

СТРУКТУРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА МЕТОДИЧЕСКОГО ИНДУКЦИОННОГО НАГРЕВА

А.И. Данилушкин, А.В. Кожемякин, А.П. Мостовой

Самарский государственный технический университет
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244

Процесс методического индукционного нагрева дискретно перемещающихся через индуктор цилиндрических заготовок рассматривается как объект управления с управляющим воздействием в виде мощности внутренних источников тепла. Определены передаточные функции объекта с распределенными параметрами относительно сосредоточенного управляющего воздействия и возмущающих воздействий в виде потока тепловых потерь. Предложена структурная модель рассматриваемого объекта как совокупности ограниченных цилиндров с общей для граничащих цилиндров поверхностью контакта на торцах.

Ключевые слова: индукционный нагрев, внутренние источники, структурная модель, распределенная система.

Математическая модель процесса методического нагрева системы ограниченных цилиндров внутренними источниками тепла. Для нагрева цилиндрических заготовок в технологических линиях горячей обработки на деформирующем оборудовании применяются индукционные нагревательные установки методического действия, в которых заготовки перемещаются дискретно. В индукторе одновременно находятся N заготовок. Для относительно протяженных заготовок температуры поверхностей контакта смежных заготовок могут существенно отличаться. Это, в свою очередь, оказывает значительное влияние на температурное распределение по длине заготовки. В связи с этим обстоятельством нагрев длиномерных заготовок наряду с температурным перепадом по сечению нагреваемого изделия характеризуется неравномерным температурным распределением по длине заготовки в процессе перемещения ее через нагреватель, что может привести к существенному отклонению температурного распределения заготовки, находящейся на выходе из индуктора. В этом случае для оценки температурного распределения по длине необходимо решать двумерную тепловую задачу, которая позволит определить распределение температуры как по длине, так и по радиусу. Исходя из физической сущности рассматриваемой задачи при моделировании процесса методического нагрева был принят ряд допущений, позволивших получить удовлетворительную точность описания температурного поля с помощью аналитических методов:

- 1) электромагнитные процессы принимаются безынерционными;
- 2) электрофизические и теплофизические характеристики материала заготовки для каждого интервала постоянства нагрева остаются неизменными, изменяясь лишь при переходе на следующую позицию;
- 3) функция распределения мощности по координате x в пределах каждой заготовки принимается неизменной, равной единице.

Используя известные методы решения электромагнитной задачи, можно получить выражения для определения функции распределения мощности внутренних ис-

*Александр Иванович Данилушкин – д.т.н., профессор.
Андрей Владимирович Кожемякин – аспирант.
Алексей Павлович Мостовой – магистрант.*

точников тепла по объему тепловыделяющего цилиндра в виде точных аналитических выражений или их аппроксимаций при численном методе решения для объектов индукционного нагрева с ферромагнитными массами [1].

С учетом принятых допущений математическая модель процесса методического индукционного нагрева дискретно перемещающихся цилиндрических заготовок для каждой n -ой заготовки может быть представлена в виде [2]

$$\frac{\partial T_n(r, x, t)}{\partial t} = a \left[\frac{\partial^2 T_n(r, x, t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial T_n(r, x, t)}{\partial r} + \frac{\partial^2 T_n(r, x, t)}{\partial x^2} \right] + \frac{1}{c\gamma} F(r) \cdot U(t). \quad (1)$$

Начальные условия:

$$T_n(r, x, 0) = T_n^0(r, x); \quad (2)$$

граничные условия:

$$\lambda \left. \frac{\partial T_n(r, x, t)}{\partial r} \right|_{r=R} = q_1(t); \quad (3)$$

$$\lambda \left. \frac{\partial T_n(r, x, t)}{\partial r} \right|_{r=0} = 0; \quad (4)$$

$$\lambda \left. \frac{\partial T_n(r, x, t)}{\partial x} \right|_{x=0} = q_2(t); \quad (5)$$

$$\lambda \left. \frac{\partial T_n(r, x, t)}{\partial x} \right|_{x=L} = q_3(t), \quad (6)$$

где $T_n(r, x, t)$ – температурное поле n -ой заготовки;

r, x – радиальная и аксиальная координаты заготовки соответственно, $r \in [0, R]$,
 $x \in [0, L]$;

a – коэффициент температуропроводности;

c, γ – теплоемкость и удельная плотность металла заготовок соответственно;

λ – коэффициент теплопроводности;

$n = 1, 2, \dots, N$ – число заготовок в нагревателе;

$F(r)$ – функция распределения внутренних источников тепла по радиусу заготовки;

$U(t)$ – мощность внутренних источников тепла;

R – радиус заготовки;

L – длина заготовки.

Тепловые потери $q_2(t)$ и $q_3(t)$ с торцов заготовки определяются разностью температур граничащих слева и справа заготовок, причем при перемещении заготовок слева направо с левого торца заготовки имеет место отток тепла, а с правого торца – приток тепла от более нагретой заготовки.

Начальное распределение температуры по объему заготовки на входе в индуктор принимается равномерным, равным температуре окружающей среды. На практике начальное температурное распределение можно принять равным нулю:

$$T(r, x, 0) = T_0 = 0. \quad (7)$$

Решение задачи (1) – (6) – в виде суммы [2, 3, 5]

$$T_n(r, x, t) = \theta_{1n}(r, t) + \theta_{2n}(x, t) \quad (8)$$

двух одномерных полей: $\theta_{1n}(r, t)$ – неограниченного цилиндра и $\theta_{2n}(x, t)$ – неограниченной пластины, каждое из которых моделируется соответствующими уравнениями теплопроводности [2, 3]:

а) для бесконечного цилиндра

$$\frac{\partial \theta_{1n}(r, t)}{\partial t} = a \left[\frac{\partial^2 \theta_{1n}(r, t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \theta_{1n}(r, t)}{\partial r} \right] + \frac{1}{c\gamma} F(r) \cdot U(t) \quad (9)$$

с начальными и граничными условиями

$$\theta_{1n}(r, 0) = \theta_{1n}^0(r); \quad (10)$$

$$\lambda \frac{\partial \theta_{1n}(r, t)}{\partial r} \Big|_{r=R} = q_1(t); \quad (11)$$

$$\lambda \frac{\partial \theta_{1n}(r, t)}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0, \quad (12)$$

б) для пластины

$$\frac{\partial \theta_{2n}(x, t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 \theta_{2n}(x, t)}{\partial x^2} + \frac{1}{c\gamma} U(t) \quad (13)$$

с начальными и граничными условиями

$$\theta_{2n}(x, 0) = \theta_{2n}^0(x); \quad (14)$$

$$\lambda \frac{\partial \theta_{2n}(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=X_{n-1}} = q_2(t); \quad (15)$$

$$\lambda \frac{\partial \theta_{2n}(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=X_n} = q_3(t). \quad (16)$$

Эквивалентная система уравнений, соответствующая исходной модели процесса методического нагрева дискретно перемещающихся ограниченных цилиндров в стандартной форме с нулевыми начальными и однородными граничными условиями, принимает вид

$$\frac{\partial \theta_{1n}(r, t)}{\partial t} = a \left[\frac{\partial^2 \theta_{1n}(r, t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \theta_{1n}(r, t)}{\partial r} \right] + w_1(r, t); \quad (17)$$

$$\theta_{1n}(r, 0) = 0; \quad \lambda \frac{\partial \theta_{1n}(r, t)}{\partial r} \Big|_{r=R} = 0; \quad \lambda \frac{\partial \theta_{1n}(r, t)}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0;$$

$$\frac{\partial \theta_{2n}(x, t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 \theta_{2n}(x, t)}{\partial x^2} + w_2(x, t); \quad (18)$$

$$\theta_{2n}(x,0) = 0; \quad \lambda \left. \frac{\partial \theta_{2n}(x,t)}{\partial x} \right|_{x=X_{n-1}} = 0; \quad \lambda \left. \frac{\partial \theta_{2n}(x,t)}{\partial x} \right|_{x=X_n} = 0,$$

где $w_1(r,t)$ и $w_2(x,t)$ – стандартизирующие функции соответственно для задач (9) ÷ (12) и (13) ÷ (16), которые записываются в виде [4]:

– для задачи (9) ÷ (12)

$$w_1(\rho, t - \tau) = \theta_{1n}^0(\rho) \cdot \delta(\tau) + q_1(\tau) \cdot \frac{a}{\lambda} \cdot \delta(\rho - R) + \frac{1}{c\gamma} F(\rho) U(\tau); \quad (19)$$

– для задачи (13) ÷ (16)

$$w_2(\xi, t - \tau) = \theta_{2n}^0(\xi) \cdot \delta(\tau) + q_2(\tau) \cdot \frac{a}{\lambda} \cdot \delta(\xi - X_{n-1}) + q_3(\tau) \cdot \delta(\xi - X_n) + \frac{1}{c\gamma} U(\tau). \quad (20)$$

Здесь $\rho, r - \xi, x$ – пространственные входные и выходные координаты для цилиндра и пластины соответственно.

Импульсная переходная функция для задач (17), (18) может быть найдена из решения соответствующих уравнений:

– для бесконечного цилиндра

$$\frac{\partial \theta_{1n}(r,t)}{\partial t} = a \left[\frac{\partial^2 \theta_{1n}(r,t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \theta_{1n}(r,t)}{\partial r} \right] + \frac{1}{c\gamma} \delta(r - \rho) \cdot \delta(t); \quad (21)$$

$$\theta_{1n}(r,0) = 0; \quad \lambda \left. \frac{\partial \theta_{1n}(r,t)}{\partial r} \right|_{r=R} = 0; \quad \lambda \left. \frac{\partial \theta_{1n}(r,t)}{\partial r} \right|_{r=0} = 0;$$

– для пластины

$$\frac{\partial \theta_{2n}(x,t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 \theta_{2n}(x,t)}{\partial x^2} + \frac{1}{c\gamma} \delta(x - \xi) \cdot \delta(t); \quad (22)$$

$$\theta_{2n}(x,0) = 0; \quad \lambda \left. \frac{\partial \theta_{2n}(x,t)}{\partial x} \right|_{x=X_{n-1}} = 0; \quad \lambda \left. \frac{\partial \theta_{2n}(x,t)}{\partial x} \right|_{x=X_n} = 0.$$

Применяя к (21) конечное интегральное преобразование Ханкеля по радиальной координате, а к (22) – конечное интегральное cos-преобразование Фурье, получим соответствующие выражения для функции Грина в виде [5]:

$$G_{1n}(r, \rho, t) = \frac{2}{c\gamma R^2} + \frac{2}{c\gamma R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \rho J_0(\mu_n \rho) \frac{J_0(\mu_n r)}{J_0^2(\mu_n R)} e^{-a\mu_n^2 t}; \quad (23)$$

$$G_{2n}(x, \xi, t - \tau) = \frac{1}{L} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right) \cos\left(\frac{\pi n \xi}{L}\right) \cdot e^{-\frac{a\pi^2 n^2}{L^2} t} \right]. \quad (24)$$

Таким образом, температурное распределение в каждой n -ой заготовке принимает вид

$$\begin{aligned}
T_n(r, x, t) = & \int_0^R G_{1n}(r, \rho, t) \theta_{1n}^0(\rho) d\rho + \frac{1}{c\gamma} \int_0^t \int_0^R G_{1n}(r, \rho, t - \tau) F(\rho) U(\tau) d\rho d\tau + \\
& + \frac{1}{c\gamma} \int_0^t G_{1n}(r, \rho, t - \tau) q(\tau) d\tau + \int_0^L G_{2n}(x, \xi, t) \theta_{2n}^0(\xi) d\xi + \\
& + \frac{1}{c\gamma} \int_0^t \int_0^L G_{2n}(x, \xi, t - \tau) H(\xi) U(\tau) d\xi d\tau + \frac{1}{c\gamma} \int_0^t G_{2n}(x, \xi, t - \tau) q_2(\tau) d\tau + \\
& + \frac{1}{c\gamma} \int_0^t G_{2n}(x, \xi, t - \tau) q_3(\tau) d\tau.
\end{aligned} \tag{25}$$

Полученное выражение позволяет вычислить температурное поле ограниченно-го цилиндра при произвольном характере распределения внутренних источников тепла в любой момент времени и в любой точке по объему нагреваемого изделия.

Структурное представление процесса методического нагрева системы ограниченных цилиндров внутренними источниками тепла. Объект управления согласно представлению (8) можно рассматривать как параллельное соединение распределенных блоков с общим сосредоточенным входом $U(p)$ и передаточными функциями, определяемыми через функцию Грина для каждого блока [4, 5].

Передаточная функция для бесконечного цилиндра по каналу «управляющее воздействие – температурное распределение по радиальной координате» может быть получена на основании функции Грина (23) в следующем виде:

$$W_{1n}(r, \rho, p) = \frac{2}{c\gamma R^2 p} + \frac{2}{c\gamma R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \rho J_0(\mu_n \rho) \frac{J_0(\mu_n r)}{J_0^2(\mu_n R)} \frac{1}{(p + a\mu_n^2)}. \tag{26}$$

Передаточная функция для бесконечной пластины по каналу «управляющее воздействие – температурное распределение по аксиальной координате» может быть получена по аналогии на основании функции Грина (24) в следующем виде:

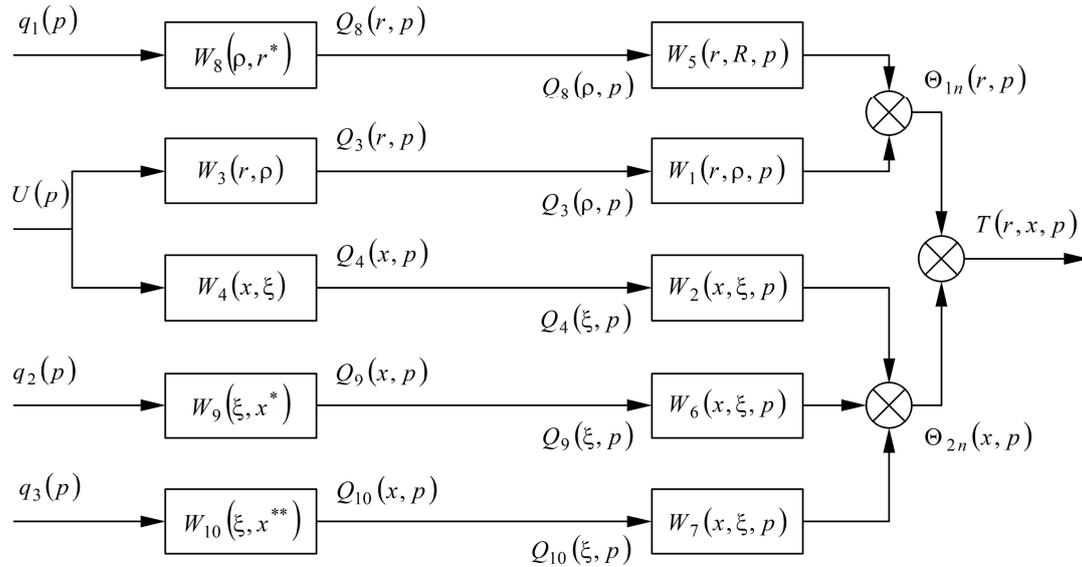
$$W_{2n}(x, \xi, p) = \frac{1}{L} \left[\frac{1}{p} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right) \cos\left(\frac{\pi n \xi}{L}\right) \cdot \frac{1}{p + \frac{a\pi^2 n^2}{L^2}} \right]. \tag{27}$$

Таким образом, каждая из представленных передаточных функций представляет собой параллельное соединение одного интегрирующего и бесконечной суммы апериодических звеньев первого порядка с убывающими по мере возрастания n постоянными времени $\frac{1}{a\mu_n^2}$ для цилиндра и $\frac{L^2}{a\pi^2 n^2}$ для пластины. Коэффициенты передачи апериодических звеньев для цилиндра и пластины зависят от координат r, ρ и x, ξ соответственно.

Граничные условия в рассматриваемой задаче можно представлять как внешние возмущающие воздействия в виде теплового потока с поверхностей. Передаточные функции относительно этих возмущающих воздействий имеют аналогичный (26), (27) вид. Отличие заключается лишь в замене входных координат ρ и ξ на координаты поверхностей соответственно цилиндра R , левого X_{n-1} и правого X_n торцов

заготовки [5]. Структурная схема процесса нагрева для n -ого цилиндра представлена на рис. 1.

Здесь $W_1(r, \rho, p)$ – передаточная функция распределенного блока вида (26) по каналу «управляющее воздействие – температурное поле бесконечного цилиндра», в качестве которого рассматривается мощность источников внутреннего тепловыделения $U(p)$, $W_2(x, \xi, p)$ – передаточная функция распределенного блока вида (27) по каналу «управляющее воздействие – температурное поле пластины».



Р и с. 1. Структурная модель процесса нагрева цилиндра внутренними источниками

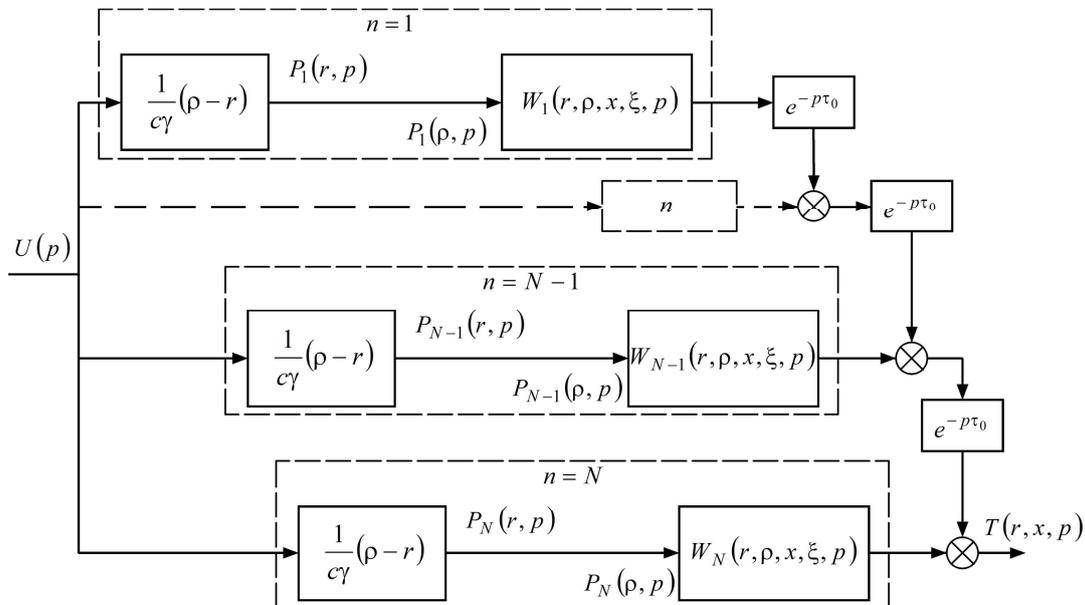
$W_3(r, \rho) = \frac{1}{c\gamma} \delta(r - \rho)$, $W_4(x, \xi) = \frac{1}{c\gamma} \delta(x - \xi)$ – передаточные функции статических

переходных блоков, преобразующих сосредоточенный сигнал на входе в виде мощности внутреннего тепловыделения $U(p)$ в распределенный сигнал по радиальной r и аксиальной x координатам цилиндра соответственно [5], $W_5(r, R, p)$, – передаточная функция распределенного блока вида (26) по каналу «тепловой поток – температурное поле цилиндра», $W_6(x, X_{n-1}, p)$, $W_7(x, X_n, p)$ – передаточная функция распределенного блока вида (27) по каналу «тепловой поток – температурное поле пластины», $W_8(\rho, R) = \frac{1}{c\gamma} \delta(\rho - R)$, $W_9(\xi, 0) = \frac{1}{c\gamma} \delta(\xi - X_{n-1})$, $W_{10}(\xi, 0) = \frac{1}{c\gamma} \delta(\xi - X_n)$ – передаточные функции статических переходных блоков, преобразующих сосредоточенные сигналы на входе в виде теплового потока с боковой поверхности, а также с левого и правого торцов цилиндра соответственно в распределенный сигнал.

Если в индукторе $U(p)$ находится n заготовок, перемещающихся дискретно с периодом τ_0 , то все они находятся под воздействием сосредоточенного управляющего сигнала в виде мощности внутреннего тепловыделения $U(p)$ в процессе движения их от входа к выходу. Структурная модель процесса формирования температурного поля при методическом индукционном нагреве совокупности дискретно перемещающихся цилиндров с сосредоточенным управляющим воздействием в виде

мощности внутреннего тепловыделения, полученная на основании выражений (26), (27), представлена на рис. 2.

Здесь $W_n(r, \rho, x, \xi, p)$ – передаточная функция ограниченного цилиндра по каналу «мощность внутреннего тепловыделения – температура». В физически реализуемой системе управления в качестве управляемой величины обычно рассматривается температура в какой-либо фиксированной точке, доступной для контроля.



Р и с. 2. Структурная модель процесса методического нагрева совокупности цилиндров

Для методического нагревателя в качестве такой точки можно рассматривать точку с координатами $r^* \in [0, R]$, $x^* = X_N$, где X_N – координата торца N -ой заготовки на выходе из нагревателя. Поскольку наиболее интересным и важным с точки зрения синтеза систем управления является исследование поведения объекта в динамике при вариации мощности источников нагрева, структура объекта определена по каналу «мощность источников внутреннего тепловыделения – температура объекта». В этом случае передаточная функция ограниченного цилиндра по каналу «мощность внутреннего тепловыделения – температура в фиксированной точке с координатами (r^*, x^*) на выходе из нагревателя» принимает вид:

$$W(r^*, \rho, x^*, \xi, p) = \frac{2}{c\gamma R^2 p} + \frac{2}{c\gamma R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \rho J_0(\mu_n \rho) \frac{J_0(\mu_n r^*)}{J_0^2(\mu_n R)} \frac{1}{(p + a\mu_n^2)} + \frac{1}{L} \left[\frac{1}{p} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{\pi n x^*}{L} \cos \frac{\pi n \xi}{L} \cdot \frac{1}{p + \frac{a\pi^2 n^2}{L^2}} \right]. \quad (28)$$

В том случае, когда теплопередачей с торцов заготовок можно пренебречь, математическая модель процесса индукционного нагрева цилиндра может быть пред-

ставлена в виде одномерного линейного неоднородного уравнения относительно радиального температурного распределения.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Немков В.С., Демидович В.Б. Теория и расчет устройств индукционного нагрева. – Л.: Энергоатомиздат, Ленингр. отд-е, 1988. – 280 с.
2. Рапопорт Э.Я. Оптимизация процессов индукционного нагрева металла. – М.: Металлургия, 1993. – 279 с.
3. Лыков А.В. Теория теплопроводности. – М.: Высшая школа, 1967. – 590 с.
4. Бутковский А.Г. Структурная теория распределенных систем. – М.: Наука, 1977. – 224 с.
5. Рапопорт Э.Я. Структурное моделирование объектов и систем с распределенными параметрами. – М.: Высшая школа, 2003. – 299 с.

Статья поступила в редакцию 25 января 2011 г.

UDC 621.365

STRUCTURAL MODELING OF PROCESS OF METHODOICAL INDUCTION HEATING

A.I. Danilushkin, A.V. Kozhemyakin, A.P. Mostovoy

Samara State Technical University
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100

Complex of the finite cylinders discretely moving from an input to an output with one control action in the form of power of internal sources of heat is considered as subject to control. Transfer functions of object with the distributed parameters in relation to the concentrated control action and perturbations in the form of a stream of heat losses are found. The structural model of the distributed object is offered as a complex of the finite cylinders with general surface of contact at the end, considering presence of a heat transfer from surfaces due to a difference of temperatures of bounding workpieces.

Keywords: *induction heating, internal source, structural mode, distributed system.*

*Alexander I. Danilushkin – Doctor of Technical Sciences, Professor.
Andrey V. Kozhemyakin – Postgraduate student.
Aleksy P. Mostovoy – Graduate student.*