))=1$ ($k=1, \dots, m$).

Функции $\{\psi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ ортогональны на $[a, b]$, т.е. $\int_a^b \psi_i(x)\psi_j(x)dx = 0$ при $i \neq j$. Мож-

но показать, что $\int_a^b \psi_i^2(x)dx = b-a$.

Для шарнирного закрепления концов пластины ($\omega = 0, \omega'' = 0$ при $x = a, x = b$)

можно положить $\omega(x, t) = \sum_{k=1}^m \omega_k(t) \sin \beta_k(x-a)$, где $\beta_k = \frac{\pi k}{b-a}$.

Из условия ортогональности невязки уравнений (26), (27), (28) к системе базисных функций $\{g_k(x)\}_{k=1}^m$ получим систему из m обыкновенных дифференциальных уравнений для $\omega_k(t)$ ($k=1, \dots, m$).

Например, для модели, изображенной на рис.1,в, получим систему из m обыкновенных дифференциальных уравнений для $\omega_k(t)$ (шарнирное закрепление концов пластины, $a=0, b=l, \lambda_k = \pi k/l$):

$$\sum_{k=1}^m A_{ik} \ddot{\omega}_k(t) + B_i \dot{\omega}_i(t) + C_i \omega_i(t) + F_i(t) = 0,$$

где $A_{ik} = \frac{\rho}{\pi} \int_0^l \left(\int_0^l \ln \left| \frac{\xi(\tau) - n}{\xi(\tau) - \xi(x)} \right| \sin \lambda_k \tau d\tau \right) \sin \lambda_i x dx, \quad i \neq k,$

$$A_{ii} = M \frac{l}{2} + \frac{\rho}{\pi} \int_0^l \left(\int_0^l \ln \left| \frac{\xi(\tau) - n}{\xi(\tau) - \xi(x)} \right| \sin \lambda_i \tau d\tau \right) \sin \lambda_i x dx, \quad i = k,$$

$$B_i = \frac{l}{2} (\alpha \lambda_i^4 + \beta), \quad C_i = \frac{l}{2} (D \lambda_i^4 - N \lambda_i^2 + \gamma),$$

$$F_i(t) = \int_0^l P_0(x, t) \sin \lambda_i x dx + P(t) \frac{1 - (-1)^i}{\lambda_i},$$

$$i, k = 1, \dots, m.$$

4. Численное моделирование

Для всех рассмотренных моделей задача Коши для систем из m обыкновенных дифференциальных уравнений решается с помощью системы Mathematica 7.0. Проведено численное моделирование на ЭВМ динамики упругого элемента датчика в зависимости от закона изменения давления в двигателе. Исследовалась деформация элемента как функция времени (в фиксированных точках элемента) и как функция координаты (в фиксированные моменты времени) для различных параметров механической системы.

Пример. Рассмотрим модель, изображенную на рис.1,а (жесткое закрепление концов упругого элемента, нелинейная модель). Рабочая среда – вода ($\rho = 10^3 \text{ кг/м}^3$), пластина изготовлена из алюминия ($E = 7 \cdot 10^{10} \text{ Па}$, $\nu = 0,36$, $\rho_0 = 2,7 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, $h = 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ м}$).

Для значений параметров $x_0 = 0,3 \text{ м}$, $y_0 = 0,015 \text{ м}$, $a = 0 \text{ м}$, $b = 0,015 \text{ м}$, $M = 4,05 \text{ кг/м}^2$, $D = 22,619 \text{ Дж}$, $N = 10^3 \text{ Н}$, $\alpha = 0,5 \text{ м} \cdot \text{кг/с}$, $\beta = 0,3 \text{ кг/м}^2 \cdot \text{с}$, $\gamma = 0,2 \text{ кг/м}^2 \cdot \text{с}^2$, $N1 = 15$, $\delta = 0 \text{ кг/м}$, $\varepsilon = 0 \text{ кг} \cdot \text{с/м}^4$, $\mu = 0 \text{ кг/м}^4 \cdot \text{с}^2$, $\omega(x,0) = 0 \text{ м}$, $\dot{\omega}(x,0) = 0 \text{ м/с}$, $P_0(x,t) = 0 \text{ Па}$, $P_*(y,t) = 10^5(10 + \cos(10t)) \text{ Па}$ получено решение для функции $\omega(x,t) = \sum_{k=1}^2 \omega_k(t) \psi_k(x)$ в точке $x_* = \frac{a+b}{2}$ (рис.2):

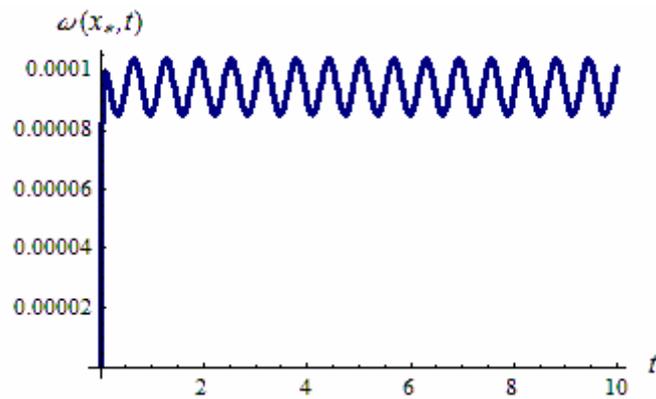


Рис. 2

Прогибы упругого элемента в фиксированные моменты времени $t = t_0$ для нелинейной модели представлены на рис.3.

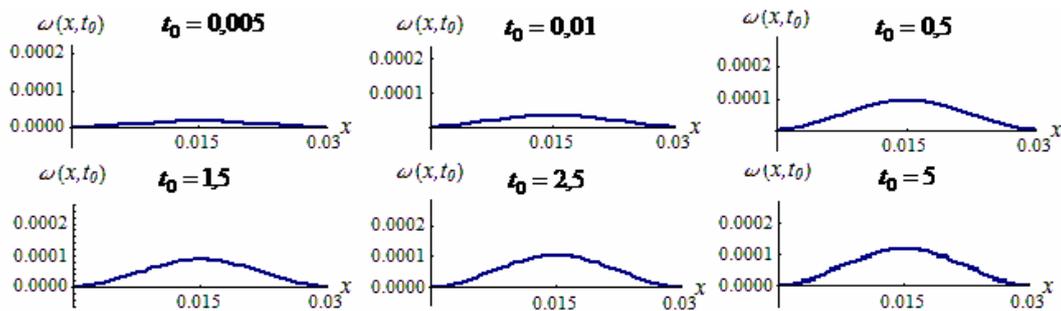


Рис. 3

На рис.2, 3 представлены графики, полученные при численном моделировании на ЭВМ в случае нелинейной модели для трубопровода конечной длины с упругим элементом на боковой стенке (рис.1,а). Линейная модель рассматривалась в [1, 5]. Графики для линейной и нелинейной моделей для одних и тех же значений параметров механической системы существенно различаются (в частности, в нелинейной модели происходит увеличение деформации). Можно сделать вывод, что учет нели-

нейных членов в уравнении, описывающем динамику пластины, имеет важное значение при исследовании динамики чувствительного элемента.

Заклучение

Развитие авиационной техники требует постоянного совершенствования и разработки новых типов первичных преобразователей, в частности, датчиков давления. Поэтому естественным образом возникает актуальная задача разработки специальных методов исследования динамики и устойчивости упругих элементов датчиков давления, взаимодействующих с жидкостью. Предложенные авторами новые модели, методика решения задач аэрогидроупругости и их численная реализация существенно позволяют дополнить базу современного проектирования датчиков давления и усовершенствовать ее.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Vel'misov P. A., Pokladova Yu. V.* An investigation of mathematical models of a mechanical system "Pipeline-Pressure Sensor" // Romai Journal. Pitești, Romania. 2005. v.2, №1. – P.214-219.
2. *Vel'misov P. A., Pokladova Yu. V.* Investigation of dynamics of an elastic element of a pressure sensor // Applications of Mathematics in Engineering and Economics. – Soft trade, Sofia, Bulgaria. 2006. – P.51-57.
3. *Анкилов А. В., Вельмисов П.А., Горбоконенко В.Д., Покладова Ю.В.* Математическое моделирование механической системы «трубопровод-датчик давления» / Ульяновск: УлГТУ, 2008. 188с.
4. *Анкилов А. В., Вельмисов П.А., Покладова Ю.В.* Математические модели механической системы «трубопровод-датчик давления» // Вестник Саратовского государственного технического университета. 2007. №3. С.7-14.
5. *Вельмисов П.А., Горбоконенко В.Д., Решетников Ю.А.* Математическое моделирование механической системы «трубопровод – датчик давления» // Датчики и системы. 2003. №6(49). С.12-15.
6. *Вельмисов П.А., Покладова Ю.В.* О некоторых математических моделях механической системы «трубопровод – датчик давления» // Proceeding of the international conference "Education, science and economics at universities. Integration to international education area" (Poland, Plock, 20.09.10 – 25.09.10). – Plock: NOVUM, 2010. – P.492-499.

Статья поступила в редакцию 24 февраля 2011 г.

UDC 539.3; 532.5; 517.9

ON SOME MATHEMATICAL MODELS OF MECHANICAL SYSTEM "PIPELINE – PRESSURE SENSOR"

P.A. Velmisov, Yu.V. Pokladova

Ulyanovsk State Technical University
32, Severny Venets st., Ulyanovsk, 432027

In this work the mathematical models of the mechanical system including the pipeline with a working medium and the sensor with the elastic element are considered. The sensor is intended for determination of pressure of a working medium (for example, on an output from the camera of combustion of the engine) law of change of which is considered set. The differential equations describing oscillations of an elastic element are received, and on their basis numerical experiment on research of dynamics of an element is made.

Keywords: *pipeline, pressure sensor, deformation, elastic element, integro-differential equations, dynamics.*

*Petr A. Velmisov – Doctor of Physics and Mathematics, Professor.
Yulia V. Pokladova – Candidate of Physics and Mathematics.*