УДК 681.391:543/545

НЕПРЕРЫВНОЕ ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СИГНАЛОВ АНАЛИТИЧЕСКИХ ПРИБОРОВ

Р.Т. Сайфуллин

Самарский государственный технический университет,
443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244

Рассматриваются свойства вейвлет-преобразования и его применение для обработки сигналов аналитических приборов. Для конкретных сигналов и вейвлет-функций представлены результаты аналитического вычисления непрерывного вейвлет-преобразования. Представлены соотношения для численной реализации вейвлет-преобразования сигналов на ЭВМ.

Ключевые слова: *вейвлет, вейвлет-преобразование, обработка сигналов аналитических приборов.*

Преобразование сигнала выполняется с целью разделения его на компоненты. Каждый такой компонент является мерой присутствия в сигнале соответствующей базисной функции. Определение состава компонента в заданном базисе выполняется с помощью прямого преобразования (анализ сигнала). Обратное преобразование позволяет получить сигнал по известному составу его компонент и базису, в котором эти компоненты определены.

Вейвлет-анализ является одним из наиболее мощных и гибких средств исследования и цифровой обработки сигналов: помимо задач их фильтрации и сжатия, анализ в базисе вейвлет-функций позволяет решать задачи идентификации, моделирования, аппроксимации стационарных и нестационарных процессов, исследовать вопросы наличия разрывов в производных и т. д.

Вейвлет-преобразование привносит в обработку сигналов дополнительную степень свободы. Например, гармонический анализ Фурье способен показать поведение сигнала в частотной области, оставляя открытым вопрос о локализации во времени различных компонент сигнала. Вейвлет-анализ обладает способностью выделять из сигнала компоненты разного масштаба.

Непрерывное вейвлет-преобразование (ВП) сигнала $f(t)$ имеет следующий вид [1]:

$$W_f(a,b) = a^{-\frac{1}{2}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\Psi\left(\frac{t-b}{a}\right)dt\,, \qquad (1)$$

где функция $\Psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$ называется вейвлетом; a,b – параметры соответственно масштаба и сдвига. Множитель $a^{-\frac{1}{2}}$ обеспечивает единичную норму для любой базисной функции $\Psi_{a,b}(t) = a^{-\frac{1}{2}}\Psi(\frac{t-b}{a})$.

Обратное вейвлет-преобразование записывается в виде

Раухат Талгатович Сайфуллин – д.т.н., профессор.

$$f(t)=\frac{1}{C_{\psi}}\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}W_f(a,b)\Psi_{a,b}(t)\frac{dadb}{a^2}. \qquad (2)$$

Здесь C_{Ψ} – нормирующий коэффициент:

$$C_{\Psi}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\left|\hat{\Psi}(\omega)\right|}{|\omega|}d\omega<\infty, \qquad (3)$$

где $\hat{\Psi}(\omega)$ – Фурье-образ вейвлет-функции $\Psi(t)$. Из равенства (3) следует условие допустимости использования функции $\Psi(t)$ в качестве вейвлет-функции: среднее (нулевой момент) $\Psi(t)$ должен быть нулевым –

$$M_0=\int_{-\infty}^{\infty}\Psi(t)dt=0. \qquad (4)$$

Другое требование – быстрое убывание $\Psi(t)$ с ростом частоты.

Для практических приложений часто бывает необходимым обеспечение нулевых значений первых m моментов вейвлета:

$$M_m=\int_{-\infty}^{\infty}t^m\Psi(t)dt=0,\ m=0,1,2\dots. \qquad (5)$$

Разложим ВП (1) в ряд Тейлора при $b=0$:

$$W_f[a,0]=a^{-\frac{1}{2}}\left(\sum_{m=0}^{n}f^{(m)}(0)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{t^m}{m!}\Psi(\frac{t}{a})dt+O(n+1)\right),$$

где $f^{(m)}(0)$ – производная порядка m; $O(n+1)$ – члены ряда Тейлора порядка выше n.

Используя определение моментов (5), можно записать:

$$W_f[a,0]\simeq a^{-\frac{1}{2}}\left(f(0)M_0a+\frac{f^{(1)}(0)}{1!}M_1a^2+\frac{f^2(0)}{2!}M_2a^3+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}M_na^{n+1}\right). \qquad (6)$$

В соответствии с (4) $M_0=0$, тогда первый член в разложении (6) является нулевым. Следовательно, ВП постоянного сигнала даст в результате нуль. Таким образом, число нулевых моментов вейвлета определяет порядок полинома, который будет проигнорирован вейвлет-преобразованием в анализируемом сигнале.

Например, выходной сигнал аналитического прибора имеет составляющую дрейфа базовой линии, которая обычно представляется как полиномиальный сигнал вида $d(t)=d_0+d_1t+d_2t^2$, где d_0,d_1,d_2 – некоторые коэффициенты. При этом коэффициенты d_1,d_2 определяют собственно дрейф, который может вызываться нестабильностью режимов аналитической системы прибора, дрейфом параметров электронного блока и другими причинами. Если для ВП использован вейвлет $\Psi(t)$ с двумя нулевыми моментами, то эта дрейфовая составляющая не отразится на результате преобразования выходного сигнала прибора.

Коэффициенты $W(a,b)$ содержат комбинированную информацию как об используемом вейвлете, так и об анализируемом сигнале. Выбор анализирующего вейвлета определяется тем, какую информацию требуется извлечь из сигнала. Каждый вейвлет имеет характерные особенности во временном и частотном пространстве, поэтому с помощью разных вейвлетов можно полнее выявить или подчеркнуть те или иные свойства анализируемого сигнала.

Спектр $W(a,b)$ одномерного сигнала представляет собой поверхность в трехмерном пространстве. Способы визуализации этой информации могут быть различными [2]. Вместо изображения поверхностей часто представляют их проекции на плоскость (a,b) с изолиниями или изоуровнями, позволяющими проследить изменение амплитуд вейвлет-преобразования на разных масштабах и во времени.

Несмотря на то, что коэффициенты вейвлет-преобразования содержат комбинированную информацию, вейвлет-анализ позволяет получить и объективную информацию об исследуемом сигнале, так как некоторые важные свойства вейвлет-пребразования не зависят от выбора вейвлета.

Перечислим основные свойства вейвлет-преобразования сигнала.

Линейность:

$$W[\alpha f_1(t)+\beta f_2(t)]=\alpha W[f_1(t)]+\beta W[f_2(t)].$$

Инвариантность относительного сдвига:

$$W[f(t-b_0)]=W(a,b-b_0).$$

Коммутативность дифференцирования:

$$\frac{d}{dt}W[f(t)]=W[\frac{d}{dt}f(t)].$$

Инвариантность относительно растяжения (сжатия):

$$W[f(\frac{t}{a_0})]=\frac{1}{a_0}W(\frac{a}{a_0},\frac{b}{a_0}).$$

Это свойство позволяет определить наличие и характер особенностей анализируемого сигнала.

Плотность энергии сигнала $E_W(a,b)=W^2(a,b)$ характеризует энергетические уровни исследуемого сигнала $f(t)$ в пространстве (a,b) – (масштаб, время). Полная энергия сигнала $f(t)$ может быть записана через амплитуды вейвлет-преобразования в виде

$$E_f=\int f^2(t)dt=C_\Psi^{-1}\iint W^2(a,b)\frac{d_a d_b}{a^2}.$$

В качестве вейвлетов будем использовать производные функции Гаусса:

$$\psi_n(t)=(-1)^{n+1}\frac{d^n}{dt^n}e^{-\frac{t^2}{2}},\ n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots.$$

Наибольшее применение находят гауссовы вейвлеты небольших порядков:

$$\psi_1(t)=-te^{-\frac{t^2}{2}};$$

$$\psi_2(t)=\left(1-t^2\right)e^{-\frac{t^2}{2}}; \qquad (7)$$

$$\psi_3(t)=\left(t^3-3t\right)e^{-\frac{t^2}{2}};$$

$$\psi_4(t)=\left(-t^4+6t^2-3\right)e^{-\frac{t^2}{2}};$$

$$\psi_5(t)=\left(-t^5+10t^3-15t\right)e^{-\frac{t^2}{2}};$$

$$\psi_6(t)=\left(-6t^6+15t^4-45t^2+15\right)e^{-\frac{t^2}{2}};$$

$$\psi_7(t)=\left(-t^7+21t^5-105t^3+105t\right)e^{-\frac{t^2}{2}};$$

$$\psi_8(t)=\left(-t^8+28t^6-210t^4+420t^2-105\right)e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Присутствие экспоненциального множителя в вейвлетах обеспечивает их локальность. Гауссов вейвлет $\psi_n(t)$ имеет n нулей.

Из определения гауссовых вейвлетов следует, что производная от вейвлета $\psi_n(t)$ совпадает (с точностью до знака) с вейвлетом $\psi_{n+1}(x)$:

$$\frac{d\psi_n(t)}{dt}=-\psi_{n+1}(t).$$

Значение интеграла от гауссова вейвлета:

$$\int_{t_1}^{t_2}\psi_n(t)dt=\psi_{n+1}(t_1)-\psi_{n+1}(t_2). \qquad (8)$$

Спектр Фурье гауссовых вейвлетов имеет вид

$$\hat{\psi}_m(\omega)=\sqrt{2\pi}(j\omega)^m e^{-\frac{\omega^2}{2}};\ \text{m=1, 2, 3, … .}$$

Вейвлетом может быть и разность функций Гаусса. Обобщенная формула для DOG-вейвлетов имеет вид:

$$\psi(t)=e^{-At^2}-Ce^{-Bt^2};\ A=\frac{B}{C^2};$$

$$\hat{\psi}(\omega)=\sqrt{\frac{\pi}{A}}e^{-\frac{\omega^2}{4A}}-C\sqrt{\frac{\pi}{B}}e^{-\frac{\omega^2}{4B}}.$$

Например, при $A=C=\frac{1}{2}$, $B=\frac{1}{8}$ получим:

$$\psi(t)=e^{-\frac{t^2}{2}}-\frac{1}{2}e^{-\frac{t^2}{8}}. \qquad (9)$$

На выходе аналитических приборов регистрируются сигналы в виде локализованных пиков (см. таблицу).

Некоторые типовые модели аналитических пиков

Аппроксимирующая функция	Математическое выражение (p – площадь пика; μ – положение пика на оси развертки; β – среднеквадратичная ширина пика)	Область применения
Гаусса	$\frac{p}{\sqrt{2\pi}\beta} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\beta^2}}$	Хроматография, спектроскопия, рентгенодифракционный анализ
Лоренца	$\frac{p}{\pi\beta}\left[\frac{1}{\frac{(t-\mu)^2}{\beta^2}+1}\right]$	Спектроскопия, рентгенодифракционный анализ
Гиперболическая вида I	$\frac{p}{2\beta\, ch\left[\frac{\pi(t-\mu)}{2\beta}\right]}$	Полярография
Гиперболическая вида II	$\frac{\pi p}{2\beta\, ch^2\left[\frac{\pi(t-\mu)}{2\beta}\right]}$	Полярография

Для некоторых конкретных сигналов и вейвлет-функций возможно аналитическое вычисление непрерывного вейвлет-преобразования. Это позволяет по значениям вейвлет-коэффициентов определять информативные параметры пиков, входящих в состав исследуемого сигнала. Поскольку даже в случае зашумленных сигналов их вейвлет-образы имеют вид гладких кривых, возможно восстановление информативных параметров выходного сигнала прибора с достаточно высокой точностью.

Пусть анализируемый пик задается в гауссовой форме:

$$S(t) = Ae^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\beta^2}}, \tag{10}$$

где $A = p/\sqrt{2\pi}\beta$ – амплитуда пика. Вейвлет-образ сигнала (10) при использовании гауссова вейвлета $\psi_2(t)$ (7) описывается выражением

$$W_{\psi_2}^{gauss}(a,b) = \frac{A\beta a^{5/2}}{\left(\beta^2 + a^2\right)^{3/2}}\left[1 - \frac{(b-\mu)^2}{\left(\beta^2 + a^2\right)}\right]e^{-\frac{(b-\mu)^2}{2\left(\beta^2+a^2\right)}}. \tag{11}$$

Таким образом, второй вейвлет-коэффициент (11) можно представить в виде

$$W_{\psi_2}^{gauss}(a,b) = \frac{A\beta a^{5/2}}{\left(\beta^2 + a^2\right)^{3/2}}\psi_2\frac{(\beta-\mu)}{\left(\beta^2 + a^2\right)^{1/2}}, \tag{12}$$

где ψ_2 – гауссов вейвлет (7). Для сравнения вейвлет-образ этого же сигнала при использовании DOG-вейвлета (9) имеет вид

$$W^{dog}(a,b)=A\beta a^{1/2}\left[\frac{1}{a^2+\beta^2}e^{-\frac{1}{2}\frac{(b-\mu)^2}{(\beta^2+a^2)}}-\frac{1}{2(4a^2+\beta^2)}e^{-\frac{1}{2}\frac{(b-\mu)^2}{(\beta^2+4a^2)}}\right]. \quad (13)$$

Из выражения (12) видно, что вейвлет-образ гауссового пика $S(t)$ подобен гауссовому вейвлету. Поэтому все свойства гауссовых вейвлетов присущи также вейвлет-образу $W_{\psi_2}(a,b)$ гауссова сигнала.

Рассмотрим численную реализацию непрерывного ВП во временной области. Обязательной операцией при вычислениях на ЭВМ является дискретизация сигнала. При этом непрерывный сигнал $f(t)$ заменяется дискретизированным с постоянными значениями $f_k = f(k\Delta_t)$ на интервалах $t_k = [k\Delta_t,(k+1)\Delta_t]$, где Δ_t – интервал дискретизации; $k = 0,1,...N-1$. Подставляя этот сигнал в выражение (1), можно получить ВП дискретизированного сигнала:

$$W_f(a,b)=a^{-1/2}\sum_{k=0}^{N-1}f_k\int_{k\Delta_t}^{(k+1)\Delta_t}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)dt. \quad (14)$$

В практических расчетах используются только целочисленные значения параметра масштаба и сдвига, кратные интервалу дискретизации Δ_t. Тогда $a_i = i\Delta_t$; $b_j = j\Delta_t$, где i,j – целочисленные значения параметров, изменяемые в пределах $i = 1,2,3,...,N$; $j = 0,1,2,...,N-1$.

Вычисления ВП существенно упрощаются, если удается выполнить аналитическое интегрирование в (14). Если для анализа выбран гауссов вейвлет n-го порядка $\psi_n(t)$, то, используя выражение интеграла гауссовых вейвлетов (8), получим:

$$W_f(i,j)=a^{-1/2}\left[f_0\psi_{n-1}\left(\frac{b_i}{a_j}\right)+\sum_{k=0}^{N-2}(f_{k+1}-f_k)\psi_{n-1}\left(\frac{(k+1)\Delta_t-b_i}{a_j}\right)-\right.$$
$$\left.-f_{N-1}\psi_{n-1}\left(\frac{(N-1)\Delta_t-b_i}{a_j}\right)\right]. \quad (15)$$

В случае невозможности аналитического интегрирования в (14) приходится применять численные методы интегрирования: метод прямоугольников, трапеций, Симпсона и т. д. Выражения (14)-(15) являются численной реализацией непрерывного ВП и используются при обработке сигналов аналитических приборов.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Малашкевич И.А.* Вейвлет-анализ сигналов. Теория и практика. – Йошкар-Ола: МарГТУ, 2008. – 224 с.
2. *Ososkov G., Shitov A.* Gaussian Wavelet Features and Their Applications for Analysis of Discretized Signals // Comp. Phys. Comm. – 2000. – V. 126/1-2. – P. 149-157.

Статья поступила в редакцию 14 мая 2011 г.

UDC 681.391:543/545

CONTINUOUS WAVELET TRANSFORM OF ANALYTIC INSTRUMENTS SIGNALS

R.T. Sayfullin

Samara State Technical University
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100

Considered are features of wavelet transform and it's use for signal processing of analytic instruments. For particular signals and wavelet-functions output of analytical calculation for continuous wavelet transform is presented. Relations for numerical realization of wavelet transform for computer signals are presented.

Keywords: *wavelet, wavelet transform, signal processing of analytic instruments.*

R.T. Sayfullin – Doctor of Technical Sciences, Professor.