

Краткие сообщения

УДК 517 538.612.3.067.62

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ НАИЛУЧШЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ ПРИ СПЛАЙН-АППРОКСИМАЦИИ

А.С. Брятов, В.М. Мякишев, А.Н. Проценко

Самарский государственный технический университет
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244

Обсуждается влияние формы аппроксимируемой кривой на выбор метода аппроксимации при решении задачи автоматического воспроизведения функции с заданной точностью, показана единственность решения.

Ключевые слова: сплайн-аппроксимация, функция, кривизна, дуга, окружность, хорда, приближение.

Из анализа литературных источников и опыта эксплуатации функциональных преобразователей информации, предназначенных для автоматического воспроизведения функций с заданной точностью, следует, что выбор метода аппроксимации определяется в первую очередь «геометрией» кривой, подлежащей аппроксимации. Алгоритм аппроксимации, реализация которого обеспечивает высокие метрологические характеристики, строится по следующей схеме: производится анализ кривой, определяются ее характерные точки, выбирается метод аппроксимации, определяются критерий близости, тип базисных функций и узлы аппроксимации.

С целью выявления резервов одновременного повышения точности аппроксимации и расширения функциональных возможностей преобразователей в работе рассматривается теорема о существовании и единственности наилучшего приближения на отрезке аппроксимации (частный случай).

Пусть $y=f(x)$ – вещественная функция, определенная и непрерывная на отрезке $[a,b]$. В качестве нормы этой функции возьмем $\|f\| = \max_{x \in [a,b]} f(x)$.

Теорема. Для любой непрерывной функции $f(x)$ и любого числа $\varepsilon > 0$ найдется сплайн-функция второй (третьей) степени, удовлетворяющая условию $S(f,x)=f_i$ и одному из типов краевых условий I-III, что $|f(x)-S(x)| \leq \varepsilon$ для любого $x \in [a,b]$.

Для простоты доказательства введем следующее. Пусть $f(x)$ – непрерывная строго возрастающая функция на отрезке $[a,b]$, состоящая из дуг окружностей. Аппроксимация дуг окружностей осуществляется параболой второй или третьей степени.

*Александр Сергеевич Брятов – к.т.н., доцент.
Владимир Михайлович Мякишев – к.т.н., доцент.
Александр Николаевич Проценко – к.т.н., доцент.*

Допущение. Допустим, что средний радиус кривизны квадратичной (кубической) параболы может быть заменен радиусом окружности, аппроксимирующей функцию $f(x)$ на 1-ом участке аппроксимации при условии, что $x \in [a, b]$.

Доказательство. Известно, что если a_n – сторона правильного вписанного многоугольника, то сторона a_{2n} правильного вписанного многоугольника с удвоенным числом сторон выражается через a_n формулой

$$a_{2n} = \sqrt{2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{1}{4}a_n^2}}, \quad (1)$$

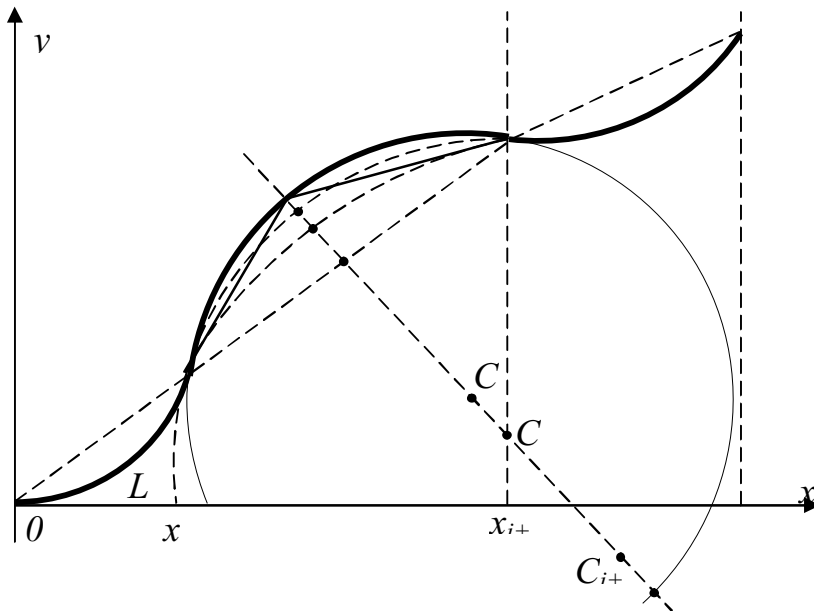
где R – радиус окружности.

Степень внутренней точки D (см. рисунок) относительно окружности радиуса R равна $p^2 = \left(\frac{l_x}{2}\right)^2$. С другой стороны, $p^2 = BD \cdot DK$, следовательно, $\left(\frac{l_x}{2}\right)^2 = h(2R - h)$.

Высота сегмента h определяется из уравнения $h^2 - 2Rh + \left(\frac{l_x}{2}\right)^2 = 0$, откуда

$$h = R - \sqrt{R^2 - \left(\frac{l_x}{2}\right)^2}.$$

Пусть аппроксимируемая кривая на отрезке $[a, b]$ представлена сопряженными дугами трех окружностей. Рассмотрим аппроксимацию дуги ABC окружности радиуса R аппроксимирующими дугами AEC и AFC окружностей с радиусами R_i и R_{i+1} соответственно.



Аппроксимация дуги окружности: $BD=h$, $BC_0=R$, $EC_i=R_i$, $FC_{i+1}=R_{i+1}$

Из двух дуг AEC и AFC ближе к аппроксимируемой дуге ABC та, у которой радиус наименее отклоняется от радиуса аппроксимируемой дуги. Существование наи-

лучшего приближения, как видно из геометрических представлений, не вызывает сомнения.

Если имеем семейство дуг окружностей, опирающихся на одну и ту же хорду, то среди этих дуг всегда найдется такая, которая будет единственной из всех наилучшим образом приближенной к аппроксимируемой дуге. Это возможно в том случае, когда разность между h и h_i имеет минимальное значение, т. е.

$$h - h_i = \left[R - \sqrt{R^2 - \left(\frac{l_x}{2}\right)^2} \right] - \left[R_i - \sqrt{R_i^2 - \left(\frac{l_x}{2}\right)^2} \right] \leq \varepsilon.$$

Для приближения дуг, отличных от окружности, т. е. имеющих разный радиус кривизны в каждой точке кривой, этот метод также применим, но при этом находится средний радиус кривизны дуги. Для определения качества приближения необходимо находить не только радиус кривизны, но и длину воспроизводящей дуги.

Кривизна (радиус кривизны) тесно связана с длиной дуги кривой. Чем ближе радиус кривизны воспроизводящей дуги кривой к радиусу кривизны воспроизводимой дуги кривой, стягиваемой одной и той же хордой, тем лучше приближены отрезки кривой.

Для определения дуги кривой можно воспользоваться формулой Х. Гюйгенса:

$$L = 2l + \frac{1}{3}(2l - l_x). \quad (2)$$

Так как $l = \sqrt{\left(\frac{l_x}{2}\right)^2 + h^2}$, то $L = f(l_x; h)$ определяется выражением

$$L = \frac{8}{3} \sqrt{\left(\frac{l_x}{2}\right)^2 + h^2} - \frac{l_x}{3}, \quad (3)$$

но $l = \sqrt{2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \left(\frac{l_x}{2}\right)^2}}$, тогда $L = f(R; l_x)$ и $L = \frac{8}{3} \sqrt{2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \left(\frac{l_x}{2}\right)^2}} - \frac{l_x}{3}$.

Поскольку $\left(\frac{l_x}{2}\right)^2 = h(2R - h)$, а $l_x = 2\sqrt{h(2R - h)}$, то $L = f(R; l_x)$ определяется выражением

$$L = \frac{8}{3} \sqrt{2Rh} - \frac{2}{3} \sqrt{h(2R - h)}. \quad (4)$$

Для любых мало изогнутых дуг, когда отношение h/l_x мало, можно воспользоваться приближенным выражением

$$L \approx l_x \left[1 + \frac{8}{3} \left(\frac{h}{l_x}\right)^2 - \frac{32}{5} \left(\frac{h}{l_x}\right)^4 \right]. \quad (5)$$

Если аппроксимируется не окружность, а какая-либо другая кривая, то, определяя для каждого интервала среднее значение радиуса кривизны, можно таким же методом, как и для окружности, произвести аппроксимацию любой кривой.

При построении аппроксимирующей кривой, уклоняющейся от заданной не более чем на ε , аппроксимация должна вестись на каждом из отрезков в направлении уменьшения кривизны.

Для увеличения длины дуги (интервала аппроксимации), аппроксимируемой одной параболой, можно воспользоваться уравнением параболы более высоких степе-

ней (4-й и 5-й). Однако, как показали исследования, общее количество вычислений при такой аппроксимации значительно увеличивается и, кроме того, значительно увеличиваются затраты на аппаратуру при создании функциональных преобразователей информации. Выбор вида базисной сплайн-функции должен производиться исходя из условий наименьшего отклонения кривизны воспроизводящей и воспроизводимой функции и плавности изменения производных этих функций.

Статья поступила в редакцию 10 марта 2011 г.

UDC 517.538.612.3.067.62

THEORETICAL FOUNDATIONS OF EXISTENCE AND UNIQUENESS OF BEST APPROXIMATION BY SPLINE-APPROXIMATION

A.S. Bryatov, V.M. Myakishev, A.N. Protsenko

Samara State Technical University
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443076

The influence of the shape of the approximated curve to choose an approximation method for solving the problem of automatic playback function with a given accuracy, uniqueness of solutions.

Keywords: *spline, approximation, a function, curvature, arc, circle, chord, approach.*

A.S. Bryatov – Candidate of Technical Sciences, Associate professor.

V.M. Myakishev – Associate professor.

A.N. Protsenko – Candidate of Technical Sciences, Associate professor.