

ИССЛЕДОВАНИЕ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ ДИСКА ГАЗОТУРБИННОГО ДВИГАТЕЛЯ¹

И.А. Данилушкин, А.А. Московцев

Самарский государственный технический университет
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244
E-mail: idanilushkin@mail.ru

В статье изложена процедура нахождения передаточной функции температурного поля диска как объекта с распределенными параметрами. Рассматривается постановка двумерной задачи в полярных координатах. Тепловые потери с торцевых поверхностей диска учтены как функция теплового потока, зависящая от температуры поверхности. Выполнено моделирование поведения теплового поля диска для случая непрерывно действующих теплоисточников.

Ключевые слова: *диск газотурбинного двигателя, термопластическое упрочнение, математическая модель температурного поля диска, объект с распределенными параметрами, функция Грина.*

Усталостное разрушение деталей газотурбинных двигателей, таких как валы, лопатки, диски турбин, является основной причиной выхода их из строя. В конструкции турбины соединение рабочих лопаток с пазом диска является крайне напряженным и ответственным местом. Соединение передает на диск все нагрузки, которые под действием центробежных сил влияют на лопатку. Долговечность паза диска во многом определяется качеством поверхностного слоя, для упрочнения которого могут быть применены различные методы. Одним из таких методов является термопластическое упрочнение, включающее две стадии: нагрев до заданной температуры и последующее спрейерное охлаждение. При этом нагрев должен осуществляться с заданной точностью, определяемой технологией процесса термопластического упрочнения. Учет ряда конструктивных ограничений, с одной стороны, и требований к снижению энергопотребления, с другой, привели к созданию установки термопластического упрочнения елочного паза дисков турбоагрегатов [1, 2]. Применение индукционного нагрева для нагрева края диска позволяет, варьируя форму индуктора, получить желаемое температурное распределение на нагреваемом участке. Однако для решения задач выбора оптимальной формы индуктора и оптимального управления процессом термопластического упрочнения необходимо разработать модель температурного поля, учитывающую пространственную распределенность теплоисточников по поверхности нагреваемого диска.

Полученная в работе [3] математическая модель температурного поля диска в полярных координатах не учитывает потери с торцевых поверхностей диска. Эти потери могут быть учтены в модели двумя способами: 1) путем охвата передаточной функции, полученной в [3], распределенной обратной связью по температуре и нахождением передаточной функции замкнутой системы; 2) за счет добавления сла-

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ №09-08-00297-а, №10-08-00754-а; ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009-2013 годы», заявка НК-66П/11, заявка 2010-1.3.1-230-009/8; АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы», проект №2.1.2/4236.

*Иван Александрович Данилушкин – к.т.н., докторант.
Антон Андреевич Московцев – аспирант.*

гаемого, описывающего потери с торцевых поверхностей, в исходную постановку задачи моделирования. Ниже рассмотрен второй способ.

Температурное поле диска в полярных координатах описывается уравнением теплопроводности:

$$\frac{\partial T(r, \theta, t)}{\partial t} = a \cdot \left[\frac{\partial^2 T(r, \theta, t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T(r, \theta, t)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T(r, \theta, t)}{\partial \theta^2} \right] + \frac{1}{c\gamma} w(r, \theta, t) - \frac{1}{c\gamma} q(r, \theta, t),$$

$$0 \leq r \leq R, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad t > 0, \quad (1)$$

где $T(r, \theta, t)$ – температурное поле диска, $a = \lambda/c\gamma$ – температуропроводность, λ, c – теплопроводность и удельная теплоемкость материала диска, γ – плотность материала, R – внешний радиус диска, $w(r, \theta, t)$ – функция, описывающая распределение удельной мощности теплоисточников. Температурным распределением по толщине диска можно пренебречь в силу его конструктивных параметров. Функция $q(r, \theta, t)$, учитывающая потери тепла за счет конвективного теплообмена между торцевыми поверхностями диска и окружающей средой, принимает вид [4]

$$q(r, \theta, t) = \frac{2\alpha}{H} \cdot (T(r, \theta, t) - T_{cp}), \quad (2)$$

где α – коэффициент теплообмена между средой и диском, T_{cp} – температура среды, H – толщина диска газотурбинного двигателя. Коэффициент 2 появляется для учета обеих торцевых поверхностей диска.

Конструкция индуктора такова, что позволяет рассматривать задачу в симметричной постановке относительно полярной оси. Тогда краевые условия для уравнения (1) записываются следующим образом:

$$\frac{\partial T(r, 0, t)}{\partial \theta} = 0, \quad t \geq 0; \quad (3)$$

$$\frac{\partial T(r, \pi, t)}{\partial \theta} = 0, \quad t \geq 0; \quad (4)$$

$$\frac{\partial T(0, \theta, t)}{\partial r} = 0, \quad t \geq 0. \quad (5)$$

Для границы $r = R$ пренебрегая потерями с боковой поверхности диска газотурбинного двигателя, записываем:

$$\frac{\partial T(R, \theta, t)}{\partial r} = 0, \quad t \geq 0. \quad (6)$$

Начальное распределение температуры по радиусу диска примем равным нулю:

$$T(r, \theta, 0) = T_0 = 0. \quad (7)$$

Примем также без потери общности $T_{cp} = T_0 = 0$. Тогда с учетом (2) уравнение (1) можно переписать в виде:

$$\frac{\partial T(r, \theta, t)}{\partial t} = a \cdot \left[\frac{\partial^2 T(r, \theta, t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T(r, \theta, t)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T(r, \theta, t)}{\partial \theta^2} \right] + \frac{1}{c\gamma} w(r, \theta, t) - \frac{2\alpha}{c\gamma H} T(r, \theta, t). \quad (8)$$

Модель (8), дополненная соответствующими краевыми (3)–(6) и начальным условием (7), описывает температурное поле в диске с учетом потерь с торцевых поверхностей диска. Методы структурной теории распределенных систем позволяют получить решение для неоднородного дифференциального уравнения с помощью

операции пространственного интегрирования произведения функции распределенных теплоисточников $w(r, \theta, t)$ и функции Грина уравнения по области определения [3], [4].

Функция Грина (импульсная переходная функция) $G(r, \rho, \theta, \varphi, t)$ [5] есть решение задачи (3) – (8) при воздействии импульсного источника в точке $\theta = \varphi$, $r = \rho$, задаваемого уравнением вида

$$w(r, \theta, t) = \delta(r - \rho) \cdot \delta(\theta - \varphi) \cdot \delta(t). \quad (9)$$

Найдем функцию Грина объекта с помощью конечных интегральных преобразований. Чтобы избавиться от операции дифференцирования по переменной θ , используется конечное косинус-преобразование Фурье [6]. Изображение функции вычисляется по формуле

$$T_C(r, n, t) = \int_0^\pi T(r, \theta, t) \cdot \cos(n\theta) d\theta, \quad n \in N \cup \{0\}. \quad (10)$$

Переход от изображения функции $T_C(r, n, t)$ к ее оригиналу $T(r, \theta, t)$ осуществляется по формуле

$$T(r, \theta, t) = \frac{1}{\pi} \cdot T_C(r, 0, t) + \frac{2}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} T_C(r, n, t) \cdot \cos(n\theta). \quad (11)$$

Применяя преобразование (10) к дифференциальному уравнению теплопроводности (8) с учетом граничных условий (3), (4), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_C(r, n, t)}{\partial t} = a \cdot \left[\frac{\partial^2 T_C(r, n, t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_C(r, n, t)}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2} T_C(r, n, t) \right] + \\ + \frac{1}{c\gamma} w_C(r, n, t) - \frac{2\alpha}{c\gamma H} T_C(r, \theta, t), \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$w_C(r, n, t) = \delta(r - \rho) \cdot \cos(n\varphi) \cdot \delta(t). \quad (13)$$

Чтобы избавиться от операции дифференцирования по переменной r , используем конечное интегральное преобразование Ханкеля [6]. Изображение функции находится по формуле

$$T_{CH}(\mu, n, t) = \int_0^R r T_C(r, n, t) J_n(\mu r) dr, \quad (14)$$

где μ – корень характеристического уравнения

$$J'_n(\mu R) = 0, \quad n \in N \cup \{0\}. \quad (15)$$

Переход от изображения функции $T_{CH}(\mu, n, t)$ к ее оригиналу $T_C(r, n, t)$ осуществляется по формуле

$$T_C(r, n, t) = 2 \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mu_{nm}^2 \cdot J_n(\mu_{nm} r) \cdot T_{CH}(\mu, n, t)}{[\mu_{nm}^2 R^2 - n^2] J_n^2(\mu_{nm} R)}. \quad (16)$$

Применяя к уравнению (12) преобразование Ханкеля (14), получаем

$$\frac{dT_{CH}(\mu, n, t)}{dt} = -a \cdot \mu_{nm}^2 \cdot T_{CH}(\mu, n, t) - \frac{2\alpha}{c\gamma H} T_{CH}(\mu, n, t) + \frac{1}{c\gamma} w_{CH}(\mu, n, t), \quad (17)$$

где

$$w_{CH}(\mu, n, t) = \rho \cdot J_n(\mu\rho) \cdot \cos(n\varphi) \cdot \delta(t). \quad (18)$$

Применив к уравнению (17) преобразование Лапласа, получим

$$\overline{T_{CH}}(\mu, n, p) = \frac{\frac{1}{c\gamma} \overline{w_{CH}}(\mu, n, p)}{p + a\mu_{nm}^2 + \frac{2\alpha}{c\gamma H}}, \quad (19)$$

где

$$\overline{w_{CH}}(\mu, n, p) = \rho \cdot J_n(\mu\rho) \cdot \cos(n\varphi), \quad (20)$$

тогда выражение (19) принимает вид

$$\overline{T_{CH}}(\mu, n, p) = \frac{1}{c\gamma} \cdot \frac{\rho \cdot J_n(\mu\rho) \cdot \cos(n\varphi)}{p + a\mu_{nm}^2 + \frac{2\alpha}{c\gamma H}}. \quad (21)$$

Выполнив обратное преобразование Лапласа, получаем

$$T_{CH}(\mu, n, t) = \frac{1}{c\gamma} \cdot \rho \cdot J_n(\mu_{nm}\rho) \cdot \cos(n\varphi) \cdot \exp\left(-\left(a\mu_{nm}^2 + \frac{2\alpha}{c\gamma H}\right)t\right). \quad (22)$$

Граничное условие второго рода (7) определяет вид характеристического уравнения для нахождения собственных чисел конечного интегрального преобразования Ханкеля (15). Собственные числа $\mu_{n0} = 0$ обращают в нуль интеграл (14) во всех случаях, кроме случая $n = 0$. Поэтому при $n = 0$ выражение для обратного преобразования Ханкеля (16) принимает вид

$$T_C(r, 0, t) = \frac{2\rho}{c\gamma R^2} \cdot \exp\left(-\frac{2\alpha}{c\gamma H}t\right) + \frac{2}{c\gamma R^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\rho \cdot J_0(\mu_{0m}\rho) \cdot J_0(\mu_{0m}r)}{J_0^2(\mu_{0m}R)} \exp\left(-\left(a\mu_{0m}^2 + \frac{2\alpha}{c\gamma H}\right)t\right), \quad (23)$$

т. е. появляется слагаемое, соответствующее $\mu_{00} = 0$, а при $n > 0$ выражение для обратного преобразования Ханкеля (16) принимает вид

$$T_C(r, n, t) = \frac{2}{c\gamma} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mu_{nm}^2 \cdot \rho \cdot J_n(\mu_{nm}\rho) \cdot J_n(\mu_{nm}r) \cdot \cos(n\varphi)}{[\mu_{nm}^2 R^2 - n^2] J_n^2(\mu_{nm}R)} \exp\left(-\left(a\mu_{nm}^2 + \frac{2\alpha}{c\gamma H}\right)t\right), \quad (24)$$

где μ_{nm} – положительные корни трансцендентного уравнения (15), $n \in N \cup \{0\}$, $m \in N$.

Применив к (23), (24) обратное косинус-преобразование Фурье (11), получим функцию Грина объекта

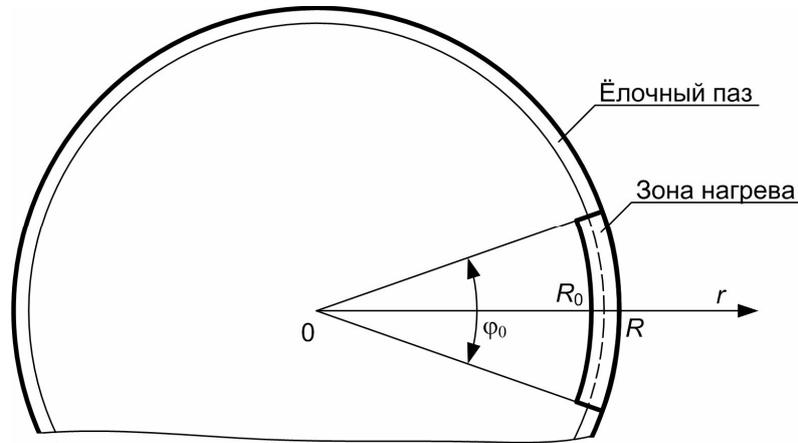
$$G(r, \rho, \theta, \varphi, t) = T(r, \theta, t) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{2\rho}{c\gamma R^2} \cdot \exp\left(-\frac{2\alpha}{c\gamma H}t\right) +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\pi} \cdot \frac{2}{c\gamma R^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\rho \cdot J_0(\mu_{0m}, \rho) \cdot J_0(\mu_{0m} r)}{J_0^2(\mu_{0m} R)} \cdot \exp\left(-\left(a\mu_{0m}^2 + \frac{2\alpha}{c\gamma H}\right)t\right) + \\
& + \frac{2}{\pi} \frac{2}{c\gamma} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mu_{nm}^2 \cdot \rho \cdot J_n(\mu_{nm}, \rho) \cdot J_n(\mu_{nm} r) \cdot \cos(n\varphi) \cdot \cos(n\theta)}{[\mu_{nm}^2 R^2 - n^2] J_n^2(\mu_{nm} R)} \cdot \exp\left(-\left(a\mu_{nm}^2 + \frac{2\alpha}{c\gamma H}\right)t\right). \quad (25)
\end{aligned}$$

Изображение функции Грина по Лапласу есть передаточная функция объекта в терминах структурной теории распределенных систем [7].

Функция распределения источников тепла, создаваемых индуктором в зоне нагрева (см. рис. 1), описывается выражением

$$w(\rho, \varphi, t) = \mathbf{1}(\rho - R_0) \cdot \mathbf{1}(\frac{1}{2}\varphi_0 - \varphi) \cdot u(t). \quad (26)$$



Р и с. 1. Область распределения источников тепла

Температурное поле диска для произвольного распределения теплоисточников описывается выражением [7]

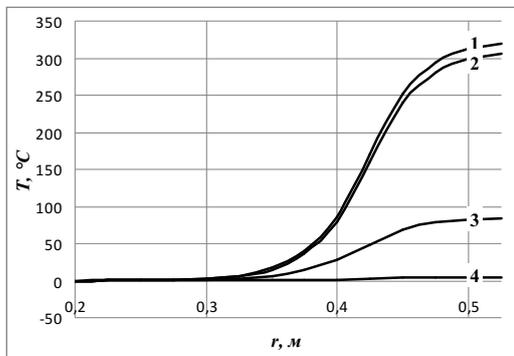
$$T(r, \theta, t) = \int_0^t \int_0^\pi \int_0^R G(r, \rho, \theta, \varphi, t - \tau) \cdot w(\rho, \varphi, \tau) d\rho d\varphi d\tau. \quad (27)$$

Подставив (25) и (26) в (27), получаем

$$\begin{aligned}
T(r, \theta, t) = & \frac{\frac{1}{2}\varphi_0}{\pi} \cdot \frac{R^2 - R_0^2}{c\gamma R^2} \cdot \frac{\left[1 - \exp\left(-\frac{2\alpha}{c\gamma H} t\right)\right]}{\frac{2\alpha}{c\gamma H}} + \\
& + \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\frac{1}{2}\varphi_0}{c\gamma R^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_0(\mu_{0m} r) \cdot \int_{R_0}^R \rho \cdot J_0(\mu_{0m} \rho) d\rho}{J_0^2(\mu_{0m} R)} \cdot \frac{\left[1 - \exp\left(-\left(a\mu_{nm}^2 + \frac{2\alpha}{c\gamma H}\right)t\right)\right]}{a\mu_{0m}^2 + \frac{2\alpha}{c\gamma H}} +
\end{aligned}$$

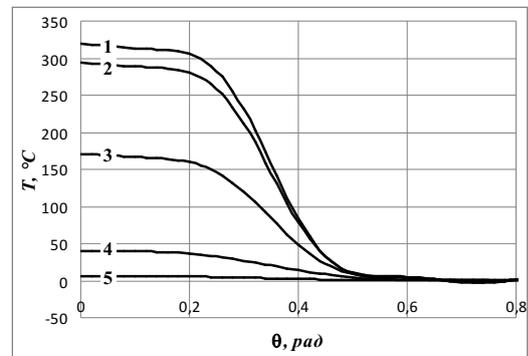
$$\begin{aligned}
& + \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{c\gamma} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mu_{nm}^2 \cdot J_n(\mu_{nm}r) \cdot \int_{R_0}^R \rho \cdot J_n(\mu_{nm}\rho) d\rho \cdot \cos(n\varphi) \cdot \int_0^{\frac{1}{2}\varphi_0} \cos(n\theta) d\theta}{\left[\mu_{nm}^2 R^2 - n^2 \right] J_n^2(\mu_{nm}R)} \times \\
& \times \frac{\left[1 - \exp\left(- \left(a\mu_{nm}^2 + \frac{2\alpha}{c\gamma H} \right) t \right) \right]}{a\mu_{nm}^2 + \frac{2\alpha}{c\gamma H}}.
\end{aligned} \tag{28}$$

Выражение (28) было использовано для расчета температурного поля диска со следующими параметрами: $R = 0,525$ м, $R_0 = 0,425$ м, $\varphi_0 = 0,70$ рад, $\gamma = 7800$ кг/м³, $c = 460$ Дж/(кг·К), $\lambda = 46$ Вт/(м·К), $\alpha = 45$ Вт/(м²·К), $u(t) = 8$ МВт/м³.



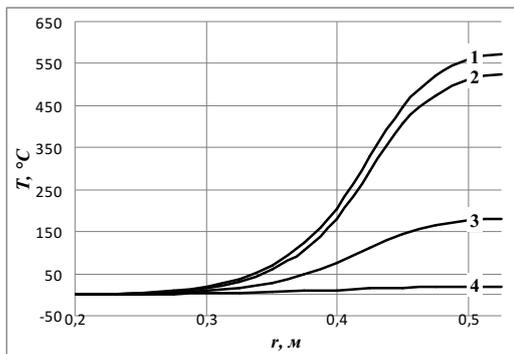
1 – $\theta = 0,0$ рад; 2 – $\theta = 0,2$ рад;
3 – $\theta = 0,4$ рад; 4 – $\theta = 0,6$ рад

а)



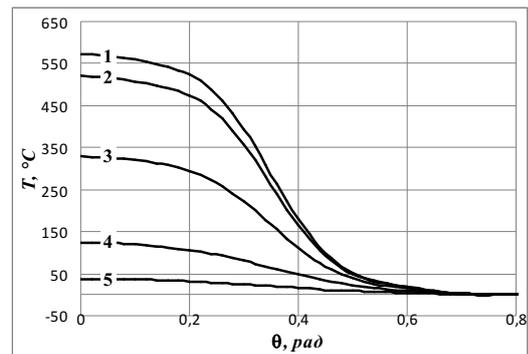
1 – $r = 0,525$ м; 2 – $r = 0,475$ м; 3 – $r = 0,425$ м;
4 – $r = 0,375$ м; 5 – $r = 0,325$ м

б)



1 – $\theta = 0,0$ рад; 2 – $\theta = 0,2$ рад;
3 – $\theta = 0,4$ рад; 4 – $\theta = 0,6$ рад

в)



1 – $r = 0,525$ м; 2 – $r = 0,475$ м; 3 – $r = 0,425$ м;
4 – $r = 0,375$ м; 5 – $r = 0,325$ м

г)

Р и с. 2. Температурное поле диска

На рис. 2 представлены результаты расчета в разные моменты времени.

По формуле (28) были рассчитаны температурные поля диска в разные моменты времени. На рис. 2, а; 2, б приведены температурные распределения по радиальной и угловой координатам при $t = 150$ с; на рис. 2, в; 2, г – при $t = 300$ с. При расчете принято, что $n = \overline{0, 24}$, $m = \overline{1, 25}$. Из-за учета в расчетах конечного числа собственных функций возникает вычислительная ошибка (в некоторых точках температура диска становится ниже температуры среды), которая уменьшается с увеличением количества учитываемых собственных функций.

Полученное выражение для функции Грина (25), а также выражение (28) для температурного поля диска при непрерывно действующих источниках тепла будут использоваться в дальнейшем для решения задач оптимизации конструкции индуктора и синтеза алгоритма оптимального управления процессом нагрева при термопластическом упрочнении диска газотурбинного двигателя.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Головачев А.Л., Данилушкин А.И., Мишанин Е.А. Система индукционного нагрева для термообработки елочного паза дисков турбоагрегатов // Вестник Саратовского государственного технического университета. – 2006. – №1(10). – С. 108-113.
2. Головачев А.Л. Разработка и исследование индукционных систем для ремонтно-восстановительных технологий роторов газотурбинных двигателей: Автореф. дис. ... канд. техн. наук: 05.09.10 / Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2009. – 20 с.
3. Данилушкин И.А., Московцев А.А. Математическая модель температурного поля диска газотурбинного двигателя // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. Технические науки. – Вып. 2(24). – 2009. – С. 218-221.
4. Лыков А.В. Теория теплопроводности. – М.: Высшая школа, 1967. – 599 с.
5. Рапопорт Э.Я. Структурное моделирование объектов и систем управления с распределенными параметрами. – М.: Высшая школа, 2003. – 299 с.
6. Снеддон И. Преобразования Фурье. – М.: Издательство иностранной литературы, 1955. – 668 с.
7. Бутковский А.Г. Характеристики систем с распределенными параметрами. – М.: Наука, 1979. – 224 с.

Статья поступила в редакцию 24 января 2011 г.

UDC 517.598

ANALYSIS OF AN ANALYTICAL MODEL OF A TEMPERATURE FIELD OF GAS TURBINE ENGINE'S DISC

I.A. Danilushkin, A.A. Moskovtsev

Samara State Technical University
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100

The paper presents the procedure of finding of transfer function of disc's temperature field as an object with distributed parameters. Definition of two-dimensional problem in polar coordinates is examined. Heat losses from disc's end surface are considered as a function of a heat current depending on surface temperature. Simulation of behavior of disc's thermal field is performed for a case of continuously active thermal sources.

Keywords: *gas turbine engine's disc, thermoplastic reinforcement, mathematical model of disc temperature field, object with distributed parameters, Green function.*

*Ivan A. Danilushkin – Candidate of Technical Sciences, Associate professor.
Anton A. Moskovtsev – Postgraduate student.*