УДК 517.977.56

СИНТЕЗ АЛГОРИТМА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ НАГРЕВОМ ДИСКА ГТД ПРИ ТЕРМОПЛАСТИЧЕСКОМ УПРОЧНЕНИИ[1]

И.А. Данилушкин, А.А. Московцев

Самарский государственный технический университет
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244

Предложена специальная конструкция индуктора для нагрева участка обода диска газотурбинного двигателя в процессе термопластического упрочнения. С учетом конструкции индуктора вводится соответствующая стандартизирующая функция распределения источников тепла, создаваемых индуктором в зоне нагрева. Получен оптимальный по быстродействию алгоритм одноинтервального управления нагревом с ограничением по максимальной температуре.

Ключевые слова: *термопластическое упрочнение, математическая модель температурного поля диска, объект с распределенными параметрами, алгоритм оптимального одноинтервального управления процессом нагрева.*

Одним из характерных участков возникновения трещин на поверхности дисков газотурбинных двигателей (ГТД) и компрессоров является ёлочный паз, обеспечивающий крепление лопаток на диске. Повышение надёжности поверхности ёлочного паза может быть обеспечено с помощью термопластического упрочнения, которое осуществляется за счёт нагрева упрочняемого участка до заданной температуры с последующим интенсивным охлаждением его поверхности [1]. Необоснованная сложность технической реализации нагрева всего обода диска сразу привела к созданию установки термопластического упрочнения, в которой нагрев упрочняемой поверхности осуществляется участками [2]. Нагрев части обода диска в условиях неравномерности тепловых потерь на нагреваемом участке (незначительные потери с боковой и торцевых поверхностей дисков и весомый отток тепла в ненагреваемую часть диска) требует решения задачи по пространственному распределению теплоисточников на нагреваемом участке. Кроме того, нагрев должен происходить в условиях ограничения на максимальную температуру нагрева тела диска. Всё перечисленное обусловливает применение математической модели процесса нагрева, учитывающую пространственную распределённость теплового поля диска [3]:

$$\frac{\partial T(r,\theta,t)}{\partial t} = a\cdot\left[\frac{\partial^2 T(r,\theta,t)}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial T(r,\theta,t)}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T(r,\theta,t)}{\partial \theta^2}\right]+\frac{1}{c\gamma}w(r,\theta,t)-\frac{2\alpha}{c\gamma \mathrm{H}}T(r,\theta,t)$$

$$0\le r\le R,\quad 0\le\theta\le\pi,\quad t>0, \qquad (1)$$

где $T(r,\theta,t)$ – температурное поле диска, $a=\lambda/c\gamma$ – температуропроводность, λ, c – теплопроводность и удельная теплоёмкость материала диска, γ – плотность материала, R – внешний радиус диска, $w(r,\theta,t)$ – функция, описывающая распределение удельной мощности теплоисточников. Последнее слагаемое в уравнении есть функция, учитывающая потери тепла за счёт конвективного теплообмена между торце-

[1] *Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ №09-08-00297-а, №10-08-00754-а; АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы», проект №2.1.2/13988.*

Иван Александрович Данилушкин– к.т.н., докторант.
Антон Андреевич Московцев– аспирант.

выми поверхностями диска и окружающей средой, α – коэффициент теплообмена между средой и диском, H – толщина диска газотурбинного двигателя. Коэффициент 2 появляется для учёта обеих торцевых поверхностей диска.

Рассмотрение задачи в симметричной постановке относительно полярной оси приводит к записи краевых условий задачи в следующем виде:

$$\frac{\partial T(r,0,t)}{\partial \theta}=0,\quad t\ge 0;\qquad \frac{\partial T(r,\pi,t)}{\partial \theta}=0,\quad t\ge 0;\qquad \frac{\partial T(0,\theta,t)}{\partial r}=0,\quad t\ge 0. \tag{2}$$

Для границы $r=R$, пренебрегая потерями с боковой поверхности диска газотурбинного двигателя, записываем:

$$\frac{\partial T(R,\theta,t)}{\partial r}=0,\quad t\ge 0. \tag{3}$$

Начальное распределение температуры по радиусу диска примем равным нулю:

$$T(r,\theta,0)=T_0=0. \tag{4}$$

Модель (1), дополненная краевыми (2)–(3) и начальным условием (4), описывает температурное поле в диске с учётом потерь с торцевых поверхностей диска.

Методы структурной теории распределённых систем позволяют получить решение для неоднородного дифференциального уравнения с помощью операции пространственного интегрирования произведения стандартизирующей функции $w(r,\varphi,t)$ и функции Грина уравнения по области определения [3].

$$T(r,\theta,t)=\int_0^t\int_0^\pi\int_0^R G(r,\rho,\theta,\varphi,t-\tau)\cdot w(\rho,\varphi,\tau)\,d\rho\,d\varphi\,d\tau. \tag{5}$$

Функция Грина $G(r,\rho,\theta,\varphi,t)$ [4] есть решение задачи (1)–(4), при воздействии импульсного источника в точке (ρ,φ), определяется выражением [3]:

$$G(r,\rho,\theta,\varphi,t)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{2\rho}{c\gamma R^2}\cdot\exp\left(-\beta t\right)+$$

$$+\frac{1}{\pi}\cdot\frac{2}{c\gamma R^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\rho\cdot J_0(\mu_{0m},\rho)\cdot J_0(\mu_{0m}r)}{J_0^2(\mu_{0m}R)}\cdot\exp\left(-\left(a\mu_{0m}^2+\beta\right)t\right)+$$

$$+\frac{2}{\pi}\frac{2}{c\gamma}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\mu_{nm}^2\cdot\rho\cdot J_n(\mu_{nm},\rho)\cdot J_n(\mu_{nm}r)\cdot\cos(n\varphi)\cdot\cos(n\theta)}{\left[\mu_{nm}^2R^2-n^2\right]J_n{}^2(\mu_{nm}R)}\cdot\exp\left(-\left(a\mu_{nm}^2+\beta\right)t\right), \tag{6}$$

где $\beta=\dfrac{2\alpha}{c\gamma H}$; μ_{nm} – m-ный корень уравнения $J_n'(\mu R)=0$, $n\in \mathrm{N}\cup\{0\}$, $m\in \mathrm{N}$.

Предложенная в работе [3] форма индуктора, формирующая равномерное распределение теплоисточников по всей зоне нагрева, не обеспечивает приемлемое распределение температуры на нагреваемом участке. Требуемое распределение температуры по всей зоне нагрева может обеспечить конфигурация индуктора, формирующая П-образную область выделения теплоисточников, представленная на рис.1. Стандартизирующая функция, описывающая П-образную область распределения источников тепла, описывается выражением

$$w(\rho,\varphi,t)=U(t)\cdot\left(\mathbf{1}(\rho-R_0)\cdot\mathbf{1}(R_1-\rho)\cdot\mathbf{1}(\tfrac{1}{2}\varphi_1-\varphi)+\mathbf{1}(\rho-R_0)\cdot\mathbf{1}(\varphi-\tfrac{1}{2}\varphi_1)\cdot\mathbf{1}(\tfrac{1}{2}\varphi_0-\varphi)\right) \tag{7}$$

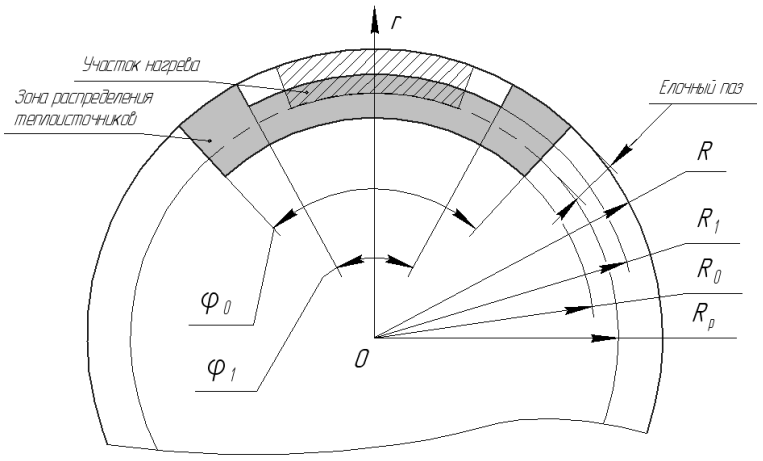

Рис. 1. Конфигурация индуктора П-образной формы

Индукционная установка должна обеспечивать нагрев участка диска газотурбинного двигателя $r \in \left[R_p, R\right]$, $\theta \in \left[0, \pi/9\right]$ до заданной температуры с допустимым температурным отклонением. Мощность индуктора $U(t)$ выступает в качестве сосредоточенного управляющего воздействия. В качестве критерия оптимальности для обеспечения максимальной производительности установки необходимо рассматривать минимальное время нагрева. Тогда задача оптимального по быстродействию управления нагревом диска газотурбинного двигателя может быть сформулирована следующим образом: необходимо найти такое управляющее воздействие, которое обеспечивает перевод нагреваемого диска с начальным распределением температуры в заданное состояние за минимально возможное время при выполнении ограничения на температуру в точке максимума.

При использовании модели температурного поля (1)–(4) были получены результаты расчета оптимального по быстродействию процесса нагрева диска газотурбинного двигателя до температуры 650±20°С и максимальной мощности индукционной установки равной 15 МВт методом, предложенном в [6]. До выхода на ограничение по предельной температуре нагрева, нагрев осуществляется с максимальной мощностью. Далее управляющее воздействие поддерживается на таком уровне, чтобы максимальная температура не превышала допустимой. Изменение управляющего воздействия на участке движения по ограничению температуры найдено с помощью приближенного метода расчёта оптимального нагрева [6].

Для реализации приближённого расчёта получено выражение для функции $Q(r,\theta,t,t_0,t_1,U)$, которая, в зависимости от времени t, возвращает следующие значения:

1. При $t < t_0$ $Q(r,\theta,t,t_0,t_1,U) = 0$
2. При $t_0 < t < t_1$

$$Q(r,\theta,t,t_0,t_1,U) = \int_{t_0}^{t}\int_{0}^{R}\int_{0}^{\pi} G(r,\rho,\theta,\varphi,t-\tau)\cdot w(\rho,\varphi,\tau)\,d\rho\,d\varphi\,d\tau$$

3. При $t_1 < t$

$$Q(r,\theta,t,t_0,t_1,U)=\int_{t_0}^{t_1}\int_0^R\int_0^{\pi} G(r,\rho,\theta,\varphi,t-\tau)\cdot w(\rho,\varphi,\tau)d\rho\,d\varphi\,d\tau$$

Здесь t_0 – время начала действия теплоисточников с постоянной мощностью U, t_1 – время окончания действия теплоисточников.

Выражение для случая 3, с учетом (6), (7), принимает вид:

$$Q(r,\theta,t,t_0,t_1,U)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\frac{1}{2}\varphi_1}{\beta}\cdot\frac{R_1^2-R_0^2}{c\gamma R^2}\cdot\left[\exp\left(-\beta\left(t-t_1\right)\right)-\exp\left(-\beta\left(t-t_0\right)\right)\right]+$$

$$+\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\frac{1}{2}\varphi_1}{c\gamma R^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{J_0(\mu_{0m}r)\cdot\int_{R_0}^{R_1}\rho\cdot J_0(\mu_{0m}\rho)d\rho}{J_0^2(\mu_{0m}R)\cdot\left(a\mu_{0m}^2+\beta\right)}\times$$

$$\times\left[\exp\left(-\left(a\mu_{nm}^2+\beta\right)\cdot\left(t-t_1\right)\right)-\exp\left(-\left(a\mu_{nm}^2+\beta\right)\cdot\left(t-t_0\right)\right)\right]+$$

$$+\frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{c\gamma}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\mu_{nm}^2\cdot J_n(\mu_{nm}r)\cdot\int_{R_0}^{R_1}\rho\cdot J_n(\mu_{nm}\rho)d\rho\cdot\cos(n\theta)\cdot\int_0^{\frac{1}{2}\varphi_1}\cos(n\varphi)d\varphi}{\left[\mu_{nm}^2R^2-n^2\right]J_n^2(\mu_{nm}R)}\times$$

$$\times\frac{\left[\exp\left(-\left(a\mu_{nm}^2+\beta\right)\cdot\left(t-t_1\right)\right)-\exp\left(-\left(a\mu_{nm}^2+\beta\right)\cdot\left(t-t_0\right)\right)\right]}{a\mu_{nm}^2+\beta}+$$

$$+\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\frac{1}{2}\varphi_0-\frac{1}{2}\varphi_1}{\beta}\cdot\frac{R^2-R_0^2}{c\gamma R^2}\cdot\left[\exp\left(-\beta(t-t_1)\right)-\exp\left(-\beta(t-t_0)\right)\right]+$$

$$+\frac{1}{\pi}\cdot\frac{2\left(\frac{1}{2}\varphi_0-\frac{1}{2}\varphi_1\right)}{c\gamma R^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{J_0(\mu_{0m}r)\cdot\int_{R_0}^{R}\rho\cdot J_0(\mu_{0m}\rho)d\rho}{J_0^2(\mu_{0m}R)\cdot\left(a\mu_{0m}^2+\beta\right)}\times$$

$$\times\left[\exp\left(-\left(a\mu_{nm}^2+\beta\right)\cdot\left(t-t_1\right)\right)-\exp\left(-\left(a\mu_{nm}^2+\beta\right)\cdot\left(t-t_0\right)\right)\right]+$$

$$+\frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{c\gamma}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\mu_{nm}^2\cdot J_n(\mu_{nm}r)\cdot\int_{R_0}^{R}\rho\cdot J_n(\mu_{nm}\rho)d\rho\cdot\cos(n\theta)\cdot\int_{\frac{1}{2}\varphi_1}^{\frac{1}{2}\varphi_0}\cos(n\varphi)d\varphi}{\left[\mu_{nm}^2R^2-n^2\right]J_n^2(\mu_{nm}R)}\times$$

$$\times\frac{\left[\exp\left(-\left(a\mu_{nm}^2+\beta\right)\cdot\left(t-t_1\right)\right)-\exp\left(-\left(a\mu_{nm}^2+\beta\right)\cdot\left(t-t_0\right)\right)\right]}{a\mu_{nm}^2+\beta}. \qquad (8)$$

Для случая 2 решение получается путем подстановки $t_1=t$ в выражение (8). С помощью функции $Q(r,\theta,t,t_0,t_1,U)$ температурное поле в любой момент времени при кусочно-постоянном управлении может быть рассчитано с помощью выражения

$$T(r,\theta,t)=\sum_{i=1}^{N}Q(r,\theta,t,t_{i-1},t_i,U_i)\,. \qquad (9)$$

Длительность первого интервала определяется временем нагрева с максимальной мощностью $U_1 = U_{\max}$, до достижения температуры в любой из точек поверхности значения $T_{доп}$. Далее интервал нагрева выбирается постоянным – 120 секунд, $t_i = t_{i-1} + 120$, $i \in \{2, 3, ..., N\}$, и находится такое управляющее воздействие U_i, при котором по окончании очередного интервала нагрева максимальная температура поверхности диска не превышала $T_{доп}$.

На рис. 2 приведён график оптимального изменения мощности нагрева диска. На рис. 3 представлено температурное распределение участка диска в момент окончания нагрева. Расчёт выполнен при следующих параметрах модели $R = 0{,}525$ м, $R_0 = 0{,}4$ м, $R_1 = 0{,}48$ м, $R_p = 0{,}43$ м, $\varphi_0 = 1{,}5$ рад, $\varphi_1 = 1$ рад, $c = 460$ Дж/(кг·К), $\gamma = 7800$ кг/м^3, $\lambda = 46$ Вт/(м·К), $\alpha = 45$ Вт/(м^2·К). При расчёте принято, что $n = \overline{0, 24}$, $m = \overline{1, 25}$. Серым цветом выделен участок, в котором контролируется попадание температуры нагрева в диапазон 650 ± 20 °С.

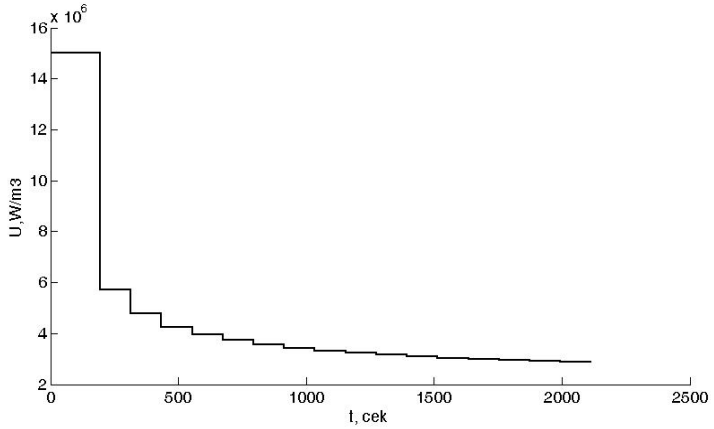

Рис. 2. Изменение мощности при нагреве диска

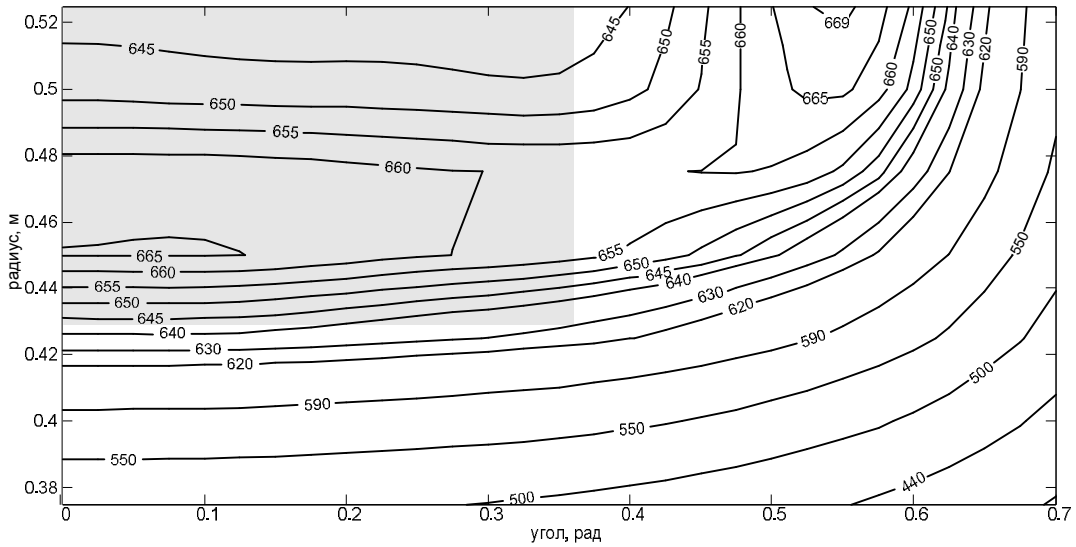

Рис.3. Температурное распределение участка диска в момент окончания нагрева

Из представленных результатов следует, что применение одноинтервального управления позволяет обеспечивать заданную точность нагрева при минимальном значении времени процесса.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Кравченко Б.А., Круцило В.Г., Гутман Г.Н.* Термопластическое упрочнение – резерв повышения прочности и надежности деталей машин.М., Самара. СамГТУ, 2000 – 216с.
2. *Головачев А.Л., Данилушкин А.И., Мишанин Е.А.* Система индукционного нагрева для термообработки елочного паза дисков турбоагрегатов// Вестник Саратовского государственного технического университета. – 2006. – №1(10). – С. 108–113
3. *Данилушкин И.А., Московцев А.А.* Исследование аналитической модели температурного поля диска газотурбинного двигателя// Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Технические науки». Выпуск №1(29)–2011. – 2011. – С. 205–211.
4. *Лыков А.В.* Теория теплопроводности. – М.: Высшая школа, 1967. – 599 с.
5. *Бутковский А.Г.* Характеристики систем с распределенными параметрами. – М.: Наука, 1979. – 224 с
6. *Рапопорт Э.Я.* Оптимизация процессов индукционного нагрева металла. – М.: Металлургия. – 1993. -279с.

Статья поступила в редакцию 6 июня 2011 г.

SYNTHESIS OF AN OPTIMAL CONTROL ALGORITHM OF HEATING DISC OF GAS TURBINE ENGINE IN PROCEDURE OF THERMOPLASTIC REINFORCEMENT

I.A. Danilushkin, A.A. Moskovtsev

Samara State Technical University
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100

The paper proposes the special inductor construction for a heating a definite part of a gas turbine engine disc rim in procedure of thermoplastic reinforcement. Standardizing function of a sources of heat in an inductor heating zone given with the new inductor construction. Optimal algorithm of a one-stage heating control with a restriction on the maximum temperature is found.

Keywords*: thermoplastic reinforcement, mathematical model of a disc temperature field, object with distributed parameters, one-stage control of a heating process.*

Ivan A. Danilushkin - Candidate of Technical Sciences, Associate professor.
Anton A. Moskovtsev - Postgraduate student.