

## **СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНЫХ ПРАВИЛ РАБОТЫ РЕГУЛЯТОРА В СИСТЕМЕ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ НЕГОЛОНОМНЫМ ИНТЕГРАТОРОМ**

***Г.Н. Рогачев***

Самарский государственный технический университет  
443100, г. Самара, Молодогвардейская, 244  
E-mail: [grogachev@mail.ru](mailto:grogachev@mail.ru)

*В статье рассматривается метод решения задачи оптимального синтеза императивной модели регулятора как системы правил вида «условие – действие». Рассмотрен прямой метод синтеза – псевдоспектральный метод Гаусса. Приводится пример использования этого метода для решения задачи оптимального синтеза системы управления нелинейным неголономным интегратором.*

**Ключевые слова:** *оптимальный синтез, императивная форма, система продукций, регулятор, неголономный интегратор.*

Императивная форма описания регуляторов предполагает задание системы продукций как набора правил вида «условие – действие». В основе такого набора лежат наиболее существенные элементы, характеризующие поведение регулятора. Анализ поведения регулятора, работающего в рамках компьютерной системы управления, позволяет выделить две циклически сменяющиеся фазы его работы. Пока ни в самой системе, ни в ее «окружении» ничего не происходит, реакции системы управления отсутствуют. Это – фаза ожидания. Появление стимула, воздействия внешнего (сгенерированного средой) и/или внутреннего (сгенерированного самой системой – ее управляемой или управляющей частью) вызывает ответную реакцию. Под реакцией следует понимать либо изменение, либо, по крайней мере, попытку изменения каких-либо характеристик управляемого процесса. Это – фаза реагирования. Поведение конкретного регулятора характеризуется правилами его перехода от фазы ожидания к фазе реагирования и способом определения реакции этого регулятора на тот или иной стимул. Условие – логическое высказывание. Оно определяет правило перехода регулятора от фазы ожидания к фазе реагирования. Действие – правило вычисления реакции системы управления на стимул.

Вычислительный потенциал императивной модели регулятора достаточно велик. Возможности используемой в ней системы продукций эквивалентны возможностям машины Тьюринга, т. е. в ней можно реализовать любую вычислимую функцию [1]. Такая модель достаточно универсальна и пригодна для описания регуляторов различных классов систем управления. Условие может включать время (что справедливо для систем с дискретным временем, к которым можно отнести все компьютерные системы управления), состояние (в случае систем с дискретными событиями, релейных и проч.), пространственные координаты (для систем с распределенными управляющими параметрами) или их комбинацию. Действие – вычисление управляющего воздействия – может осуществляться по различным алгоритмам, характерным для того или иного закона управления. Системы продукции представляют собой мощное средство описания достаточно сложных вариантов поведения, что можно использовать при моделировании гибридных, антропоморфных и интеллек-

туальных систем управления [2]. Таким образом, резкая граница между системами с линейными регуляторами и системами с нелинейными регуляторами, системами с нечеткими регуляторами и системами с нейросетевыми регуляторами, дискретными по уровню и дискретными по времени системами, оптимальными системами и системами стабилизации, присущая традиционному подходу, отсутствует.

Императивное представление регулятора близко по форме к компьютерной программе на том или ином императивном языке программирования, т. е. описывает задачу управления как вычислительную. При исследовании соответствующей модели регулятора будет одновременно подвергаться верификации и валидации алгоритм и программа его работы. Распространение такой формы описания будет способствовать открытости кода в области программного обеспечения промышленных регуляторов.

Императивная форма представления регулятора позволяет производить анализ влияния различных возмущающих факторов на качество работы системы управления [3]. Среди них – меняющиеся по случайному закону временные задержки и потеря части информации при передаче сигналов от датчиков к регулятору и от регулятора к исполнительным устройствам, шумовая составляющая, которая накладывается на эти сигналы. Эти эффекты, особенно присущие распределенным сетевым системам управления, легко находят отражение в условиях и действиях системы продукции. Аналогично обстоит дело и с учетом эффекта квантования сигналов в системе по времени и по уровню. Кроме того, императивная форма позволяет осуществлять анализ поведения систем управления как во временной, так и в частотной области.

Процедура синтеза регулятора может быть описана единообразно. Вне зависимости от конкретной задачи определению подлежит количество элементов системы продукции (пар типа «условие – действие») и ее наполнение. При определении в процессе синтеза системы продукции можно заранее задать разрешенный набор составляющих ее компонентов (допустимый тезаурус элементов-условий и элементов-действий). Процесс синтеза можно организовать с использованием полученных эмпирически или аналитически правил, знаний экспертов. Возможно использование эволюционных методов синтеза, в частности генетического программирования.

В современных условиях, когда большинство систем управления техническими средствами строится на базе компьютерной техники, приоритетным направлением теории управления является исследование гибридных систем. В таких системах непрерывно изменяющиеся компоненты отражают физические законы, технологические или технические принципы, а дискретно меняющиеся моделируют работу устройств управления. Важнейшим этапом проектирования таких гибридных систем является разработка цифровых законов управления непрерывными объектами. Известно несколько подходов к решению этой задачи [4, 5]. Среди них – переоборудование регулятора (синтез непрерывного регулятора и последующая его аппроксимация дискретной моделью), дискретизация объекта (построение дискретной модели непрерывного объекта и последующий синтез дискретного регулятора методами теории дискретных систем) и прямой синтез цифрового регулятора для непрерывного объекта без каких-либо упрощений и аппроксимаций. Первые два подхода являются приближенными и фактически означают замену одной задачи другой с целью применить известные результаты теории непрерывных или дискретных систем. В первом случае игнорируется наличие цифровой части (импульсного элемента, дискретного регулятора и экстраполятора). Однако дискретизация полученного аналогового регулятора иногда не позволяет добиться желаемого эффекта. При использо-

вании второго подхода не учитывается поведение системы в промежутках между моментами квантования, что может дать принципиально неверные результаты, например, вследствие скрытых колебаний. Поскольку приближенные методы проектирования могут приводить к неработоспособным решениям, на современном этапе в теории систем управления основное внимание уделяется прямым методам анализа и синтеза [6, 7]. В качестве одной из основных при разработке прямых методов синтеза оптимальных цифровых регуляторов можно выделить проблему создания методов, применимых к широкому классу задач и обладающих вычислительной надежностью.

Использование императивной формы описания регулятора и непрерывной модели объекта обеспечивает такую возможность. Так, в работе [8] был предложен метод синтеза системы продукций как императивной формы описания регулятора. Этот подход основан на совместном использовании методов конечномерной оптимизации для поиска моментов срабатывания регулятора и числа срабатываний (т. е. количества правил системы продукций и части «условие» каждого из них) и базирующейся на достаточных условиях оптимальности аналитической процедуры поиска на каждом из временных интервалов закона управления с полной обратной связью (части «действие» каждого из правил). Такой метод позволяет решать задачи синтеза управления линейными объектами, оптимального по квадратичному критерию качества. Однако попытка использовать его для решения более широкого круга задач сопряжена с рядом проблем, подчас трудноразрешимых. Так, затруднен синтез системы продукций регулятора, управляющего нелинейным объектом. Причина – невозможность установления в этом случае аналитического выражения для функции Беллмана. Определенные трудности представляет синтез системы продукций регулятора при наличии ограничений на фазовые переменные и управляющие воздействия.

Частично снять эти проблемы можно при использовании альтернативного варианта, в основе которого – один из прямых методов решения задач оптимального управления, псевдоспектральный метод Гаусса [9]. В этой разновидности метода коллокаций, применяя дискретизацию непрерывной задачи Больца посредством аппроксимации переменных состояния и управляющих переменных интерполяционными полиномами, сводят ее к задаче нелинейного программирования, которая далее решается известными методами.

Этим способом может быть решена задача достаточно общего вида. А именно, пусть управляемый процесс состоит из  $P$  этапов с номерами  $p = (1, \dots, P)$ . Требуется минимизировать функционал

$$J = \sum_{p=1}^P J^{(p)} = \sum_{p=1}^P [\Phi^{(p)}(x^{(p)}(t_0), t_0, x^{(p)}(t_f), t_f, q^{(p)}) + \int_{t_0^{(p)}}^{t_f^{(p)}} L^{(p)}(x^{(p)}(t), u^{(p)}(t), t, q^{(p)}) dt]$$

с учетом динамических ограничений

$$\dot{x}^{(p)} = f^{(p)}(x^{(p)}, u^{(p)}, t, q^{(p)}),$$

граничных условий

$$\phi_{\min} \leq \Phi^{(p)}(x^{(p)}(t_0), t_0^{(p)}, x^{(p)}(t_f), t_f^{(p)}, q^{(p)}) \leq \phi_{\max},$$

ограничений в виде неравенств

$$C^{(p)}(x^{(p)}(t), u^{(p)}(t), t, q^{(p)}) \leq 0$$

и условий непрерывности фазовых переменных в точках «сочленения» этапов

$$P^{(s)}(x^{(p_i^s)}(t_f), t_f^{(p_i^s)}, q^{(p_i^s)}, x^{(p_u^s)}(t_0), t_0^{(p_u^s)}, q^{(p_u^s)}) = 0 \quad (p_u^s, p_i^s \in [1 \dots L]).$$

Здесь  $x^{(p)}(t) \in R^{n_p}$ ,  $u^{(p)}(t) \in R^{m_p}$ ,  $q^{(p)}(t) \in R^{q_p}$  и  $t \in R$  – соответственно состояние, управление, параметры и время на этапе  $p \in [1, \dots, P]$ ,  $L$  – количество «сочленений» этапов,  $p_i^s \in [1, \dots, L]$  и  $p_u^s \in [1, \dots, L]$  – номер «левого» и «правого» «сочлененных» этапов соответственно.

В результате решения определяется набор оптимальных программных управлений  $u^{(p)}(t) \in R^{m_p}$ ,  $p = (1, \dots, P)$ . Структура этого управления определяет количество правил императивной модели регулятора как число интервалов постоянства закона изменения оптимального управления.

Указанным способом был решен ряд задач синтеза оптимальной системы productions регулятора САУ неголономным интегратором, модель которого имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{X} &= u_1 \cos \Theta; \\ \dot{Y} &= u_1 \sin \Theta; \\ \dot{\Theta} &= u_2. \end{aligned}$$

На управляющее воздействие  $u_2$  наложено ограничение вида  $u_2 \in [-1, 1]$ . Управляющее воздействие  $u_1$  также ограничено,  $u_1 \in [0, 1]$  (машина Дубинса) или  $u_1 \in [-1, 1]$  (машина Ридса-Шеппа).

*Задача 1.* Определить систему productions программного регулятора, переводящего машину Дубинса из начальной точки  $x(0) = (0, 0, 0)$  в конечную точку  $x(t_f) = (-3, 3, 3\pi/4)$  за минимальное время  $J = t_f \rightarrow \min$ .

*Задача 2.* Решить задачу 1 для машины Ридса-Шеппа.

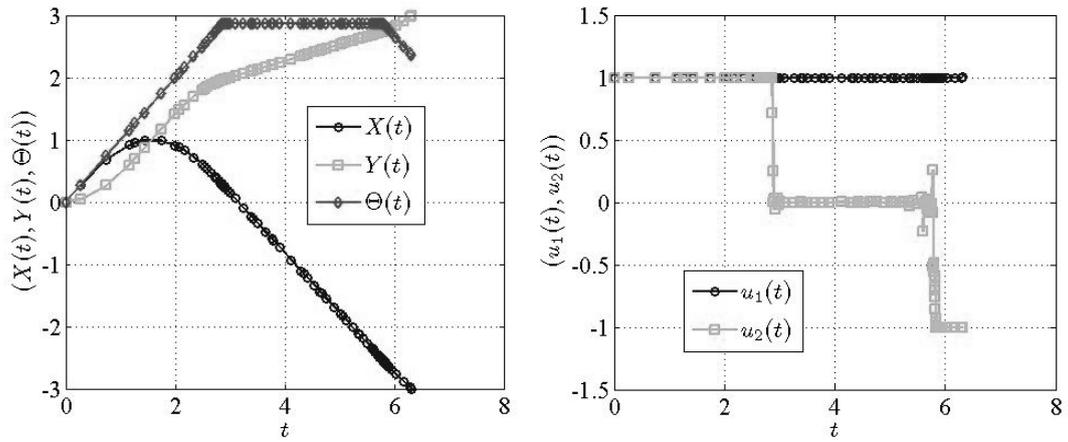
Результаты решения задач 1 и 2 представлены на рис. 1-3. Значение критерия качества для задачи 1  $J = 6.32$ . В этом случае система productions содержит три правила «условие – действие», которые имеют следующий вид:

- «если  $[t \in [0, 2.83]]$ , то  $u_1 = 1, u_2 = 1$ »;
- «если  $[t \in (2.83, 5.85)]$ , то  $u_1 = 1, u_2 = 0$ »;
- «если  $[t \in (5.85, 6.32)]$ , то  $u_1 = 1, u_2 = -1$ ».

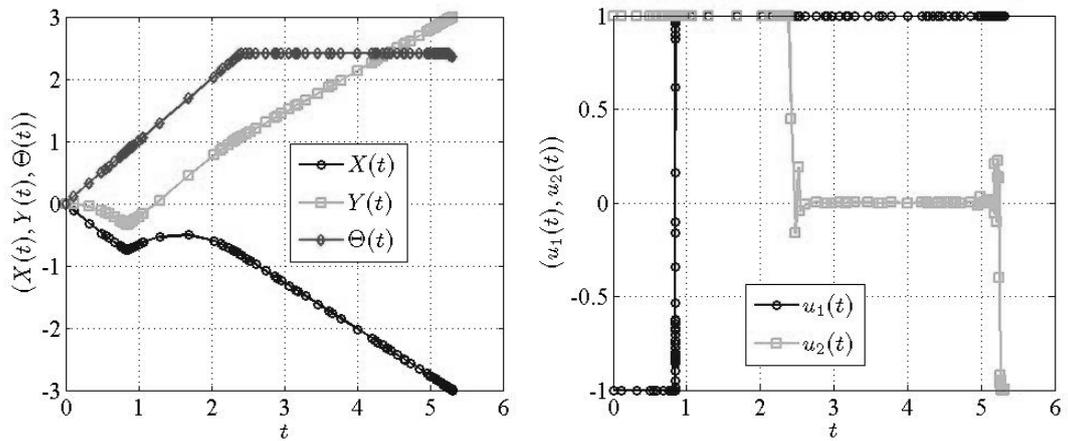
Значение критерия качества для задачи 2  $J = 5.31$ . Для этой задачи система productions содержит также три правила, их вид:

- «если  $[t \in [0, 0.87]]$ , то  $u_1 = -1, u_2 = 1$ »;
- «если  $[t \in (0.87, 2.41)]$ , то  $u_1 = 1, u_2 = 1$ »;
- «если  $[t \in (2.41, 5.31)]$ , то  $u_1 = 1, u_2 = 0$ ».

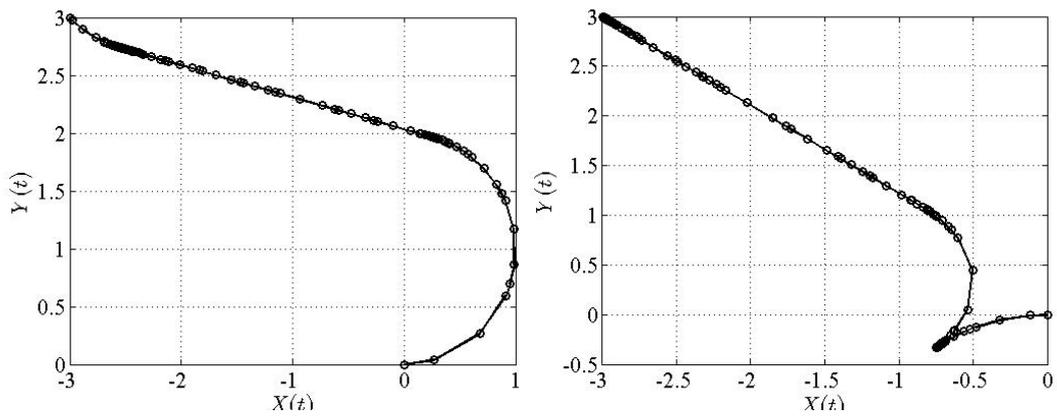
*Задача 3.* Определить систему productions программного регулятора, переводящего машину Ридса – Шеппа из начальной точки  $x(t_0) = (0, 0, 0)$  в конечную точку  $x(t_f) = (1, 1, 0)$  за минимальное время  $J = t_f \rightarrow \min$ .



Р и с . 1. Графики изменения переменных состояния и управляющих воздействий (задача 1)



Р и с . 2. Графики изменения переменных состояния и управляющих воздействий (задача 2)



Р и с . 3. Графики перемещения неголономного интегратора на плоскости  $X - Y$  (задача 1 и задача 2)

**Задача 4.** Решить задачу 3 при наличии ограничения на траекторию движения вида  $(X - 0.5)^{10} + (Y - 0.6)^{10} \geq 0.5^{10}$ .

Результаты решения задач 3 и 4 представлены на рис. 4-5. Значение критерия качества для задачи 4  $J = 2.23$ . В этом случае система производства содержит четыре правила «условие – действие», которые имеют следующий вид:

- «если  $[t \in [0, 0.19]$ , то  $u_1 = -1, u_2 = 1$ »;
- «если  $[t \in (0.19, 1.08]$ , то  $u_1 = 1, u_2 = 0$ »;
- «если  $[t \in (1.08, 2.00]$ , то  $u_1 = 1, u_2 = -1$ »;
- «если  $[t \in (2.00, 2.23]$ , то  $u_1 = -1, u_2 = -1$ ».

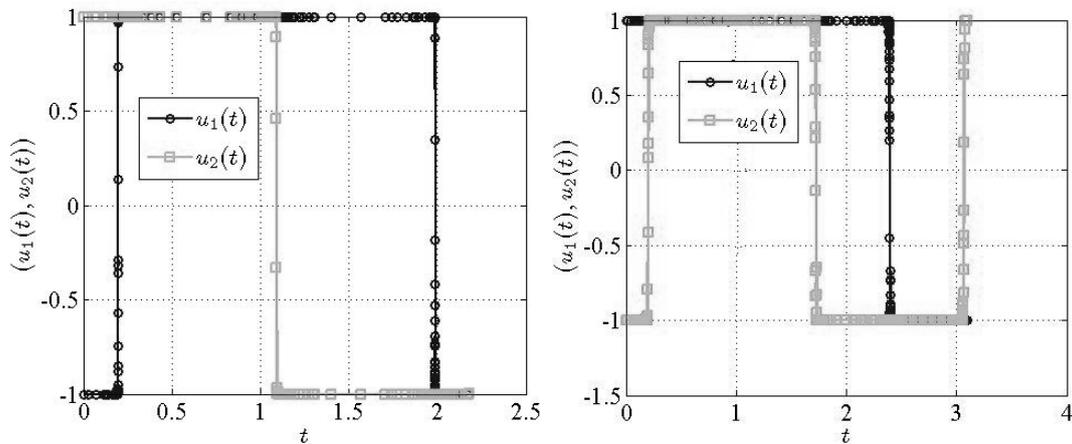


Рис. 4. Графики изменения управляющих воздействий (задача 3 и задача 4)

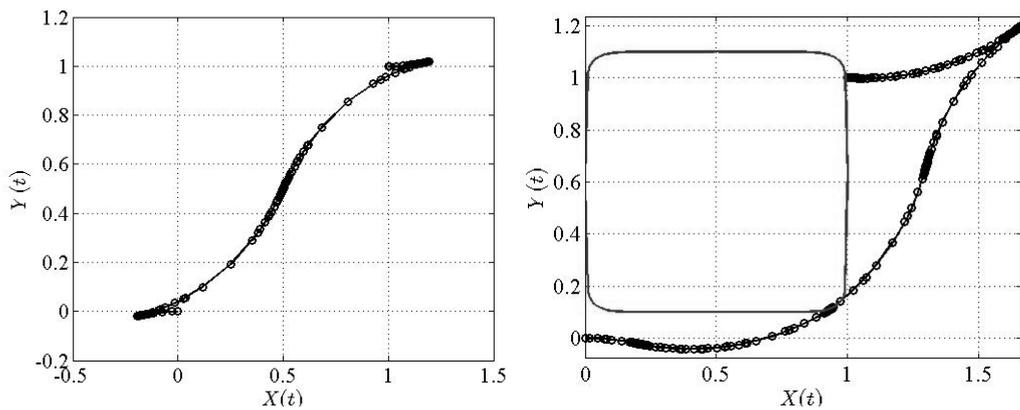


Рис. 5. Графики перемещения неголономного интегратора на плоскости X-Y (задача 3 и задача 4)

Значение критерия качества для задачи 2  $J = 3.08$ . Для этой задачи система производства содержит также четыре правила, их вид:

- «если  $[t \in [0, 0.23]$ ; то  $u_1 = 1, u_2 = -1$ »;
- «если  $[t \in (0.23, 1.68]$ ; то  $u_1 = 1, u_2 = 1$ »;
- «если  $[t \in [1.68, 2.34]$ ; то  $u_1 = 1, u_2 = -1$ »;
- «если  $[t \in (2.34, 3.08]$ , то  $u_1 = -1, u_2 = -1$ ».

*Задача 5.* Определить систему продукций программного регулятора, переводящего машину Дубинса из начальной точки  $x(t_0) = (0, 0, 0)$  в конечную точку  $x(t_f^2) = (0, 4, 0)$  через промежуточную точку  $x(t_f^1) = (0, 4, 0)$  за минимальное время  $J = t_f^2 \rightarrow \min$ .

*Задача 6.* Определить систему продукций программного регулятора, переводящего машину Ридса – Шеппа из начальной точки  $x(t_0) = (0, 0, 0)$  в конечную точку  $x(t_f^2) = (0, 4, 0)$  через промежуточную точку  $x(t_f^1) = (0, 4, 0)$  за минимальное время  $J = t_f^2 \rightarrow \min$ .

Результаты решения задач 5 и 6 представлены на рис. 6-8. Значение критерия качества для задачи 5  $J = 6.28$ . В этом случае система продукции содержит два правила «условие – действие», которые имеют следующий вид:

- «если  $[t \in [0, 3.14]$ , то  $u_1 = 1, u_2 = 1$ »;
- «если  $[t \in (3.14, 6.28]$ , то  $u_1 = 1, u_2 = -1$ ».

Значение критерия качества для задачи 6  $J = 4.76$ . Для этой задачи система продукции содержит пять правил:

- «если  $[t \in [0, 0.32]$ , то  $u_1 = -1, u_2 = 1$ »;
- «если  $[t \in (0.32, 1.91]$ , то  $u_1 = 1, u_2 = 1$ »;
- «если  $[t \in [1.91, 2.52]$ , то  $u_1 = 1, u_2 = 0$ »;
- «если  $[t \in [2.52, 2.92]$ , то  $u_1 = 1, u_2 = -1$ »;
- «если  $[t \in (2.92, 4.76]$ , то  $u_1 = 1, u_2 = 0$ ».

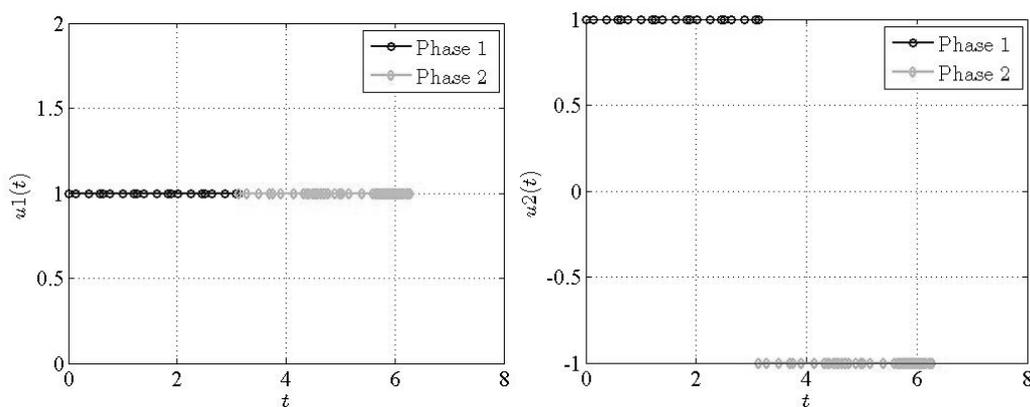
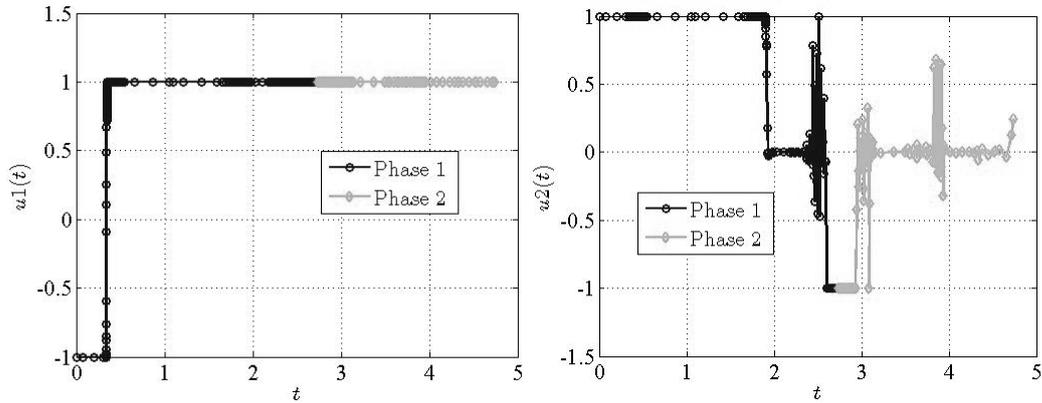
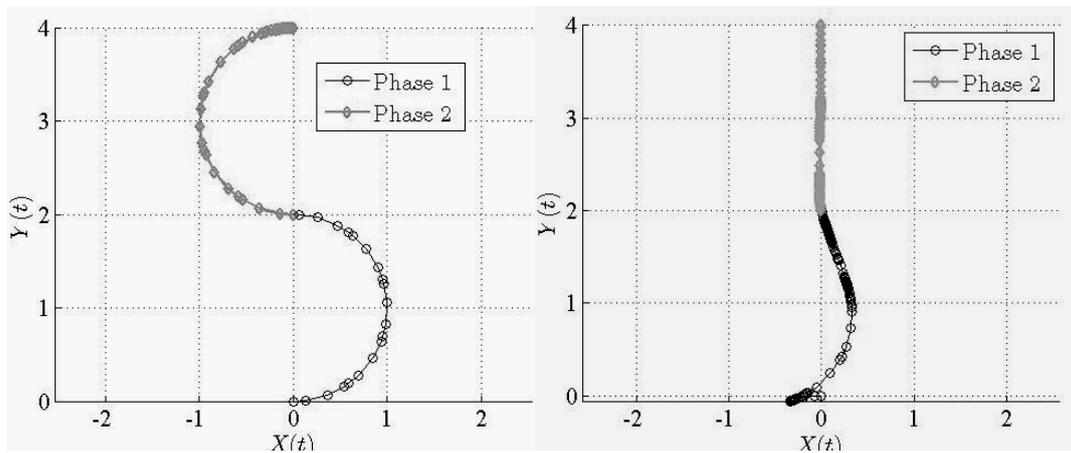


Рис. 6. Графики изменения управляющих воздействий (задача 5)



Р и с . 7. Графики изменения управляющих воздействий (задача 6)



Р и с . 8. Графики перемещения неголономного интегратора на плоскости  $X$ - $Y$  (задача 5 и задача 6)

Анализ приведенных результатов позволяет констатировать, что псевдоспектральный метод Гаусса позволяет осуществить синтез системы productions регулятора, управляющего нелинейным объектом, при наличии ограничений на фазовые переменные и управляющие воздействия, а также в случае многоэтапных процессов.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Anderson J.R.* Language, memory, and thought. – Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 1976. – 291 p.
2. *Рогачев Г.Н.* Императивные модели регуляторов компьютерных систем управления и их Stateflow-реализация // Материалы V Международной научной конференции «Проектирование инженерных и научных приложений в среде MATLAB». – Харьков, 2011. – С. 51-67.
3. *Рогачев Г.Н.* Использование гибридно-автоматного метода для описания систем автоматизации и управления // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2009. – №12. – С. 14-19.
4. *Остром К., Виттенмарк Б.* Системы управления с ЭВМ. – М.: Мир, 1987. – 480 с.
5. *Джури Э.И.* Импульсные системы автоматического регулирования. – М.: Физматгиз, 1963. – 456 с.
6. *Розенwasser Е.Н.* Линейная теория цифрового управления в непрерывном времени. – М.: Наука, 1994. – 455 с.

7. Поляков К.Ю. Основы теории цифровых систем управления. – СПб.: СПбГМТУ, 2006. – 161 с.
8. Рогачев Г.Н., Егоров В.А. Численно-аналитическая процедура оптимального синтеза гибридных систем. – Вестник Самар. гос. техн. ун-та. Сер. Технические науки. – №7 (28). – 2010. – С. 32-36.
9. Benson D.A. A Gauss Pseudospectral Transcription for Optimal Control, Ph.D. Dissertation, Department of Aeronautics and Astronautics, MIT, November 2004. – 244 p.

*Статья поступила в редакцию 31 мая 2011 г.*

UDC 621.8

## **SYNTHESIS OF OPTIMAL OPERATION OF THE REGULATOR IN THE AUTOMATIC CONTROL OF NONHOLONOMIC INTEGRATOR**

***G.N. Rogachev***

Samara State Technical University  
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100

*The article discusses the method of solving the problem of optimal synthesis of controller's imperative model as a system of rules «condition – action». A direct method of optimal synthesis – Gauss pseudospectral method is considered. Examples of using this method for solving the problem of optimal control system synthesis for nonlinear nonholonomic integrator are given.*

***Keywords:*** *optimal synthesis, the imperative form, production system, controller, non-holonomic integrator.*