УДК 681.5.015

РЕШЕНИЕ ГРАНИЧНЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ НА ОСНОВЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ[1]

А.Н. Дилигенская

Самарский государственный технический университет
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244

Рассматривается граничная обратная задача теплопроводности (ОЗТ), сформулированная в экстремальной постановке, как задача оптимального управления процессом с распределенными параметрами при ограничении множества управляющих воздействий до класса непрерывных и непрерывно-дифференцируемых функций. С использованием параметризации управляющих воздействий задача сводится к негладкой задаче математического программирования, решение которой осуществляется на основе специального метода, учитывающего альтернансные свойства искомых экстремалей.

Ключевые слова: *обратная задача теплопроводности, специальные задачи математического программирования, параметрическая оптимизация, альтернансный метод, кусочно-параболическая аппроксимация.*

Типовая граничная ОЗТ, состоящая в восстановлении граничных условий по определенной информации о температурном поле, в большинстве случаев является некорректной задачей в исходной постановке, не обладающей свойством устойчивости решения по отношению к вариациям исходных данных [1, 2]. Эффективным подходом к решению граничной ОЗТ является формулировка задачи в экстремальной постановке и последующее использование численных методов оптимизации [1].

Рассматривается линейная одномерная модель нестационарного процесса теплопроводности, заданная однородным уравнением Фурье в относительных единицах при краевых условиях третьего рода:

$$\frac{\partial\theta(x,\varphi)}{\partial\varphi}=\frac{\partial^2\theta(x,\varphi)}{\partial x^2},\qquad 0<x<1,\quad 0<\varphi\le\varphi^0; \tag{1}$$

$$\frac{\partial\theta(1,\varphi)}{\partial x}+Bi\theta(1,\varphi)=Bi\cdot u(\varphi),\ \frac{\partial\theta(0,\varphi)}{\partial x}=0,\ \varphi\in[0,\varphi^0];\ \ \theta(x,0)=0,\ x\in[0,1]. \tag{2}$$

Здесь $\theta(x,\varphi)$ – температурное поле, зависящее от безразмерного времени (число Фурье) φ и пространственной координаты $x\in[0,1]$; Bi – безразмерный критерий Био, выражающий теплофизические свойства материала; $u(\varphi)$ – температура рабочего пространства печи, рассматриваемая в качестве сосредоточенного управления на границе тела $x=1$, подчиненная ограничению

$$u(\varphi)\in V,\ \varphi>0 \tag{3}$$

принадлежности заданному множеству V соответствующих управляющих воздействий.

Задана температурная зависимость $\theta^*(\varphi)$ в некоторой фиксированной точке

---

[1] АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы», проект № 212/13988.
Анна Николаевна Дилигенская – к.т.н., доцент.

$x^* \in [0,1)$. Требуется восстановить температуру рабочего пространства печи $u^*(\varphi)$, минимизирующую невязку между заданной $\theta^*(\varphi)$ и точным решением $\theta(x^*,\varphi)$ краевой задачи (1), (2), соответствующим $u^*(\varphi)$.

Для оценки этой невязки предлагается использовать ошибку равномерного приближения результирующего температурного поля $\theta(x^*,\varphi)$ к требуемому $\theta^*(\varphi)$ на заданном временном интервале $\varphi \in \left[0,\varphi^0\right]$ [3, 4].

Для объекта (1), (2) необходимо найти подчиненное ограничению (3) управляющее воздействие $u^*(\varphi)$, обеспечивающее на заданном интервале $\varphi \in \left[0,\varphi^0\right]$ выполнение условия

$$I(u) = \max_{\varphi\in[0,\varphi^0]} \left|\theta(x^*,\varphi) - \theta^*(\varphi)\right| \to \min_{u\in V}. \tag{4}$$

Для получения условно-корректной постановки ОЗТ, не требующей применения при решении специальных методов регуляризации, необходимо рассмотреть задачу (1)-(4) на компактном множестве V физически реализуемых достаточно гладких функций [2].

Для этого достаточно осуществлять поиск $u(\varphi)$ в классе непрерывных и непрерывно-дифференцируемых функций, в соответствии с чем за управление вместо $u(\varphi)$ принимается его вторая производная [5] $w(\varphi) = u''(\varphi)$, подчиненная типовому ограничению

$$\left|w(\varphi)\right| \le \left|w_{\max}\right|,\ \varphi \in \left(0,\varphi^0\right). \tag{5}$$

Соответственно, связь искомой температуры печи $u(\varphi)$ с новым управлением $w(\varphi)$ осуществляется по соотношениям

$$\frac{du}{d\varphi} = v,\ u(0) = u_0; \tag{6}$$

$$\frac{dv}{d\varphi} = w,\ v(0) = u'(0) = v_0. \tag{7}$$

Далее, на основании известных условий оптимальности систем с распределенными параметрами [3, 4], применяемых к сформулированному функционалу (4), возможно установить структуру управляющего воздействия, параметризовав его вектором, содержащим, в том числе, априори неизвестные значения $w_{\max,}\ u(0), u'(0)$ [5].

В этом случае используется описание объекта (1), (2) в виде бесконечного ряда

$$\theta(x,\varphi) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2\mu_m \cos(\mu_m)}{\mu_m + \sin\mu_m \cos\mu_m} \cos(\mu_m x)\exp(-\mu_m^2\varphi)\int_0^{\varphi} Bi\cdot u(\tau)\exp(\mu_m^2\tau)d\tau \tag{8}$$

разложения температурного поля $\theta(x,\varphi)$ по собственным функциям $\cos(\mu_m x)$ тепловой задачи [3, 4], где собственные числа μ_m определяются решением уравнения $\mu\, tg\mu - Bi = 0$.

Уравнение (8), дополненное условиями (6), (7), приводит к следующей постановке задачи.

Для объекта управления (6)-(8) требуется найти подчиненное ограничению (5) управляющее воздействие $w(\varphi) = w^*(\varphi)$, при котором на заданном интервале $\varphi \in \left[0, \varphi^0\right]$ достигается минимаксное соотношение

$$I(w) = \max_{\varphi \in [0,\varphi^0]} \left| \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2\mu_m \cos(\mu_m)}{\mu_m + \sin\mu_m \cos\mu_m} \cos(\mu_m x) \exp(-\mu_m^2 \varphi) \times \right.$$

$$\left. \times \int_0^{\varphi} Bi \cdot u(\tau) \exp(\mu_m^2 \tau) d\tau - \theta^*(\varphi) \right| \to \min_{w} . \qquad (9)$$

Можно показать, используя стандартную процедуру принципа максимума Понтрягина, что новое управляющее воздействие $w^*(\varphi)$ представляет собой кусочно-постоянную функцию времени, поочередно принимающую только свои предельно допустимые значения $\pm w_{\max}$ [5]. В соответствии с этим искомое оптимальное управление определяется числом n и длительностями $\widetilde{\Delta}_i, i = \overline{1,n}$ знакочередующихся интервалов постоянства

$$w^*(\varphi) = (-1)^{j+1} w_{\max} \qquad \forall \varphi : \sum_{i=1}^{j-1} \widetilde{\Delta}_i < \varphi < \sum_{i=1}^{j} \widetilde{\Delta}_i ,\ j = \overline{1,n} , \qquad (10)$$

где $0 < \varphi \le \varphi^0 = \sum_{i=1}^{n} \widetilde{\Delta}_i$.

Интегрирование уравнений (6), (7) при кусочно-постоянном воздействии (10) приводит к кусочно-параболическому представлению управления:

$$u^*(\varphi) = u(0) + u'(0)\varphi + \frac{w_{\max}}{2}\varphi^2 + \eta(\varphi, \widetilde{\Delta}),\ \widetilde{\Delta} = (\widetilde{\Delta}_i),\ i = \overline{1,n} . \qquad (11)$$

Для определения $\eta(\varphi, \widetilde{\Delta})$ рассмотрим подробно случаи $n = \overline{1,3}$, которых в большинстве практических ситуаций оказывается достаточно для аппроксимации исходной функции $u(\varphi)$ кусочно-параболическим представлением (11), т. к. ошибки восстановления оказываются уже достаточно малыми [5]:

$$\eta(\varphi, \widetilde{\Delta}) = \begin{cases} 0, \quad n = 1,2,3;\ 0 < \varphi \le \widetilde{\Delta}_1; \\ -w_{\max}(\varphi - \widetilde{\Delta}_1)^2, \quad n = 2,3;\ \widetilde{\Delta}_1 < \varphi \le \widetilde{\Delta}_1 + \widetilde{\Delta}_2; \\ -w_{\max}(\varphi - \widetilde{\Delta}_1)^2 + w_{\max}(\varphi - (\widetilde{\Delta}_1 + \widetilde{\Delta}_2))^2, \quad n = 3;\ \widetilde{\Delta}_1 + \widetilde{\Delta}_2 < \varphi \le \varphi^0. \end{cases} \qquad (12)$$

Температурное поле в зависимости от вектора $\widetilde{\Delta}$ и подлежащих определению значений $w_{\max,}\ u(0), u'(0)$ описывается выражениями, соответствующими решению краевой задачи (1), (2) для всех необходимых составляющих искомого управляющего воздействия (11) $u(\varphi) = u(0) + u'(0)\varphi$ и $u(\varphi) = \frac{w_{\max}}{2}\varphi^2$ [3, 5]:

$$\theta(x, \varphi, \widetilde{\Delta}, w_{\max}, u(0), u'(0)) = \Phi(x, \varphi, u(0), u'(0)) + \Lambda(x, \varphi, w_{\max}) + \Lambda^{(2.3)}(x, \varphi, \widetilde{\Delta}) \ , \qquad (13)$$

где

$$\Phi(x,\varphi,u(0),u'(0)) = Bi\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2\mu_m\cos(\mu_m)}{\mu_m+\sin\mu_m\cos\mu_m}\cos(\mu_m x)\times$$
$$\left[\frac{u(0)}{\mu_m^2}\left(1-\exp(-\mu_m^2\varphi)\right)+\frac{u'(0)}{\mu_m^4}\left(\mu_m^2\varphi-1+\exp(-\mu_m^2\varphi)\right)\right], \qquad (14)$$

$$\Lambda(x,\varphi,w_{\max}) = Bi\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2\mu_m\cos(\mu_m)}{\mu_m+\sin\mu_m\cos\mu_m}\cos(\mu_m x)\frac{w_{\max}}{2}\left[\frac{\varphi^2}{\mu_m^2}-\frac{2\varphi}{\mu_m^4}+\frac{2}{\mu_m^6}\left(1-\exp(-\mu_m^2\varphi)\right)\right], \qquad (15)$$

$$\Lambda^{(2.3)}(x,\varphi,\widetilde{\Delta}) = \begin{cases} 0, \ n=1,2,3; \ 0<\varphi\le\widetilde{\Delta}_1; \\ -2\Lambda(x,\varphi-\widetilde{\Delta}_1), \ n=2,3; \ \widetilde{\Delta}_1<\varphi\le\widetilde{\Delta}_1+\widetilde{\Delta}_2; \\ -2\Lambda(x,\varphi-\widetilde{\Delta}_1)+2\Lambda(x,\varphi-(\widetilde{\Delta}_1+\widetilde{\Delta}_2)), \ n=3; \ \widetilde{\Delta}_1+\widetilde{\Delta}_2<\varphi\le\varphi^0. \end{cases} \qquad (16)$$

На основании (11)-(16) искомое управляющее воздействие $u^*(\varphi)$ и соответствующее ему температурное поле $\theta(x,\varphi,\Delta)$ однозначно характеризуются вектором параметров $\Delta=(\widetilde{\Delta},w_{\max},u(0),u'(0))$, заданным теперь (при известном значении φ^0) на замкнутом ограниченном множестве $G_{n+2}:\Delta\in G_{n+2}$.

Подстановкой $\theta(x^*,\varphi,\Delta)$ в (9) осуществляется точная редукция некорректной постановки ОЗТ (1), (2) к задаче параметрической оптимизации, точнее, к специальной негладкой задаче математического программирования (СЗМП):

$$I_0(\Delta) = \max_{\varphi\in[0,\varphi^0]}\left|\theta(x^*,\varphi,\Delta)-\theta^*(\varphi)\right| \to \min_{\Delta\in G_{n+2}}. \qquad (17)$$

Постановка данной СЗМП обусловлена специфическим характером процедуры параметризации. Во-первых, вектор искомых параметров $\Delta\in G_{n+2}$ имеет большую размерность, чем вектор длительностей интервалов управляющего воздействия $\widetilde{\Delta}\in G_n$ [5], и, во-вторых, ограничения на производные управляющих воздействий приводят к тому, что вектор параметров $\Delta=(\widetilde{\Delta},w_{\max},u(0),u'(0))$ содержит компоненты, имеющие новый физический смысл.

В общем случае на основе кусочно-параболической аппроксимации $u^*(\varphi)$ (11) можно восстановить искомую функцию $u(\varphi)$ на интервале фиксированной длительности $\varphi\in[0,\varphi^0]$ с любой точностью при достаточно большом n (вплоть до $n\to\infty$) соответствующим выбором вектора параметров Δ [2]. При этом для каждого значения n конечномерного вектора $\Delta^0(n)\in G_{n+2}$ сохраняется корректная постановка задачи, откуда следует возможность решения рассматриваемой ОЗТ с требуемой точностью последовательным решением ряда задач (17) при увеличении числа n до величины n^0, обеспечивающей минимаксное отклонение температурных распределений, соответствующее заданной погрешности.

Соответственно [3], [4] разность $\theta(x^*,\varphi,\Delta)-\theta^*(\varphi)$, определяемая вектором Δ^0, в определенных условиях обладает свойствами чебышевского альтернанса, на основании которых на интервале $\varphi \in [0, \varphi^0]$ достигаются знакочередующиеся максимальные по абсолютной величине значения, равные $\pm I_0(\Delta^0)$ в точках $\varphi_q^0, q = \overline{1, R}$, число которых R на единицу превышает число искомых параметров $R = (n+2)+1$. На основании этого свойства составляется замкнутая система $n+3$ соотношений для предельных разностей температур в этих точках относительно всех неизвестных. В общем случае возможны несколько типов пространственной конфигурации кривой погрешности аппроксимации температуры [5] в зависимости от расположения первой и последней точек экстремума на границах интервала $[0, \varphi^0]$ или вне их.

В качестве примера было рассмотрено решение представленным способом граничной ОЗТ при экспоненциальном законе изменения управляющего воздействия $u_0(\varphi)$ на границе $x = 1$

$$u_0(\varphi) = 1 - \exp(-\beta\varphi) \quad \varphi \in \left[0, \quad \varphi^0\right]; \ \beta = 5. \tag{18}$$

Точное решение краевой задачи (1), (2), полученное при управляющем воздействии $u_0(\varphi)$ для температуры в точке контроля $x = x^* \in [0, \ 1)$, имеет вид

$$\theta^*(\varphi) = Bi \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2\mu_m \cos(\mu_m)}{\mu_m + \sin\mu_m \cos\mu_m} \cos(\mu_m x^*) \left[\frac{1 - \exp(-\mu_m^2 \varphi)}{\mu_m^2} + \frac{\exp(-\mu_m^2 \varphi) - \exp(-\beta\varphi)}{\mu_m^2 - \beta} \right]. \tag{19}$$

Численным решением систем соотношений для различных значений Bi, φ^0, x^* из всех возможных вариантов формы распределения кривой $\theta(x^*, \varphi, \Delta) - \theta^*(\varphi)$ на отрезке $[0, \varphi^0]$ установлена конфигурация, соответствующая следующей системе уравнений:

$$\theta(x^*, \varphi_q^0, \Delta^0) - \theta^*(\varphi_q^0) = (-1)^{q+1} I_0(\Delta^0), \tag{20}$$

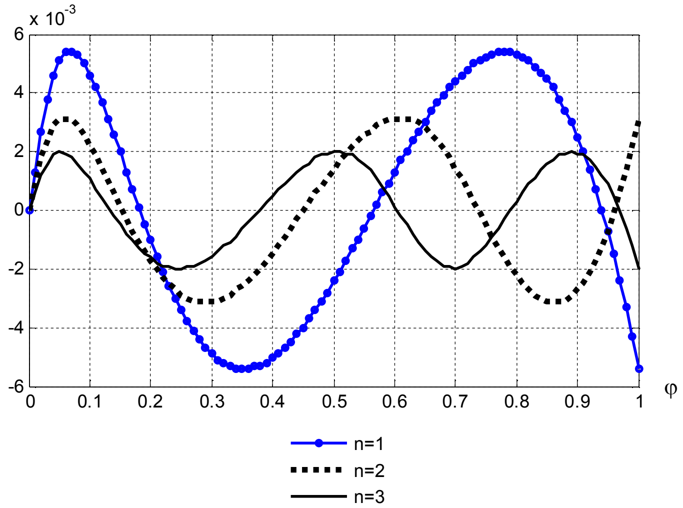
где $\varphi_1^0 > 0$; $q = \begin{cases} \overline{1,4}, n = 1; \varphi_4^0 = \varphi^0; \\ \overline{1,5}, n = 2; \varphi_5^0 = \varphi^0; \\ \overline{1,6}, n = 3; \varphi_6^0 = \varphi^0. \end{cases}$

Решение систем соотношений (20) дает оптимальную по критерию (17) кусочно-параболическую аппроксимацию сплайнами вида (11) идентифицируемой температуры рабочего пространства печи $u(\varphi)$.

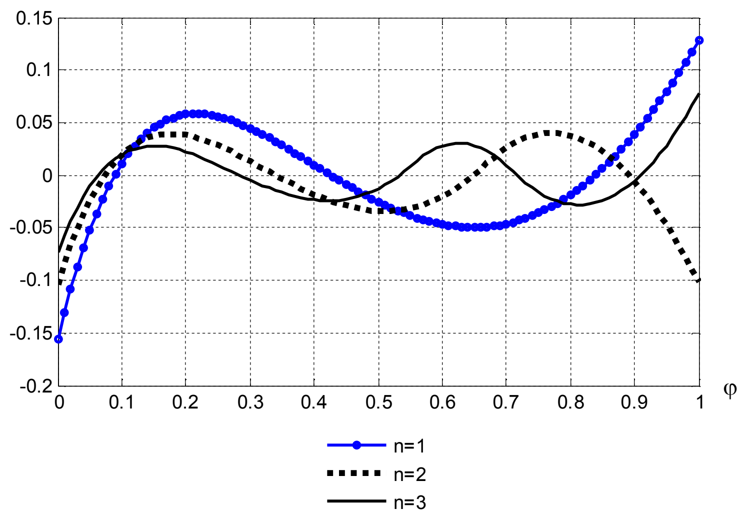
Получаемые при этом кривые погрешностей приближения температур $\theta(x^*, \varphi, \Delta) - \theta^*(\varphi)$ и идентифицируемой температуры среды $u_0(\varphi) - u^*(\varphi)$ для случаев $n = \overline{1,3}$ представлены на рисунке.

Максимальные отклонения температур $\theta(x^*, \varphi, \Delta) - \theta^*(\varphi)$ убывают с ростом числа n, в большинстве случаев удовлетворяя требуемой точности уже при $n = \overline{1,3}$. Погрешность восстановления температуры печи достигается преимущественно на границах интервала идентификации и также уменьшается с ростом числа интервалов постоянства $w^*(\varphi)$.

Проведенные расчеты показывают возможность применения альтернансного метода для решения граничных обратных задач теплопроводности в экстремальной постановке с ограничениями на производные управляющих воздействий, для решения специальной негладкой задачи математического программирования с использованием параметризации идентифицируемого граничного воздействия.



а



б

Ошибка приближения температурного поля $\theta(x^*,\varphi,\Delta)-\theta^*(\varphi)$ (*а*)

и погрешность аппроксимации управляющего воздействия $u_0(\varphi)-u^*(\varphi)$ (*б*)

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Алифанов О.М.* Обратные задачи теплообмена. – М.: Машиностроение, 1988. – 280 с.
2. *Цирлин А.М., Балакирев В.С., Дудников Е.Г.* Вариационные методы оптимизации управляемых объектов. – М.: Энергия, 1976. – 448 с.

3. *Рапопорт Э.Я.* Оптимизация процессов индукционного нагрева металла. – М.: Металлургия, 1993. – 278 с.
4. *Рапопорт Э.Я.* Альтернансный метод в прикладных задачах оптимизации. – М.: Наука, 2000. – 336 с.
5. *Рапопорт Э.Я., Плешивцева Ю.Э.* Специальные методы оптимизации в обратных задачах теплопроводности // Известия РАН. Энергетика. – 2002. – №5. – С. 144-155.

Статья поступила в редакцию 24 мая 2011 г.

UDC 681.5.015

THE BOUNDARY INVERSE HEAT CONDUCTION PROBLEMS BASED ON PARAMETRIC OPTIMIZATION

A.N. Diligenskaya

Samara State Technical University
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100

Boundary inverse thermal conductivity problem, formulated in the extremal form is solved. Problem is considered as an optimal control process with distributed parameters under the restriction of the set of control inputs to a class of continuous and continuously differentiable functions. Using the parameterization of control actions, the problem is reduce to a nonsmooth problem of mathematical programming. Solution is based on the special method that takes into account alternance properties of desired extremals.

Keywords: *inverse heat conduction problem, the special problem of mathematical programming, parametric optimization, alternance method, piecewise parabolic approximation.*

A.N. Diligenskaya – Candidate of Technical Sciences, Associate professor.