УДК 536.7

ПОЛУЧЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ПЕРЕМЕННЫМИ ФИЗИЧЕСКИМИ СВОЙСТВАМИ СРЕДЫ

В.А. Кудинов, Е.В. Ларгина

Самарский государственный технический университет
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244

Рассматривается метод получения аналитических решений задач теплопроводности, основанный на использовании дополнительных граничных условий, получаемых из основного дифференциального уравнения краевой задачи. Использование дополнительных граничных условий, задаваемых в граничных точках, приводит к выполнению исходного дифференциального уравнения внутри области. Причем точность этого выполнения зависит от числа дополнительных граничных условий (числа приближений).

***Ключевые слова**: аналитическое решение, переменные свойства, разделение переменных, дополнительные граничные условия, ортогональные методы.*

В современной технике все большее распространение получают композиционные материалы, имеющие, как правило, переменные по пространственным координатам физические свойства среды. Расчет температурного состояния таких конструкций представляет серьезные математические трудности. Точные аналитические решения подобных задач в настоящее время получены лишь для одномерного полупространства [1]. При этом решения выражаются сложными функциональными зависимостями, плохо сходящимися при малых значениях временнóй и пространственной координат.

В связи с этим актуальной является проблема получения хотя бы приближенных аналитических решений с точностью, достаточной для инженерных приложений. Для получения таких решений весьма эффективным является метод, основанный на использовании дополнительных граничных условий [2, 3] и позволяющий получать решения практически с заданной степенью точности.

Математическая постановка задачи. В качестве конкретного примера использования этого метода найдем решение нестационарной задачи теплопроводности для бесконечной пластины при линейном изменении коэффициента теплопроводности от пространственной координаты

$$\lambda(x) = \lambda_0 (1 + mx)\,, \qquad (1)$$

где λ_0 – величина коэффициента теплопроводности при $x = 0$; m – коэффициент, который может быть положительным или отрицательным в зависимости от увеличения или уменьшения коэффициента теплопроводности с возрастанием величины x.

Математическая постановка задачи при симметричных граничных условиях первого рода в данном случае имеет вид:

$$c\rho \frac{\partial T(x,\tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda(x)\frac{\partial T(x,\tau)}{\partial x}\right]; \quad (\tau > 0 \qquad 0 \le x < \delta) \qquad (2)$$

$$T(x,0) = T_0\,; \qquad (3)$$

Кудинов Василий Александрович – д.т.н., профессор.
Евгения Валериевна Ларгина – аспирант.

$$\partial T(0,\tau)/\partial x = 0; \tag{4}$$

$$T(\delta,\tau) = T_{ст}, \tag{5}$$

где c – теплоемкость; ρ – плотность; Т – температура; x – координата; τ – время; T_0 – начальная температура; $T_{ст}$ – температура стенки при $x = \delta$; δ – толщина пластины.

Введем следующие безразмерные переменные:

$$\Theta = (T - T_{ст})/(T_0 - T_{ст}),\ \xi = x/\delta,\ Fo = a\tau/\delta^2.$$

С учетом принятых обозначений задача (2) – (5) будет

$$\frac{\partial\Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo} = \frac{\partial}{\partial Fo}\left[(1+\nu\xi)\frac{\partial\Theta(\xi, Fo)}{\partial\xi}\right]; \tag{6}$$

$$(Fo > 0;\quad 0 \le \xi < 1)$$

$$\Theta(\xi, 0) = 1; \tag{7}$$

$$\frac{\partial\Theta(0, Fo)}{\partial\xi} = 0; \tag{8}$$

$$\Theta(1, Fo) = 0. \tag{9}$$

где $\nu = m\delta$.

Решение задачи (6) – (9) принимается в виде

$$\Theta(\xi, Fo) = \varphi(Fo)\Psi(\xi). \tag{10}$$

Подставляя (10) в (6), находим

$$d\varphi(Fo)/dFo + \mu\varphi(Fo) = 0; \tag{11}$$

$$\frac{d}{d\xi}\left[(1+\nu\xi)\frac{d\Psi(\xi)}{\partial\xi}\right] + \mu\,\Psi(\xi) = 0, \tag{12}$$

где μ – некоторая постоянная.

Решение уравнения (11) известно и имеет вид

$$\varphi(Fo) = A\exp(-\mu Fo), \tag{13}$$

где A – неизвестный коэффициент.

Найдем решение уравнения (12). Граничные условия для него согласно (8), (9) будут

$$d\,\Psi(0)/d\xi = 0; \quad (14) \qquad \Psi(1) = 0. \quad (15)$$

Реализация метода. Решение задачи Штурма – Лиувилля (12), (14), (15) разыскивается в виде следующего ряда:

$$\Psi(\mu, \xi) = \sum_{i=1}^{n} a_i(\mu) N_i(\xi), \tag{16}$$

где $a_i(\mu)$ $(i = \overline{0,n})$ – неизвестные коэффициенты, $N_i(\xi) = \xi^i$ – координатные функции.

Решение вида (16) представляет собой разложение искомой системы собственных функций краевой задачи Штурма – Лиувилля в степенной ряд. Отличие от известных методов разложения собственных функций в ряды заключаются в том, что неизвестные коэффициенты ряда находятся из дополнительных граничных условий.

Их физический смысл состоит в выполнении уравнения (12) и производных от него различного порядка в граничной точке $\xi = 0$, т. е. там, где собственные функции (а также и искомая функция $\Theta(\xi, Fo)$) неизвестны и определяются в процессе решения краевой задачи. Расчеты показывают, что с увеличением числа членов ряда (16) точность определения собственных чисел и собственных функций возрастает, и, следовательно, повышается точность выполнения уравнений (6) и (12).

Преимущество такого метода решения краевых задач нестационарной теплопроводности заключается в возможности получения аналитических решений для любых дифференциальных уравнений (допускающих разделение переменных), в том числе и для тех, которые другими методами не интегрируются, например, уравнения (6).

Если ограничиться, например, десятью членами ряда (16), то будем иметь десять неизвестных коэффициентов $a_i\,(i = \overline{0,9})$, а граничных условий только два (14) и (15). В связи с этим необходимо добавить еще восемь дополнительных граничных условий. Первое из них согласно соотношению (14) будет

$$\Psi(0) = const = 1\,. \tag{17}$$

Для нахождения других дополнительных граничных условий будем использовать дифференциальное уравнение (12). Записывая это уравнение и выражения, полученные после взятия от него производных различного порядка, применительно к точкам $\xi = 0$ будем иметь следующие дополнительные граничные условия:

$$\begin{gathered}
\Psi^{II}(0) = -\mu\,,\ \Psi^{III}(0) = 2\nu\mu\ ; \\
\Psi^{IV}(0) = -6\nu^2\mu + \mu^2\,,\ \Psi^{V}(0) = 24\nu^3\mu - 6\mu^2\nu\,; \\
\Psi^{VI}(0) = -120\nu^4\mu + 36\mu^2\nu^2 - \mu^3\,; \\
\Psi^{VII}(0) = 720\nu^5\mu - 240\mu^2\nu^3 + 12\mu^3\nu\,; \\
\Psi^{VIII}(0) = -5040\nu^6\mu + 1800\mu^2\nu^4 - 120\mu^3\nu^2 + \mu^4\,.
\end{gathered} \tag{18}$$

После подстановки (16) в основные (14), (15) и дополнительные (18) граничные условия получается система десяти алгебраических линейных уравнений с десятью неизвестными a_i, из решения которой находим:

$$a_0 = 1\,;\ a_1 = 0\,;\ a_2 = -\frac{\mu}{2}\,;\ a_3 = \frac{\mu\nu}{3}\,;\ a_4 = \frac{\mu}{4}\left(\frac{\mu}{6} - \nu^2\right);\ a_5 = \frac{\mu\nu}{5}\left(\nu^2 - \frac{\mu}{4}\right);$$

$$a_6 = \frac{\mu}{2}\left(-\frac{\nu^4}{3} + \frac{\mu\nu^2}{10} - \frac{\mu^2}{360}\right);\ a_7 = \frac{\mu\nu}{7}\left(\nu^4 + \frac{\mu\nu^2}{3} - \frac{\mu^2}{60}\right);$$

$$a_8 = \frac{\mu}{8}\left(\nu^6 + \frac{5\mu\nu^4}{14} - \frac{\mu^2\nu^2}{42} + \frac{\mu^3}{5040}\right);$$

$$a_9 = -1 + \frac{\mu}{2} + \frac{\mu\nu}{3} - \frac{\mu}{4}\left(\frac{\mu}{6} - \nu^2\right) - \frac{\mu\nu}{5}\left(\nu^2 - \frac{\mu}{4}\right) + \frac{\mu}{2}\left(-\frac{\nu^4}{3} + \frac{\mu\nu^2}{10} - \frac{\mu^2}{360}\right) -$$

$$- \frac{\mu\nu}{7}\left(\nu^4 + \frac{\mu\nu^2}{3} - \frac{\mu^2}{60}\right) + \frac{\mu}{8}\left(\nu^6 + \frac{5\mu\nu^4}{14} - \frac{\mu^2\nu^2}{42} + \frac{\mu^3}{5040}\right).$$

После подстановки найденных значений a_i ($i = \overline{0,9}$) в (16) составляется интеграл взвешенной невязки уравнения (12), т. е.

$$\int_0^1 \left[\frac{d}{d\xi}\left[(1+\nu\xi)\frac{\partial \Psi(\mu,\xi)}{\partial \xi}\right] + \mu\ \Psi(\mu,\xi) \right] d\xi = 0\,, \tag{19}$$

где ($i = \overline{0,n}$; $n = 9$).

Вычисляя интегралы в (19), относительно собственных чисел μ получаем алгебраическое уравнение пятой степени. Корни этого уравнения следующие:

$$\mu_1 = 4{,}12913949;\ \mu_2 = 33{,}0583897 - 34{,}962864 \cdot 1i;$$

$$\mu_3 = 33{,}0583897 + 34{,}962864 \cdot 1i;\ \mu_4 = 35{,}1005690;\ \mu_5 = 194{,}653512.$$

Корни μ_2 и μ_3 следует отбросить как не имеющие физического смысла, а корень μ_5 – как не удовлетворяющий уравнению (12) (в чем можно убедиться непосредственной подстановкой). Таким образом, используем только корни μ_1 и μ_4 (μ_4 в дальнейшем обозначим через μ_2).

Подставляя (13), (16) в (10), для каждого собственного числа будем иметь частные решения вида

$$\Theta_k(\xi, Fo) = A_k \exp(-\mu_k Fo) \sum_{i=0}^{9} a_i(\mu_k)\xi^i. \quad (k = 1,2) \tag{20}$$

Каждое частное решение точно удовлетворяет граничным условиям (8), (9) и приближенно удовлетворяет уравнению (6). Однако ни одно из них, в том числе и их сумма

$$\Theta(\xi, Fo) = \sum_{k=1}^{2}\left[A_k \exp(-\mu_k Fo)\sum_{i=0}^{9} a_i(\mu_k)\xi^i\right], \tag{21}$$

не удовлетворяют начальному условию (7).

Для выполнения начального условия составляется его невязка и требуется ортогональность невязки к каждой собственной функции, т. е.

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^1 \left[A_1\sum_{i=0}^{9} a_i(\mu_1)\xi^i + A_2\sum_{i=0}^{9} a_i(\mu_2)\xi^i - 1\right]\sum_{i=0}^{9} a_i(\mu_1)\xi^i d\xi = 0; \\ &\int_0^1 \left[A_1\sum_{i=0}^{9} a_i(\mu_1)\xi^i + A_2\sum_{i=0}^{9} a_i(\mu_2)\xi^i - 1\right]\sum_{i=0}^{9} a_i(\mu_2)\xi^i d\xi = 0. \end{aligned}\right\}. \tag{22}$$

Определяя интегралы в (22), относительно неизвестных коэффициентов A_k $(k = 1,2)$ получаем систему двух алгебраических линейных уравнений, из решения которой находим $A_1 = 1{,}30203186$; $A_2 = -0{,}4854812$.

После определения коэффициентов A_k $(k = \overline{1,2})$ решение задачи (6)–(9) находится из (21).

Повышение точности решения связано с увеличением числа членов ряда (16), для определения неизвестных коэффициентов которого необходимо привлекать дополнительные граничные условия, получающиеся путем многократного дифференцирования уравнения (12) по переменной ξ.

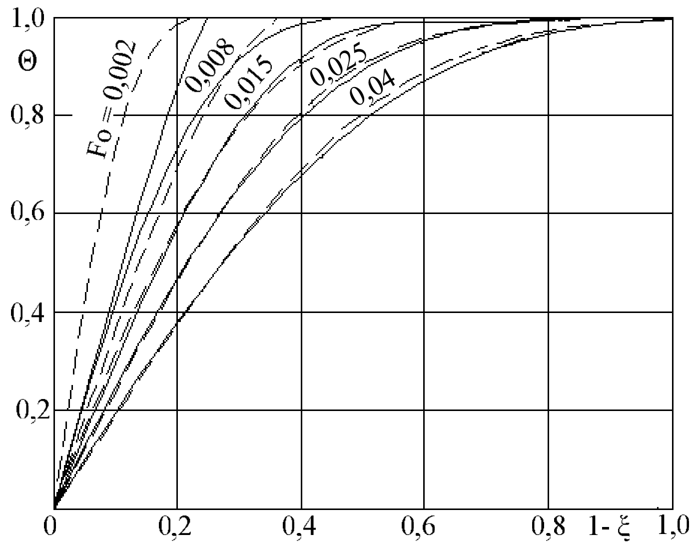
Для тридцати членов ряда (16) собственные числа, удовлетворяющие уравнению (12), имеют вид

$$\mu_1 = 4{,}24521952;\ \mu_2 = 32{,}8925431;$$

$$\mu_3 = 90{,}6596578;\ \mu_4 = 218{,}3277245.$$

Из выполнения начального условия (7) относительно неизвестных коэффициентов A_k $(k = \overline{1,4})$ в данном случае будем иметь систему четырех алгебраических линейных уравнений, из решения которой находим $A_1 = 1{,}3156446$; $A_2 = -0{,}4893152$; $A_3 = 0{,}28697373$; $A_4 = -0{,}06234287$.

Результаты расчетов температур по формуле (21) $(\nu = 1{,}0)$ в сравнении с решением, полученным по методу [3], представлены на графике (рис. 1).

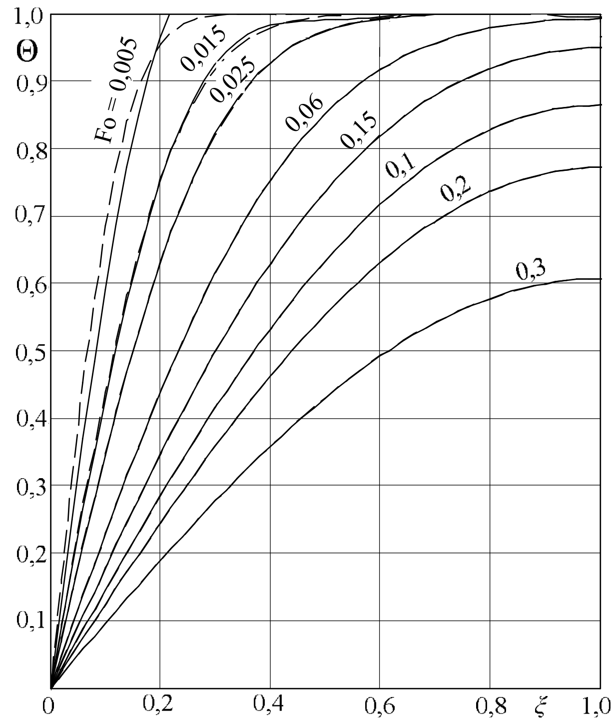


Р и с . 1. Изменение температуры в пластине при линейной зависимости коэффициента теплопроводности от пространственной переменной:
——— по формуле (21) (четвертое приближение) ;
– – – – по методу [3]; $\nu = 1$

Анализ позволяет сделать вывод, что в диапазоне чисел Фурье $0{,}004 \le Fo \le 0{,}02$ расхождение результатов составляет не более 3%. Отметим, что в [3] задача решена интегральным методом теплового баланса, согласно которому решение задачи (2)–(5) выполняется в две стадии. При этом в рассмотрение вводится понятие фронта температурного возмущения (толщины прогретого слоя). Использование этого метода приводит к необходимости получения приближенных аналитических решений для каждой стадии в отдельности. Однако к числу его несомненных преимуществ относится возможность получения приближенных аналитических решений для сверхмалых значений времени практически с заданной степенью точности [3].

Если положить $\nu = 0$, то задача (6)–(9) приводится к задаче с постоянными физическими свойствами среды, решение которой известно [4]. Результаты расчетов для этого случая в диапазоне $0{,}025 \le Fo \le \infty$ практически совпадают с точными (рис. 2).

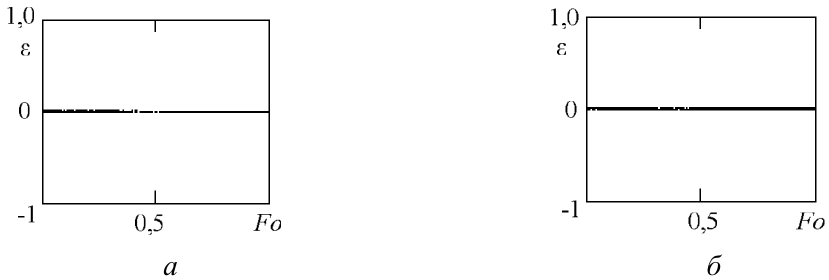
Анализ невязок уравнения (6) (см. рис. 3, 4) позволяет сделать заключение о практическом выполнении этого уравнения в диапазоне чисел $0{,}1 \le Fo \le \infty$. Максимальная невязка в диапазоне $0{,}025 \le Fo \le 0{,}1$ не превышает 2%. Для увеличения точности решения необходимо увеличивать число членов ряда (16) и, следовательно, число дополнительных граничных условий.



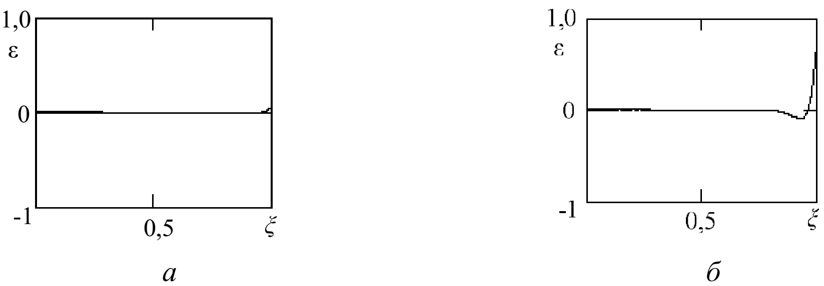
Р и с . 2. Изменение температуры в пластине при линейной зависимости коэффициента теплопроводности от пространственной переменной:

——— по формуле (21) (четвертое приближение);

– – – – точное решение [4]; $\nu = 0$



Р и с . 3. Изменение невязки ε уравнения (6) во времени (четвертое приближение):
а – $\xi = 0{,}2$; *б* – $\xi = 0{,}007$



Р и с . 4. Изменение невязки ε уравнения (6) по координате (четвертое приближение):
а – $Fo = 0{,}1$; *б* – $Fo = 0{,}025$

Выводы

1. На основе использования дополнительных граничных условий получено аналитическое решение задачи теплопроводности с переменным по пространственной координате коэффициентом теплопроводности (λ – линейная функция координаты). Имеется возможность получения аналитических решений практически с заданной степенью точности. Решения имеют простой и удобный для инженерных приложений вид.

2. Разработанная методика позволяет получать аналитические решения при любой зависимости теплофизических свойств от пространственной координаты, в том числе и при одновременном изменении не только коэффициента теплопроводности, но и других теплофизических коэффициентов. Имеется возможность получения аналитических решений практически для любых дифференциальных уравнений, допускающих разделение переменных.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Цой П.В.* Методы расчета задач тепломассопереноса. – М.: Энергоатомиздат, 1984. – 414 с.
2. *Кудинов В.А., Карташов Э.М., Калашников В.В.* Аналитические решения задач тепломассопереноса и термоупругости для многослойных конструкций. – М.: Высшая школа, 2005. – 430 с.
3. *Кудинов В.А., Аверин Б.В., Стефанюк Е.В.* Теплопроводность и термоупругость в многослойных конструкциях. – М.: Высшая школа, 2008. – 391 с.
4. *Лыков А.В.* Теория теплопроводности. – М.: Высшая школа, 1967. – 600 с.

Статья поступила в редакцию 3 сентября 2010 г.

UDC 536.7

OBTAINING ANALYTICAL SOLVING OF THERMAL CONDUCTIVITY PROBLEMS WITH VARIABLE PROPERTIES OF PHYSICAL ENVIRONMENT

V.A. Kudinov. E.V. Largina

Samara State Technical University
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100

Method of obtaining of analytical solution of heat conductivity problems based on using of additional boundary terms received from basic differential equation of edge problem considered. Using additional boundary conditions stipulated in boundary points leads to implementation of initial differential equation inside the area. Implementation accuracy depends on the number of additional boundary conditions (number of approximations).

Keywords: *analytical solution, variable properties, variable replacement, division of variables, additional boundary conditions, orthogonal methods.*

V.A. Kudinov – Doctor of Technical Sciences, Professor.
E.V. Largina – Postgraduate student.