

## ОПТИМИЗАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ СИСТЕМЫ ОБСЛУЖИВАНИЯ ПЕРЕВОЗОК УЗЛОВОГО АЭРОПОРТА НА БАЗЕ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ КОЛМОГОРОВА

**В.А. Романенко**

Самарский государственный аэрокосмический университет им. академика С.П. Королева  
443086, г. Самара, Московское шоссе, 34

*Продемонстрирована возможность использования подхода, базирующегося на численном интегрировании системы уравнений Колмогорова большой размерности, к решению задач оптимизации параметров системы обслуживания перевозок узлового аэропорта с существенно нестационарными входящими потоками воздушных судов (ВС) и пассажиров. Подробно рассмотрен модельный пример.*

**Ключевые слова:** система массового обслуживания, оптимизация, численное интегрирование, узловой аэропорт.

**Введение.** Узловой аэропорт – это аэропорт, обслуживающий значительное число трансферных пассажиров, расписание которого строится по волновому принципу: массовые прибытия рейсов сменяются их массовыми отправлениями, между «волнами» прибытий-отправлений следуют паузы с малым числом рейсов. Волновой характер расписания ограничивает возможности применения для расчета и оптимизации параметров узлового аэропорта простых аналитических моделей теории массового обслуживания, предполагающих принадлежность потока рейсов к простейшим. Для того чтобы поток требований, входящий в систему массового обслуживания (СМО), считался простейшим, он должен удовлетворять требованиям стационарности, ординарности и отсутствия последствия. В [1] показано, что поток рейсов узлового аэропорта отвечает только двум последним требованиям, т. е. является нестационарным пуассоновским. С учетом существенной нестационарности потока для анализа и оптимизации параметров узлового аэропорта здесь использован подход, основанный на численном интегрировании системы дифференциальных уравнений Колмогорова, описывающей состояния отдельных подсистем узлового аэропорта как СМО.

В статье решены задачи выбора оптимального метода обслуживания и определения оптимальной численности обслуживающих аппаратов в ответственных за выполнение отдельных технологических операций подсистемах узлового аэропорта, рассматриваемых в качестве СМО с ожиданием. Использование описанной методики может позволить службам узлового аэропорта эффективно маневрировать своими ресурсами, перераспределяя их между отправляемыми и прибывающими рейсами.

**Общая постановка оптимизационной задачи.** На некотором временном интервале  $[0, T)$  определить зависимость от времени оптимального числа однотипных обслуживающих аппаратов  $n_{opt}(t)$  в полностью доступной СМО с ожиданием, в которую поступает нестационарный пуассоновский поток требований с мгновенной интенсивностью  $\lambda(t)$ . Время обслуживания требования  $t_{обсл}$  – показательно распределен-

---

*Владимир Алексеевич Романенко (к.т.н., доц.), докторант, каф. организации и управления перевозками на транспорте.*

ная случайная величина. Под оптимальным понимается минимальное число обслуживающих аппаратов, обеспечивающее ожидание требованием обслуживания в очереди заданной продолжительности  $t_p$  с заданной надежностью  $P_p$ .

Протяженность интервала  $[0, T)$  определена с учетом следующих соображений. Система волн узлового аэропорта имеет жесткую структуру, которая воспроизводится за определенный временной интервал в течение периода действия расписания. Эта структура описывается такими параметрами, как число волн, интервалы между волнами, интенсивность движения рейсов в течение волны. Поскольку период повторения системы волн составляет, как правило, одни сутки, то принято  $T = 1$  сут.

**Математическая модель оптимизации.** Вероятности состояний рассматриваемой СМО  $P_i(t)$  ( $i = 0, 1, \dots, n + m$ ) описываются уравнениями Колмогорова [2]:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} P_0(t) &= -\lambda(t)P_0(t) + \nu P_1(t); \\ \frac{d}{dt} P_i(t) &= \lambda(t)P_{i-1}(t) - (\lambda(t) + i\nu)P_i(t) + (i+1)\nu P_{i+1}(t), \quad 1 \leq i \leq n-1; \\ \frac{d}{dt} P_i(t) &= \lambda(t)P_{i-1}(t) - (\lambda(t) + n\nu)P_i(t) + n\nu P_{i+1}(t), \quad n \leq i \leq n+m-1; \\ \frac{d}{dt} P_{n+m}(t) &= \lambda(t)P_{n+m-1}(t) - n\nu P_{n+m}(t), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\nu = \frac{1}{M[t_{обсл}]}$  – интенсивность обслуживания;  $m$  – предельная длина очереди из требований, ограниченная исходя из условия, что  $n+m$  – наибольшая численность всех требований, которые могут поступить на обслуживание в данный период.

Начальные условия для интегрирования системы (1) при  $t = 0$ :

$$P_0(0) = 1; \quad P_i(0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n+m. \quad (2)$$

Поскольку найти аналитическое решение системы (1) с начальными условиями (2) в явном виде при большом  $n+m$  практически невозможно, исследование поведения этой системы проводится здесь с использованием ЭВМ путем численного решения (1) с учетом (2) методом Рунге – Кутта четвертого порядка.

Искомое  $n_{opt}(t)$  в момент  $t$  должно быть таким, чтобы выполнялось условие

$$P\{t_\phi(t) < t_p\} \geq P_p, \quad (3)$$

где  $t_\phi(t)$  – виртуальное фактическое время ожидания в очереди в момент  $t$ ;  $P\{t_\phi(t) < t_p\}$  – вероятность того, что виртуальное фактическое время ожидания в очереди  $t_\phi(t)$  не превысит заданное расчетное время ожидания  $t_p$ .

Обозначив через  $W(t_p, t) = P\{t_\phi(t) < t_p\}$  функцию распределения виртуального фактического времени ожидания  $t_\phi(t)$ , запишем [2]

$$W(t_p, t) = \frac{1}{1 - \pi(t)} \left[ \sum_{i=0}^{n-1} P_i(t) + \sum_{i=0}^{m-1} P_{n+i}(t) E_{i+1}^{n\nu}(t_p) \right], \quad (4)$$

где  $\pi(t)$  – вероятность потери требования;  $E_{i+1}^{n\nu}(t_p)$  – функция распределения Эрланга с параметрами  $n\nu$  и  $i+1$ , вычисляемая по формуле

$$E_i^{nv}(t_P) = 1 - \exp(-nvt_P) \sum_{j=0}^{i-1} \frac{(nvt_P)^j}{j!}. \quad (5)$$

Считая предельную длину очереди  $m$  большой и, следовательно, принимая  $\pi(t) \approx 0$ , формулу (4) приведем к более простому виду

$$W(t_P, t) \approx \sum_{i=0}^{n-1} P_i(t) + \sum_{i=0}^{m-1} P_{n+i}(t) E_{i+1}^{nv}(t_P). \quad (6)$$

Таким образом, расчет потребного в момент  $t$  числа аппаратов обслуживания проводится на каждом шаге реализации процедуры численного интегрирования системы (1), (2) в соответствии со следующим итерационным алгоритмом. Для принятого в качестве начального приближения  $n^0(t) = \lfloor \lambda(t)/\nu \rfloor + 1$  (где  $\lfloor x \rfloor$  – наибольшее целое число  $< x$ ) по формулам (5) и (6) находится величина  $P\{t_\Phi(t) < t_P\}$ . Выполняется проверка условия (3). Если оно выполняется, то принятая величина  $n$  и является искомым оптимальным количеством средств обслуживания. В случае невыполнения условия (3) величина  $n$  увеличивается на единицу и расчет повторяется до тех пор, пока (3) не будет выполнено.

Для найденного  $n_{opt}(t)$  определяются зависимости от времени средней длины очереди  $M_{Oч}(t) = \sum_{i=n+1}^{n+m} [i - n_{opt}(t)] P_i(t)$  и среднего числа свободных от обслуживания приборов  $n_C(t) = \sum_{i=0}^{n-1} [n_{opt}(t) - i] P_i(t)$ .

Эффективность использования задействованных в обслуживании аппаратов выражает коэффициент занятости  $k_3(t) = \frac{n_{opt}(t) - n_C(t)}{n_{opt}(t)}$ .

**Модель потоков требований.** Для моделирования различных технологических операций и схем аэропортового обслуживания в качестве потока требований, поступающего в рассматриваемую СМО, может выступать поток прибывающих рейсов, поток отправляющихся рейсов, поток пассажиров и другие виды потоков.

В общем виде выражение для мгновенной интенсивности нестационарного потока  $\lambda(t)$  записывается как

$$\lambda(t) = \frac{d\Lambda(t)}{dt}, \quad (7)$$

где  $\Lambda(t)$  – число требований, прибывших в систему к моменту времени  $t$ .

Для компьютерных вычислений выражение (7) приводится к приближенной дискретной форме, для чего интервал  $[0, T)$  разбивается на  $k$  промежутков равной величины  $\Delta t$ . Мгновенная интенсивность  $\lambda_i$  в момент времени  $t_i$  ( $t_i$  – правая граница  $i$ -того интервала) определяется по формуле

$$\lambda_i = \frac{\Delta\Lambda_i}{\Delta t}, \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad (8)$$

где  $\Delta\Lambda_i$  – число требований, попадающих в  $i$ -тый интервал дискретизации.

Если в роли требований выступают прибывающие или отправляющиеся рейсы, то величины  $\Delta\Lambda_i$  ( $i=1,2,\dots,k$ ) определяются по расписанию движения ВС или статистическим данным аэропорта. Если требования – вылетающие пассажиры, то помимо указанных данных для определения интенсивности их потока необходимо также наличие вероятностного распределения времени нахождения пассажиров в аэропорту  $\tau$ , описываемого функцией  $F'(\tau)$  или плотностью  $f'(\tau)$ .

При наличии расписания и числа пассажиров каждого рейса мгновенная интенсивность потока пассажиров, поступающих в аэропорт в момент  $t$ , определяется как

$$\lambda_{II}(t) = \sum_{j=1}^{M(t)} \lambda_{IIj}(t), \quad (9)$$

где  $M(t)$  – число вылетающих рейсов, пассажиры которых прибывают в аэропорт в момент  $t$ ,  $\lambda_{IIj}(t)$  ( $j=1,\dots,M(t)$ ) – интенсивность потока пассажиров  $j$ -того рейса, прибывающих в аэропорт в момент  $t$ .

По аналогии с (7) формула для определения  $\lambda_{IIj}(t)$  имеет вид

$$\lambda_{IIj}(t) = \frac{d\Lambda_{IIj}(t)}{dt}, \quad (10)$$

где  $\Lambda_{IIj}(t) = N_{IIj} \cdot P_j(\theta < t)$  – число пассажиров  $j$ -того рейса, прибывших в аэропорт к моменту времени  $t$ ;  $N_{IIj}$  – число пассажиров, взявших билет на  $j$ -тый рейс;  $P_j(\theta < t)$  – вероятность того, что время прибытия пассажира  $j$ -того рейса в аэропорт  $\theta$ , отмеряемое от начала интервала  $[0, T)$ , не превысит  $t$ . Поскольку  $P_j(\theta < t)$  по определению равняется  $F_j(t)$  – функции распределения времени прибытия пассажира  $j$ -того рейса в аэропорт, то формула для  $\Lambda_{IIj}(t)$  преобразуется к виду

$$\Lambda_{IIj}(t) = N_{IIj} \cdot F_j(t). \quad (11)$$

Подставляя (11) в (10) и учитывая, что по определению плотность распределения времени прибытия пассажира  $j$ -того рейса в аэропорт  $f_j(t)$  связана с функцией  $F_j(t)$  соотношением  $f_j(t) = dF_j(t)/dt$ , получим

$$\lambda_{IIj}(t) = N_{IIj} f_j(t). \quad (12)$$

Неудобство использования в формуле (12) функции  $f_j(t)$ , связанное с ее зависимостью от времени отправления  $j$ -того рейса, отчасти снимается, если вместо нее использовать введенную ранее  $f'(\tau)$ . Предполагая, что  $f'(\tau)$  не зависит от определенного рейса, и учитывая, что параметр  $\tau$  связан с натуральным временем  $t$  соотношением  $\tau = t_{Bj} - t$ , где  $t_{Bj}$  – время вылета  $j$ -того рейса, получим формулу, пригодную для компьютерных вычислений:

$$\lambda_{IIj}(t) = N_{IIj} f'(t_{Bj} - t). \quad (13)$$

Подставляя (13) в (9), окончательно для суммарного пассажиропотока получаем

$$\lambda_{II}(t) = \sum_{j=1}^{M(t)} N_{IIj} f'(t_{Bj} - t).$$

**Модельный пример.** В качестве объекта оптимизации выбран пассажирский комплекс аэропорта г. Рига (Латвия), работающего в течение последнего ряда лет по узловой схеме. Определяется оптимальная численность мест обслуживания на этапах высадки из ВС и доставки в аэровокзал прилетевших пассажиров, регистрации вылетающих пассажиров, а также их доставки и посадки в ВС. Предполагается, что эти операции выполняются при участии персонала службы организации перевозок аэропорта, поэтому имеется возможность его перераспределения между рассматриваемыми операциями. Сравниваются две технологические схемы выполнения регистрации: порейсовая и свободная.

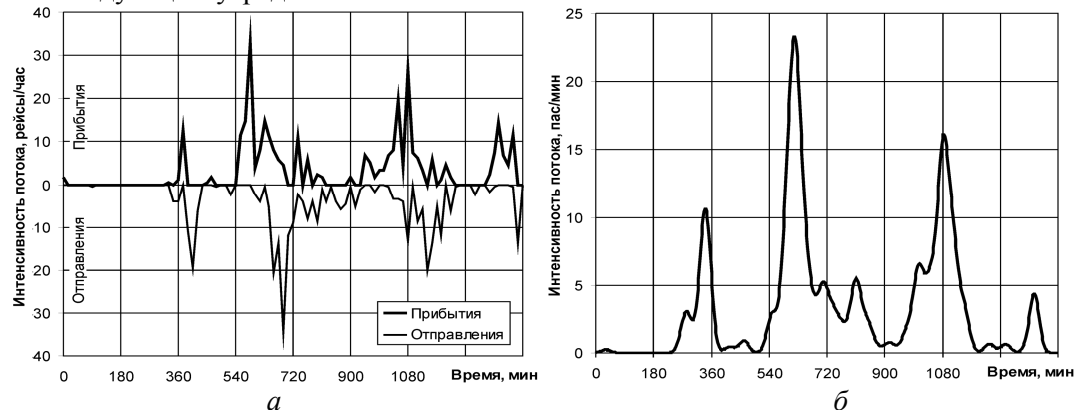
На этапе высадки роль входящего требования играет прибывающий рейс; на этапах регистрации по порейсовому методу и посадки – отправляющийся рейс; на этапе регистрации по свободному методу – вылетающий пассажир.

Расчет интенсивности потоков рейсов произведен с использованием данных летнего расписания 2011 г. Предварительно определены временные зависимости мгновенной интенсивности потока рейсов для каждых суток недельного периода, позволившие выявить волновую структуру расписания, включающую две основные и две дополнительные волны прилетов-вылетов ежедневно. Установлена близость суточных профилей интенсивности, что позволило решать задачу оптимизации не для каждого дня недели, а для некоторых эталонных суток, сократив объем расчетов. Графики мгновенных интенсивностей прибытий и отправлений рейсов в зависимости от времени эталонных суток, определенные усреднением по дням недели, представлены на рис. 1, а.

Мгновенная интенсивность потока вылетающих пассажиров рассчитана с использованием расписания, данных по пассажироместности ВС и занятости мест, принятой в соответствии с опубликованной статистикой аэропорта [3] равной 75 %.

Данные по времени нахождения вылетающих пассажиров в аэропорту приведены в [4]. Пассажиры прибывают в аэропорт в интервале 120-20 мин до времени отправления рейса. Наибольшая интенсивность пассажиропотока достигается около 70 мин до времени отправления. Распределение времени нахождения пассажиров в аэропорту удовлетворительно сглаживается нормальным распределением с математическим ожиданием  $M[\tau] = 70$  мин и стандартным отклонением  $\sigma_{\tau} = 15$  мин.

Полученный график временной зависимости мгновенной интенсивности потока вылетающих пассажиров для эталонных суток представлен на рис. 1, б. Как и в случае с потоком рейсов, расчет произведен для каждых суток рассматриваемой недели с последующим усреднением.



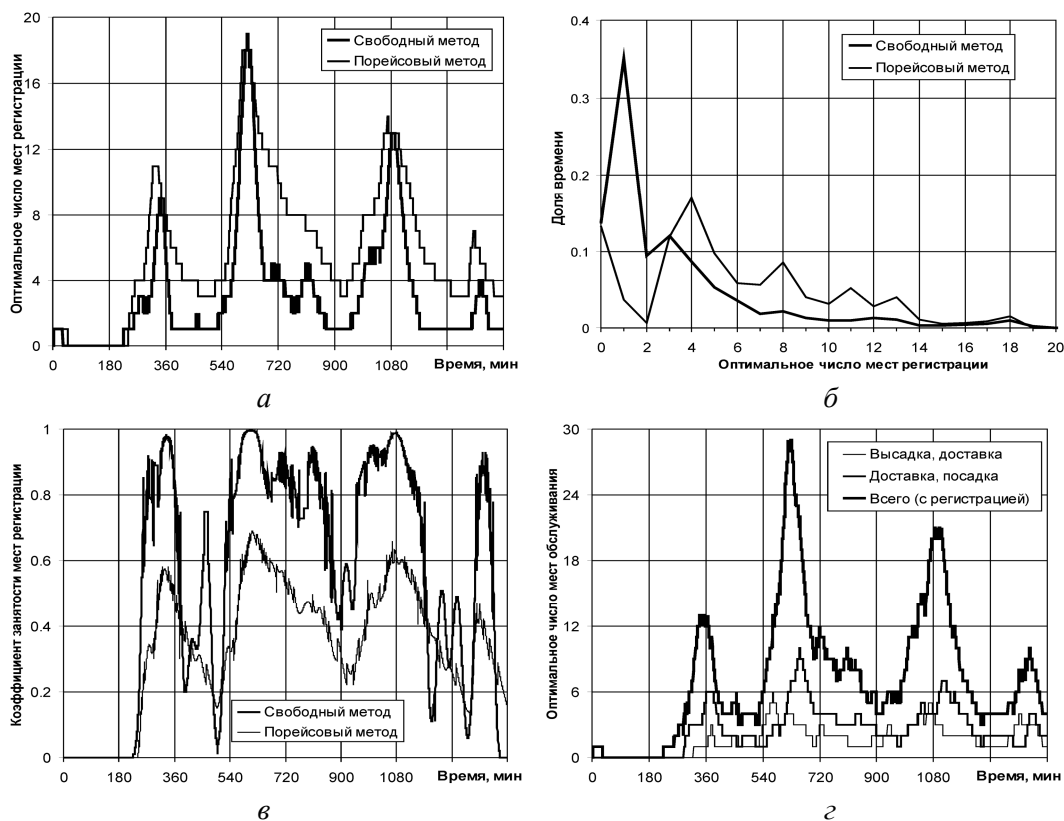
Р и с. 1. Интенсивность потоков в узловом аэропорту:  
а – прибывающих и отправляющихся рейсов; б – вылетающих пассажиров

В соответствии с данными аэропорта время регистрации одного пассажира считается распределенным экспоненциально и составляет в среднем 0,78 мин.

Средние длительности операций по обслуживанию пассажиров одного рейса приняты следующими: регистрация по порейсовому методу – 50 мин; доставка и посадка – 15 мин; высадка и доставка – 8 мин. Порейсовая регистрация начинается за 90 мин до времени отправления рейса; доставка и посадка – непосредственно после регистрации; высадка и доставка – через 5 мин после прибытия рейса. Продолжительности рассматриваемых операций считаются экспоненциально распределенными случайными величинами. Предполагается, что для порейсовой регистрации пассажиров любого рейса используется одно место.

Расчетное время ожидания обслуживания как пассажиром в случае регистрации по свободному методу, так и рейсом во всех остальных случаях задано равным  $t_p = 5$  мин. Значение вероятности  $P_p$  принято для всех случаев равным 0.95.

Основные результаты численного интегрирования уравнений Колмогорова для эталонных суток представлены на рис. 2.



Р и с. 2. Результаты моделирования для эталонных суток:

*а* – число мест регистрации; *б* – распределение времени использования различного числа мест регистрации; *в* – коэффициент занятости мест регистрации; *г* – оптимальное число мест для различных операций наземного обслуживания

На рис. 2, *а* приведены временные зависимости оптимального числа мест регистрации по порейсовому и свободному методам для эталонных суток.

На рис. 2, *б* представлены полигоны распределения времени использования оптимального числа мест регистрации. По оси абсцисс отложено число мест обслужи-

вания, вероятность использования которого возникает в течение эталонных суток; по оси ординат – доля от общей продолжительности эталонных суток, в течение которой данное число мест является оптимальным.

На рис. 2, *в* отображены временные зависимости коэффициента занятости оптимального числа мест обслуживания для обоих методов регистрации.

На рис. 2, *з* воспроизведены зависимости оптимального числа рабочих мест по выполнению операций высадки и посадки пассажиров, а также суммарного оптимального числа рабочих мест по выполнению указанных операций плюс регистрации по свободному методу. Суммарное число определено в предположении о возможности маневрирования персоналом службы аэропорта путем перераспределения исполнителей между тремя рассматриваемыми операциями.

Из рисунков следует, что в случае выраженной нестационарности входящего потока для заданного сочетания параметров  $t_p$  и  $P_p$  свободный метод требует несколько большего числа мест в пиковые моменты интенсивности потоков. Однако в остальное время большее число мест требуется для порейсовой регистрации. Число мест, усредненное по эталонным суткам, для свободной регистрации (3.1) почти в два раза меньше аналогичного показателя для порейсовой регистрации (5.8).

Свободный метод обеспечивает более эффективное использование выделяемых мест обслуживания. Усредненный по эталонным суткам коэффициент занятости для порейсовой регистрации (0.33) значительно ниже, чем для свободной (0.55).

Нестационарность потоков узлового аэропорта, обеспечивающая возможность перераспределения персонала между определенными операциями, позволяет снизить его общую численность. Из таблицы, составленной на примере трех рассмотренных операций, следует, что суммарное число исполнителей в случае рационального переназначения их между операциями заметно (на 17-18 %) ниже их общей численности, полученной простым суммированием по операциям.

Операция обслуживания пассажиров	Регистрация		Доставка и посадка, мест	Высадка и доставка, мест	Всего, мест	
	схема	число мест			без маневра персоналом	с маневром персоналом
Параметры	порейсовая	18	10	6	34	28
	свободная	19	10	6	35	29

**Заключение.** Результаты решения рассмотренной задачи позволяют сформулировать следующие общие выводы.

1. Численное интегрирование системы уравнений Колмогорова является действенным инструментом оптимизации и анализа параметров производственных комплексов и систем узлового аэропорта.

2. По критерию минимума численности рабочих мест свободный метод выполнения технологических операций (регистрации) в узловом аэропорту не является бесспорно предпочтительным.

3. Возможность перераспределения персонала служб узлового аэропорта между технологическими операциями позволяет заметно снизить его численность.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Романенко В.А. Математические модели функционирования узловых аэропортов в условиях современного авиатранспортного рынка: Монография. – Самара: Ас Гард, 2010. – 244 с.
2. Бочаров П.П., Печинкин А.В. Теория массового обслуживания. – М.: Изд-во РУДН, 1995. – 529 с.

3. International Airport Riga. Yearbook 2010. <http://www.riga-airport.com/en/main/gada-gramata>.
4. Savrasovs M., Medvedev A., Sincova E. 2009. Riga airport baggage handling system simulation. Proceedings 23rd European Conference on Modelling and Simulation. pp. 384-390. [http://www.scs-europe.net/conf/ecms2009/ecms2009%20CD/ecms2009%20accepted%20papers/ind\\_0052\\_accd26fa.pdf](http://www.scs-europe.net/conf/ecms2009/ecms2009%20CD/ecms2009%20accepted%20papers/ind_0052_accd26fa.pdf).

*Статья поступила в редакцию 4 сентября 2011 г.*

## **OPTIMIZATION OF THE HUB AIRPORT TRANSPORTATIONS SERVICE SYSTEM PARAMETERS ON THE BASIS OF THE NUMERICAL INTEGRATION OF KOLMOGOROV EQUATIONS**

***V.A. Romanenko***

Samara State Aerospace University named after academician S.P. Korolyov  
34, Moskovskoye road, Samara, 443086

*In article the opportunity of use of the approach which is based on a numerical integration of a large system of Kolmogorov equations to solve a problem of optimization of the hub airport transportations service system parameters with essentially non-stationary entering airliners and passengers flows is shown. An example of simulation is considered explicitly.*

***Keywords:*** *queuing system, optimization, numerical integration, hub airport.*