УДК 517.958

МОДЕЛЬ ПРОСТРАНСТВЕННО-РАСПРЕДЕЛЕННОГО ТЕПЛООБМЕНА СТЕНКИ И ПОТОКА НА БАЗЕ МОДАЛЬНОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ[1]

И.А. Данилушкин, О.Н. Тимофеева

Самарский государственный технический университет
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244

Предложена динамическая модель теплообмена стенки и потока теплообменного аппарата с учетом пространственной распределенности процесса. Рассмотрен способ решения системы дифференциальных уравнений в частных производных посредством разложения в бесконечный ряд по собственным функциям одного из уравнений. Для ограниченного числа учитываемых мод выполнен численный эксперимент, проведен анализ полученных результатов.

Ключевые слова: *процесс теплообмена, нагрев потока, температурное распределение, объект с распределенными параметрами, структурная теория распределенных систем, собственная функция, модальное представление.*

Исследование нагрева потока жидкости в технологических установках базируется, в первую очередь, на учете пространственной распределенности процесса теплообмена. В большинстве случаев математические модели, разрабатываемые для выявления качественных особенностей поведения процессов нагрева и синтеза законов управления ими, позволяют ограничиться системой двух одномерных дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих взаимосвязанные температурные распределения нагреваемого потока и поверхности, с которой он контактирует. В качестве базовой модели рассматривается процесс нагрева потока жидкости или газа от стенок трубы.

Относительно высокая скорость движения нагреваемого потока позволяет пренебречь передачей тепла за счет теплопроводности по направлению движения среды, а специальные конструктивные решения, повышающие эффективность теплообмена, позволяют считать температуру потока постоянной по сечению, перпендикулярному направлению потока. Температурное распределение в стенке трубы рассматривается как одномерная задача теплопроводности, поскольку протяженность поверхности контакта вдоль потока обычно в несколько десятков/сотен раз превышает толщину стенки. В поперечном сечении температура стенок трубы также принимается постоянной.

Таким образом, система уравнений с соответствующими граничными и начальными условиями имеет следующий вид:

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = a\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} + \frac{w(x,t)}{c\gamma} - \beta_T\left(T(x,t) - \theta(x,t)\right), \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \qquad (1)$$

---

[1] *Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ №09-08-00297-а, №10-08-00754-а; ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009-2013 годы», заявка НК-66П/11, заявка 2010-1.3.1-230-009/8; АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы», проект №2.1.2/13988.*

Иван Александрович Данилушкин – к.т.н., докторант.

Ольга Николаевна Тимофеева – аспирант.

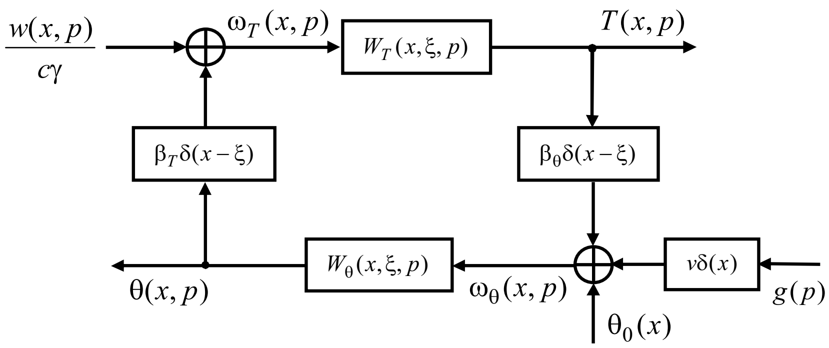
$$\left.\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \qquad \left.\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\right|_{x=L} = 0, \quad T(x,0) = T_0(x), \tag{2}$$

$$\frac{\partial \theta(x,t)}{\partial t} + v\frac{\partial \theta(x,t)}{\partial x} = \beta_\theta \big(T(x,t) - \theta(x,t)\big), \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \tag{3}$$

$$\theta(0,t) = g(t), \qquad \theta(x,0) = \theta_0(x). \tag{4}$$

Здесь $T(x,t)$ – температура стенки трубы; $a = \lambda/c\gamma$ – коэффициент температуропроводности стенки, λ, c, γ – физические характеристики материала стенки: коэффициент теплопроводности, теплоемкость и плотность соответственно; $w(x,t)$ – распределение мощности теплоисточников, нагревающих стенку трубы; $\theta(x,t)$ – температура потока; v – скорость потока; L – длина трубы; $T_0(x)$, $\theta_0(x)$ – начальные распределения температуры стенки и потока соответственно; $g(t)$ – температура потока на входе в теплообменник; β_T, β_θ – коэффициенты теплопередачи от потока к стенке и от стенки к потоку соответственно. Они оба одинаково зависят от коэффициента конвективного теплообмена между стенкой и потоком, но различаются благодаря разным объемам сред, участвующих в теплообмене, разным значениям их плотности и теплоемкости.

Методами структурной теории распределенных систем [1-4] для системы (1)–(4) может быть получено структурное представление вида рис. 1.



Р и с . 1. Структурная схема объекта управления

Здесь $W_T(x,\xi,p)$ – распределенная передаточная функция температурного поля стенки

$$W_T(x,\xi,p) = \frac{1}{L}\left[\frac{1}{p+\beta_T} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n\pi x/L)\cdot\cos(n\pi\xi/L)}{p+\beta_T + a(n\pi/L)^2}\right], \tag{5}$$

$W_\theta(x,\xi,p)$ – распределенная передаточная функция температурного поля потока

$$W_\theta(x,\xi,p) = \mathbf{1}(x-\zeta)\frac{1}{v}\exp\left(-\frac{p+\beta_\theta}{v}(x-\xi)\right). \tag{6}$$

Взаимное влияние температурных полей учитывается за счет стандартизирующих функций для стенки и потока соответственно [4]:

$$\omega_T(x,p)=\frac{w(x,p)}{c\gamma}+\beta_T\theta(x,p), \tag{7}$$

$$\omega_\theta(x,p)=\beta_\theta T(x,p)+v\delta(x)g(p)+\theta_0(x). \tag{8}$$

Задача управления температурным полем потока в ряде случаев формулируется либо в виде ограничений на максимальную температуру стенки нагревателя (например, при подогреве потока нефти [5]), либо в виде требования к поддержанию постоянной температуры стенки по всей длине нагревателя (пример – температура катализатора в проточном реакторе при протекании в нем эндотермических / экзотермических реакций [6]). В обоих случаях необходимо получить передаточную функцию по каналу «распределение теплоисточников» – «распределение температурного поля стенки», учитывающую наличие обратной связи за счет пространственно-распределенного сигнала. Передаточная функция замкнутой системы с распределенными параметрами в общем случае может быть найдена путем решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода [1]. Для структурной схемы (см. рис. 1) зависимость $T(x,p)$ от входного распределенного сигнала $w(x,p)$ записывается следующим образом:

$$T(x,p)=W_T(x,\xi,p)\otimes\left(\frac{1}{c\gamma}w(x,p)+\beta_T W_\theta(x,\xi,p)\otimes\beta_\theta T(x,p)\right), \tag{9}$$

где символ $\otimes$ означает интегрирование двух связанных этим символом функций по области, в которой меняются две внутренние (ближайшие в записи формулы к знаку $\otimes$) пространственные переменные [1]. Подставив в выражение (9) $w(x,p)=\delta(x-\xi)$, по определению получаем, что $T(x,p)=W_{wT}(x,\xi,p)$ – распределенная передаточная функция замкнутой системы. Тогда уравнение Фредгольма для $W_{wT}(x,\xi,p)$ примет вид

$$W_{wT}(x,\xi,p)=\beta_T\beta_\theta W_T(x,\xi,p)\otimes W_\theta(x,\xi,p)\otimes W_{wT}(x,\xi,p)+\frac{1}{c\gamma}W_T(x,\xi,p), \tag{10}$$

ядром которого выступает интеграл произведения функций

$$W_T(x,\xi,p)\otimes W_\theta(x,\xi,p)=$$

$$=\int_0^x\frac{1}{L}\left[\frac{1}{p+\beta_T}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n\pi x/L)\cdot\cos(n\pi\eta/L)}{p+\beta_T+a(n\pi/L)^2}\right]\cdot\frac{1}{v}\exp\left(-\frac{p+\beta_\theta}{v}(\eta-\xi)\right)d\eta. \tag{11}$$

Решение интегрального уравнения (10) с ядром (11) не может быть найдено аналитически. Для нахождения передаточной функции по каналу «распределение теплоисточников» – «распределение температурного поля стенки» предлагается воспользоваться представлением распределенного сигнала в виде разложения в ряд по ортонормированному базису. В качестве такого базиса выбрана совокупность собственных функций однородного уравнения вида (1) с граничными условиями (2):

$$\varphi_0(x)=\sqrt{\frac{1}{L}},\qquad \varphi_n(x)=\sqrt{\frac{2}{L}}\cos(n\pi x/L),\qquad n\in\{1,2,\ldots\}. \tag{12}$$

Тогда передаточная функция $W_T(x,\xi,p)$ (5) может быть представлена в виде бесконечной суммы

$$W_T(x,\xi,p)=\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n(x)\cdot\varphi_n(\xi)\cdot z_n(p), \qquad (13)$$

где

$$z_n(p)=\frac{1}{p+\beta_T+a(n\pi/L)^2}, \quad n\in\{0,1,2,...\}. \qquad (14)$$

Любой распределенный сигнал системы может быть представлен в виде бесконечной суммы пар произведений собственных функций (12) и соответствующих временных мод. Для $T(x,p)$ можно записать

$$T(x,p)=\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n(x)\cdot T_n(p). \qquad (15)$$

С учетом (15) выражение для распределения температуры потока $\theta(x,p)$ как сигнала на выходе передаточной функции $W_\theta(x,\xi,p)$ записывается следующим образом:

$$\theta(x,p)=\int_0^L W_\theta(x,\xi,p)\cdot\beta_\theta T(\xi,p)d\xi=\beta_\theta\sum_{n=0}^{\infty}T_n(p)\cdot\int_0^L W_\theta(x,\xi,p)\cdot\varphi_n(\xi)d\xi. \qquad (16)$$

Благодаря свойствам ортонормированного базиса значение k-той временной моды разложения сигнала $\theta(x,p)$ в ряд по базису (12) может быть найдено с помощью интеграла

$$\theta_k(p)=\int_0^L\theta(x,p)\cdot\varphi_k(x)dx, \quad k\in\{0,1,2,...\}. \qquad (17)$$

Подставив (16) в (17), получим

$$\theta_k(p)=\beta_\theta\sum_{n=0}^{\infty}T_n(p)\cdot\int_0^L\int_0^L W_\theta(x,\xi,p)\cdot\varphi_n(\xi)d\xi\cdot\varphi_k(x)dx, \quad k\in\{0,1,2,...\}. \qquad (18)$$

Представив распределение мощности теплоисточников в виде разложения в ряд по базису (12) с помощью временных мод

$$w_k(p)=\int_0^L w(x,p)\cdot\varphi_k(x)dx, \quad k\in\{0,1,2,...\}, \qquad (19)$$

можно записать уравнение для k-той временной моды температурного поля стенки:

$$T_k(p)=z_k(p)\cdot\left(\frac{1}{c\gamma}w_k(p)+\beta_T\theta_k(p)\right), \quad k\in\{0,1,2,...\}. \qquad (20)$$

Подставив в (20) выражение для k-той временной моды температурного поля потока (18), получим бесконечную систему уравнений для временных мод температурного поля стенки:

$$T_k(p)=z_k(p)\cdot\left(\frac{1}{c\gamma}w_k(p)+\beta_T\beta_\theta\sum_{n=0}^{\infty}T_n(p)\cdot\int_0^L\int_0^L W_\theta(x,\xi,p)\cdot\varphi_n(\xi)d\xi\cdot\varphi_k(x)dx\right),$$
$$k\in\{0,1,2,...\}. \qquad (21)$$

Если ограничиться конечным числом N учитываемых мод в системе уравнений (21), то можно реализовать решение системы в одном из компьютерных пакетах численного моделирования динамических систем, например Matlab/Simulink [7]. Для этого необходимо вычислить двойной интеграл. Обозначив его

$$W_{kn}(p)=\int_0^L\int_0^L W_\theta(x,\xi,p)\cdot\varphi_n(\xi)d\xi\cdot\varphi_k(x)dx\,, \tag{22}$$

можно записать

$$T_k(p)=z_k(p)\cdot\left(\frac{1}{c\gamma}w_k(p)+\beta_T\beta_\theta\sum_{n=0}^{N-1}T_n(p)\cdot W_{kn}(p)\right),\quad k\in\{0,1,2,\ldots,N-1\}. \tag{23}$$

Рассмотрим сначала

$$\int_0^L W_\theta(x,\xi,p)\cdot\varphi_n(\xi)d\xi=\int_0^x\frac{1}{v}\exp\left(-\frac{p+\beta_\theta}{v}(x-\xi)\right)\cdot\varphi_n(\xi)d\xi,\quad n\in\{0,1,2,\ldots\}. \tag{24}$$

При $n=0$

$$\int_0^x\frac{1}{v}\exp\left(-\frac{p+\beta_\theta}{v}(x-\xi)\right)\cdot\sqrt{\frac{1}{L}}d\xi=\sqrt{\frac{1}{L}}\frac{1}{p+\beta_\theta}\left(1-\exp\left(-\frac{p+\beta_\theta}{v}x\right)\right). \tag{25}$$

При $n\in\{1,2,\ldots\}$

$$\int_0^x\frac{1}{v}\exp\left(-\frac{p+\beta_\theta}{v}(x-\xi)\right)\cdot\sqrt{\frac{2}{L}}\cos(n\pi\xi/L)d\xi=\sqrt{\frac{2}{L}}\frac{1}{(p+\beta_\theta)^2+(n\pi x/L)^2}\times$$

$$\times\left[(p+\beta_\theta)\cos(n\pi x/L)+\frac{n\pi x}{L}\sin(n\pi x/L)-(p+\beta_\theta)\exp\left(-\frac{p+\beta_\theta}{v}x\right)\right]. \tag{26}$$

С учетом полученных выражений (25) и (26) может быть найдено значение интеграла $W_{kn}(p)$. Ввиду громоздкости вычислений целесообразно рассмотреть отдельно несколько случаев.

1) $k=0$, $n=0$:

$$W_{00}(p)=\frac{1}{L}\frac{1}{p+\beta}\left[L-\frac{v}{p+\beta_\theta}\left[1-\exp\left(-\frac{p+\beta_\theta}{v}L\right)\right]\right]. \tag{27}$$

2) $k=0$, $n\in\{1,2,\ldots\}$:

$$W_{0n}(p)=\frac{\sqrt{2}}{L}v\frac{1}{(p+\beta_\theta)^2+(n\pi v/L)^2}\left[(-1)^{n+1}+\exp\left(-\frac{p+\beta_\theta}{v}L\right)\right]. \tag{28}$$

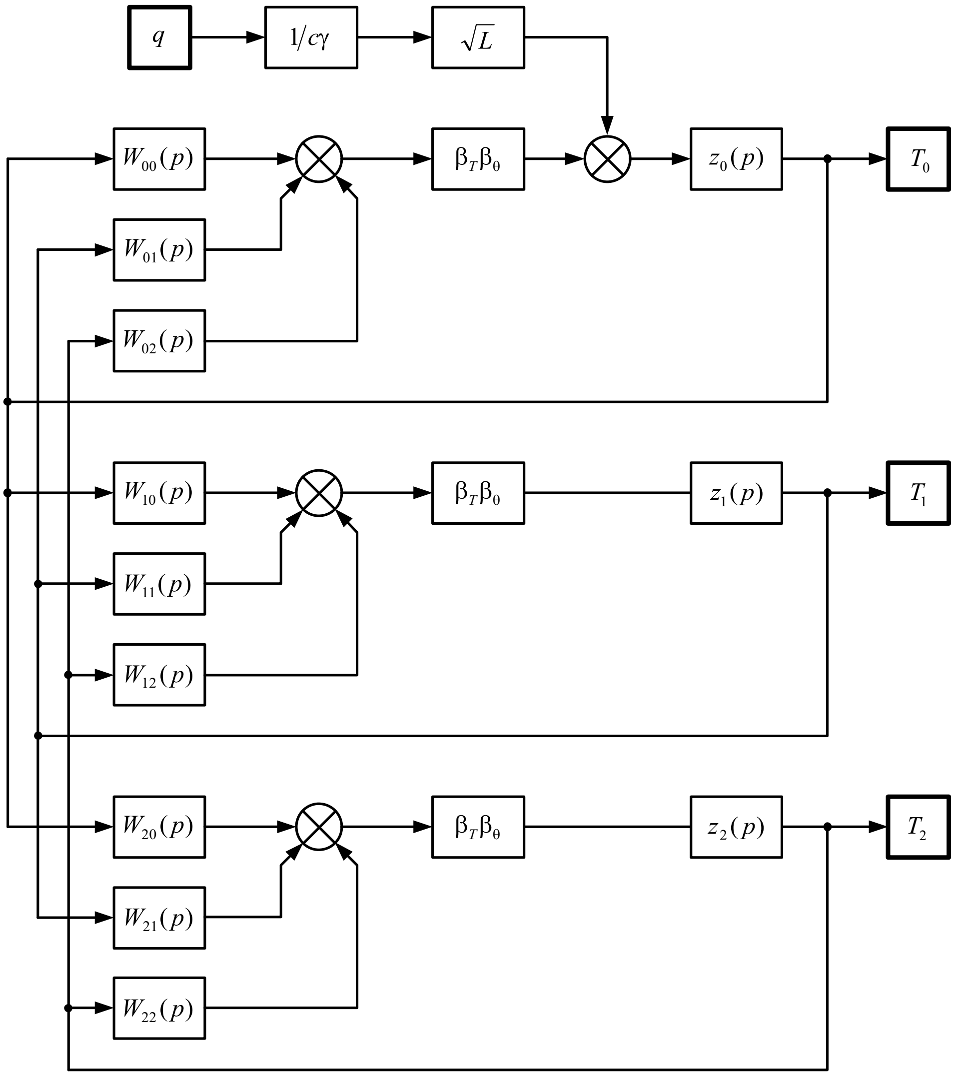
3) $k\in\{1,2,\ldots\}$, $n=0$:

$$W_{k0}(p)=\frac{\sqrt{2}}{L}v\frac{1}{(p+\beta_\theta)^2+(k\pi v/L)^2}\left[-1+(-1)^k\exp\left(-\frac{p+\beta_\theta}{v}L\right)\right]. \tag{29}$$

4) $k,n\in\{1,2,\ldots\}$, $k=n$:

$$W_{kk}(p) = \frac{2}{L}\frac{1}{(p+\beta_\theta)^2 + \left(k\pi v/L\right)^2}\times$$

$$\times\left[\frac{L}{2}\left(p+\beta_\theta\right) - \frac{v\cdot(p+\beta_\theta)^2}{(p+\beta_\theta)^2+\left(k\pi v/L\right)^2}\left[1+(-1)^n\exp\left(-\frac{p+\beta_\theta}{v}L\right)\right]\right]. \qquad (30)$$



Р и с . 2. Структурная схема модели, учитывающей три первые моды, $N = 3$

5) $k, n \in \{1, 2, \ldots\}$, $k \neq n$:

$$W_{kn}(p) = \frac{2}{L} \frac{v}{(p+\beta_\theta)^2 + (n\pi v/L)^2} \times$$

$$\times \left[\frac{n^2\left(1+(-1)^{k+n}\right)}{n^2-k^2} - \frac{(p+\beta_\theta)^2}{(p+\beta_\theta)^2 + (k\pi v/L)^2} \left[1-(-1)^k \exp\left(-\frac{p+\beta_\theta}{v} L \right) \right] \right]. \tag{31}$$

С помощью полученных выражений (27)-(31) были разработаны структурные схемы динамической модели для численного решения системы уравнений (23) при $N=2$, $N=3$, $N=4$ в специализированных компьютерных пакетах. На рис. 2 представлена схема модели для случая $N=3$,

$$w(x, p) = q \equiv const. \tag{32}$$

Подставив (32) в (19), получим

$$w_0 = \sqrt{L} \cdot q; \quad w_k = 0, \quad k \in \{1, 2, \ldots\}. \tag{33}$$

На рис. 3 представлено температурное распределение по длине теплообменного аппарата, рассчитанное для некоторых фиксированных моментов времени при различном количестве учитываемых мод.

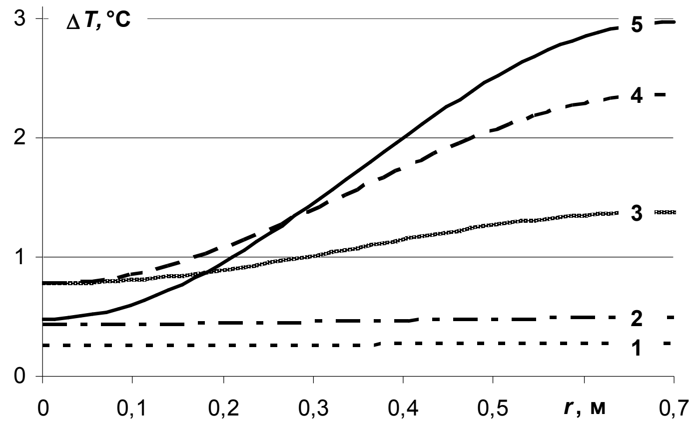
На рис. 4 представлены графики переходных процессов в трех точках по длине теплообменного аппарата также при различном количестве учитываемых мод.

Численные эксперименты проводились при следующих значениях параметров: $\beta_T \beta_\theta = 0{,}3$ 1/с^2, $L = 0{,}7$ м, $v = 0{,}02$ м/с, $c = 811$ Дж/(кг·град), $\gamma = 2700$ кг/м^3, $\lambda = 7$ Вт/(м·град), $q = 180$ кВт/м^3. Такие параметры соответствуют режиму нагрева бензиновых фракций в лабораторной установке каталитического риформинга [8]. Начальная температура катализатора и потока принята равной нулю градусов.

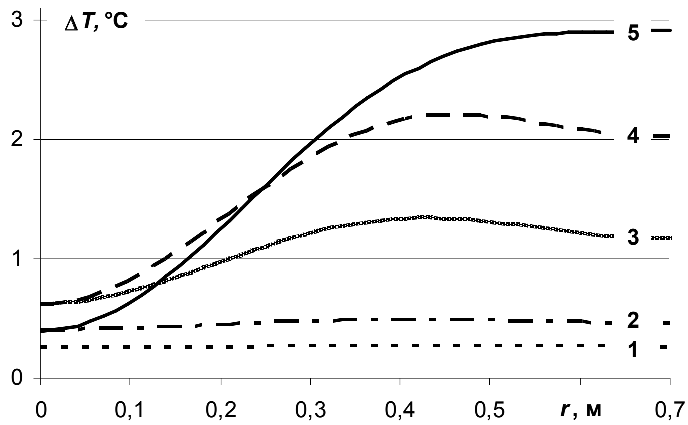
Анализ графиков (см. рис. 3, 4) показал, что увеличение количества учитываемых мод ведет к снижению статической и динамической ошибок моделей. Максимальная погрешность модели наблюдается в начале теплообменника, при $x = 0$ м. Так, «перегрев» начала в переходном режиме при $t = 41$ с (см. рис. 4, *а*) для двух мод составляет около 70% относительно установившегося значения, а для четырех мод, при $t = 34$ с (рис. 4, *в*) – уже около 26%. При этом исходя из физики исследуемого процесса понятно, что «перегрева» быть не должно.

Графики, представленные на рис. 3, также показательны – «перегрев» центральной области теплообменника при $x = 0{,}4$ м по сравнению с концом ($x = 0{,}7$ м) в переходном режиме (линии 3, 4 на рис. 3, *б*, *в*) уменьшается с увеличением количества учитываемых в модели мод.

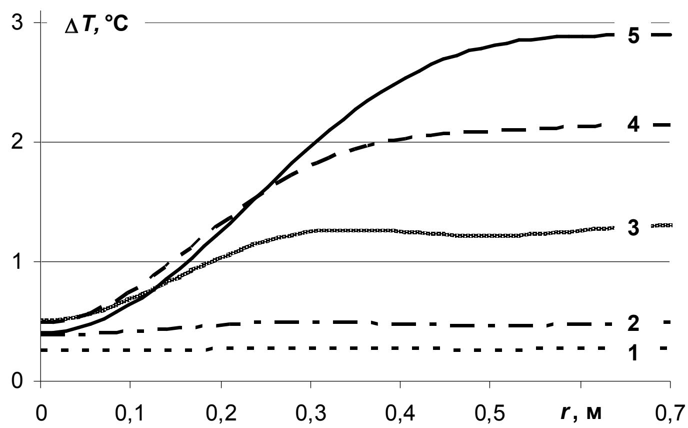
Предлагаемый подход к моделированию может использоваться при исследовании объектов и систем с распределенными параметрами в компьютерных пакетах численного моделирования динамических систем, при синтезе и анализе систем автоматического управления объектами с распределенными параметрами.



а

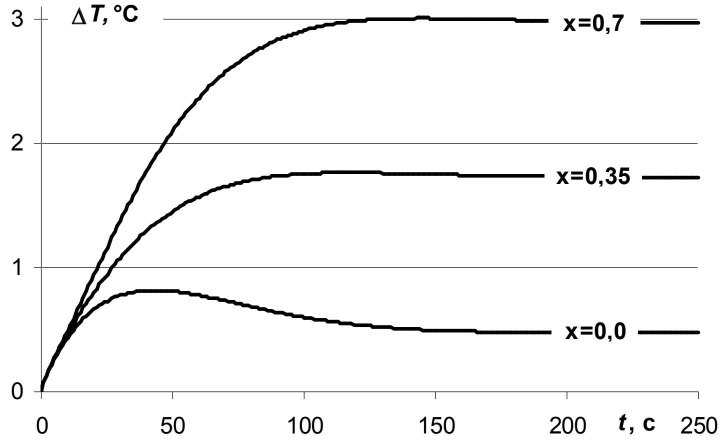


б

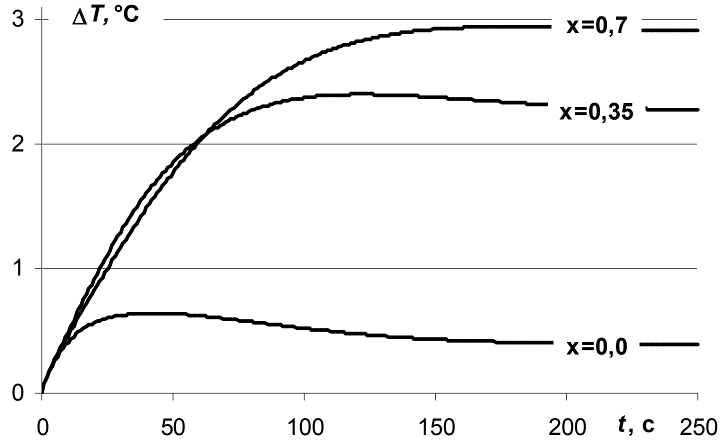


в

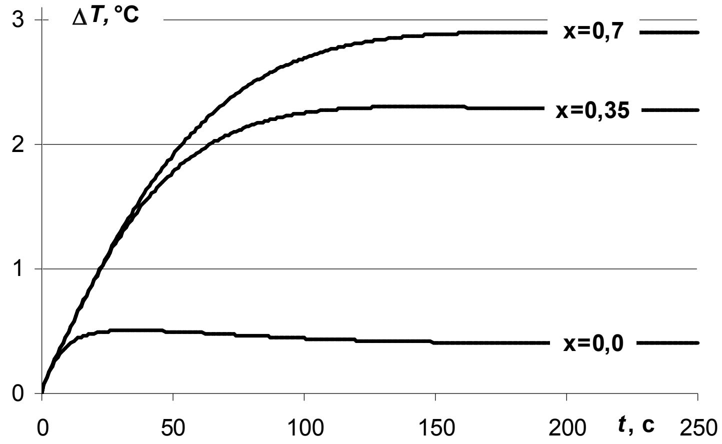
Р и с . 3. Температура стенки в разные моменты времени:
а – при моделировании учтены две моды, $N = 2$;
б – при моделировании учтены три моды, $N = 3$;
в – при моделировании учтены четыре моды, $N = 4$:
1 – $t = 5$ с; 2 – $t = 10$ с; 3 – $t = 30$ с; 4 – $t = 60$ с; 5 – $t = 250$ с



а



б



в

Р и с . 4. Температура стенки в разных точках по длине:
а – при моделировании учтены две моды;
б – при моделировании учтены три моды;
в – при моделировании учтены четыре моды

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Бутковский А.Г.* Структурная теория распределенных систем. – М.: Наука, 1977. – 320 с.
2. *Бутковский А.Г.* Характеристики систем с распределенными параметрами. – М.: Наука, 1979. – 224 с.
3. *Рапопорт Э.Я.* Структурное моделирование объектов и систем управления с распределенными параметрами. – М.: Высшая школа, 2003. – 299 с.
4. *Рапопорт Э.Я.* Анализ и синтез систем автоматического управления с распределенными параметрами: Учеб. пособие. – М.: Высш. школа, 2005. – 292 с.
5. *Данилушкин В.А., Калашников С.А., Шумаков М.А.* Применение индукционных нагревателей в трубопроводном транспорте высоковязких нефтей // Вестник Самар. гос. техн. ун-та. Сер. Технические науки. – Вып. 14. – 2002. – С. 178-181.
6. *Кондрашева Н.К., Кондрашев Д.О., Абдульминев К.Г.* Технологические расчеты и теория каталитического риформинга бензина: Учеб. пособие. – Уфа: Монография, 2008. – 160 с.
7. *Дьяконов В.П.* Simulink 5/6/7: Самоучитель. – М.: ДМК-Пресс, 2008. – 784 с.
8. *Тимофеева О.Н., Данилушкин И.А.* Численно-аналитическое решение задачи теплообмена между катализатором и потоком // Математическое моделирование и краевые задачи: Труды VII Всероссийской научной конференции с международным участием. Ч.2: Моделирование и оптимизация динамических систем и систем с распределенными параметрами. – Самара: СамГТУ, 2010. – С. 254-257.

Статья поступила в редакцию 20 апреля 2011 г.

UDC 517.958

A MODEL OF SPATIALLY DISTRIBUTED HEAT TRANSFER BETWEEN PIPE AND FLOW BASED ON MODAL REPRESENTATION

I.A. Danilushkin, O.N. Timofeeva

Samara State Technical University
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100

A dynamic model of heat transfer between pipe and flow of a heat exchanger taking into account a spatial distribution of the process is proposed. A method for solving differential equations in partial derivatives through expansion into an infinite series of eigenfunctions of the one of equations is considered. For a fixed number of modes a numerical experiment is carried out. The results are analyzed.

Keywords: *heat transfer, heat flow, temperature distribution, an object with distributed parameters, the structural theory of distributed systems, eigenfunctions, the modal representation.*

I.A. Danilushkin – Candidate of Technical Sciences, Associate professor.
O.N. Timofeeva – Postgraduate student.