

СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОГО РЕГУЛЯТОРА СИСТЕМЫ СТАБИЛИЗАЦИИ СИЛЫ РЕЗАНИЯ ПРИ ГЛУБОКОМ РАСТАЧИВАНИИ

А.А. Панкин, В.П. Курган

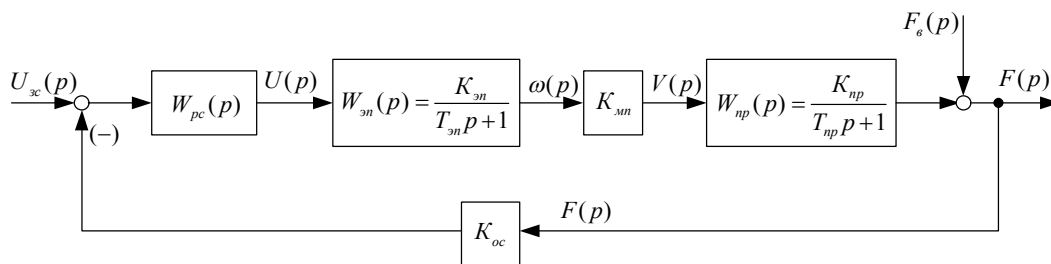
Самарский государственный технический университет
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244

Рассмотрен синтез системы стабилизации силы резания при случайном возмущающем воздействии. Получена передаточная функция оптимального регулятора силы.

Ключевые слова: *оптимальный регулятор, сила резания, растачивание, случайный процесс, корреляционная функция, передаточная функция.*

В [1] показано, что при глубоком растачивании отверстий деталей из высокопрочных сплавов с помощью борштанги имеет место срыв режима резания на неуправляемые вибрации (автоколебания). Эффективным средством борьбы с этим явлением служит использование динамических гасителей вибраций. Вследствие того, что динамический гаситель расположен внутри борштанги амплитуда его перемещений, которая пропорциональна силе резания, ограничена размерами борштанги. Поэтому необходимо, чтобы сила резания в процессе растачивания не превышала заданной допустимой величины, гарантирующей нормальную работу динамического гасителя, для обеспечения виброустойчивости станка. Автоматическое регулирование процесса растачивания, обеспечивающее стабилизацию силы резания на заданном уровне, достигается за счет управления продольной подачей борштанги.

Структурная схема системы стабилизации силы резания представлена на рисунке.



Структурная схема системы стабилизации силы резания

На нем приняты следующие обозначения: $U_{зс}$ – сигнал задания силы резания; $W_{рс}(p)$ – передаточная функция регулятора силы резания; U – управляющее воздействие; $W_{эн}(p)$ – передаточная функция электропривода; $K_{эн}$, $T_{эн}$ – соответственно коэффициент передачи и постоянная времени электропривода; ω – скорость вращения двигателя подачи; $K_{мн}$ – коэффициент передачи механизма подачи; V – скорость продольной подачи; $W_{нр}(p)$ – передаточная функция процесса резания; $K_{нр}$, $T_{нр}$ – соответственно коэффициент передачи и постоянная времени процесса

*Владимир Павлович Курган – к.т.н., доцент.
Алексей Александрович Панкин – ассистент.*

резания; F_e – вариация силы резания; F – сила резания; K_{oc} – коэффициент обратной связи по силе резания.

Для данной структурной схемы справедливо следующее уравнение движения системы

$$A(p) \cdot F(p) = U(p)K_{np}K_{mn}K_{en} + A(p) \cdot F_e(p), \quad (1)$$

где $A(p) = (T_{эн}p + 1) \cdot (T_{np}p + 1) = a_2p^2 + a_1p + a_0$, $a_2 = T_{эн} \cdot T_{np}$, $a_1 = T_{эн} + T_{np}$, $a_0 = 1$.

Процесс функционирования металлорежущего оборудования сопровождается действием возмущений, таких как изменение припуска и твердости обрабатываемого материала. Статистический анализ экспериментальных исследований вариаций силы резания, которые вызваны данными возмущениями, показал, что центрированная величина F_e является случайным стационарным процессом с нормальным законом распределения [2]. При этом корреляционная функция может быть аппроксимирована следующими выражением

$$k_{F_e}(\tau) = D_{F_e} \cdot e^{-\alpha\tau} \cos(\beta\tau), \quad (2)$$

где D_{F_e} - дисперсия случайной вариации силы резания.

Преобразование Фурье корреляционной функции позволяет определить спектральную плотность мощности

$$S_{F_e}(\omega) = D_{F_e} \cdot \frac{2\alpha}{\pi} \cdot \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \omega^2}{(\alpha^2 + \beta^2 + \omega^2) - 4\beta^2\omega^2}. \quad (3)$$

Введем в рассмотрение эквивалентное возмущающее воздействие

$$F_{eэ} = A(p) \cdot F_e.$$

Спектральная плотность мощности эквивалентного возмущающего воздействия определяется из следующего соотношения [3]

$$S_{F_{eэ}}(\omega) = |A(j\omega)|^2 \cdot S_{F_e}(\omega). \quad (4)$$

Для случайного процесса с корреляционной функцией (2) спектральная плотность мощности имеет вид

$$\begin{aligned} S_{F_{eэ}}(\omega) &= |(j\omega T_{эн} + 1) \cdot (j\omega T_{np} + 1)|^2 \cdot D_{F_e} \cdot \frac{2\alpha}{\pi} \cdot \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \omega^2}{(\alpha^2 + \beta^2 + \omega^2) - 4\beta^2\omega^2} = \\ &= D_{F_{eэ}} \cdot \frac{b'_3\omega^6 + b'_2\omega^4 + b'_1\omega^2 + b'_0}{d'_2\omega^4 + d'_1\omega^2 + d'_0}, \end{aligned} \quad (5)$$

где $D_{F_{eэ}} = D_{F_e} \cdot \frac{2\alpha}{\pi}$, $b'_3 = T_{эн}^2 T_{np}^2$, $b'_2 = T_{эн}^2 T_{np}^2 \cdot (\lambda^2 + \beta^2) + T_{эн}^2 + T_{np}^2$,
 $b'_1 = (T_{эн}^2 + T_{np}^2) \cdot (\lambda^2 + \beta^2) + 1$, $b'_0 = \lambda^2 + \beta^2$, $d'_2 = 1$, $d'_1 = 2\lambda^2 - 2\beta^2$, $d'_0 = (\lambda^2 + \beta^2)^2$.

Перейдем в соотношении (5) от переменной ω к переменной $S = j\omega$. Учитывая, что $j^2 = -1$, выражение (5) можно записать следующем образом:

$$S_{F_{eэ}}(\omega) = D_{F_{eэ}} \cdot \frac{-b'_3S^6 + b'_2S^4 - b'_1S^2 + b'_0}{d'_2S^4 - d'_1S^2 + d'_0}. \quad (6)$$

Будем рассматривать задачу стабилизации силы резания, находящейся под действием случайного изменения припуска и твердости обрабатываемого материала. В этом случае система стабилизации должна обеспечить малость отклонения силы резания от заданного значения. Для обеспечения малости отклонения необходимо ми-

минимизировать среднеквадратичный критерий, который наилучшим образом отражает качество системы управления, т.е. необходимо минимизировать

$$\langle F^2 \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T F^2(t) \cdot dt, \quad (7)$$

где $\langle F^2 \rangle$ - средний квадрат отклонения силы резания.

Задача синтеза оптимальной системы управления становится корректной лишь при учете ограничений на управляющее воздействие. Учет ограничений на модуль управляющего воздействия делает задачу оптимального управления нелинейной.

$$U_{\min} \leq U(t) \leq U_{\max}. \quad (8)$$

В этом случае целесообразно перейти от ограничений на модуль к ограничениям на средний квадрат, мощность управляющего воздействия

$$\langle U^2 \rangle = \frac{\langle U_{\max}^2 \rangle}{k_u}, \quad (9)$$

где для k_u берется обоснованное значение $k_u = 1,645$ [4].

Ограничение (9) учитывается согласно правилам решения изопериметрических задач вариационного исчисления путем дополнения функционала мощностью управляющего воздействия.

$$J = \lambda \cdot \langle F^2 \rangle + \langle U^2 \rangle, \quad (10)$$

где λ - множитель Лагранжа, подлежащий в дальнейшем определению.

Для нашего случая в установившемся режиме будем иметь

$$F = K_{np} \cdot K_{mn} \cdot K_{эн} \cdot U, \quad (11)$$

т.е. средний квадрат отклонения $\langle F^2 \rangle$ и мощность управляющего воздействия $\langle U^2 \rangle$ отличаются в $K^2 = K_{np}^2 \cdot K_{mn}^2 \cdot K_{эн}^2$ раз. Поэтому для приведения в критерии качества (10) $\langle F^2 \rangle$ и $\langle U^2 \rangle$ к одной размерности величин введем вспомогательную величину $\lambda' = \lambda \cdot K^2$. В этом случае функционал (10) примет вид

$$J = \frac{1}{K_{np}^2 \cdot K_{mn}^2 \cdot K_{эн}^2} \cdot \lambda' \cdot \langle F^2 \rangle + \langle U^2 \rangle. \quad (12)$$

Тогда задачу синтеза оптимального регулятора можно сформулировать следующим образом: требуется определить передаточную функцию регулятора силы резания, которая доставляет минимум функционалу (12). Проведем синтез оптимального регулятора силы для случайного воздействия с корреляционной функцией (2).

Алгоритм синтеза оптимального регулятора силы предусматривает выполнения операций по методике, изложенной в [4].

1. Факторизуем спектральную плотность мощности

$$S_{F_{\text{вз}}}(S) = S_1(S) \cdot S_1(-S),$$

$$S_{F_{\text{вз}}}(S) = \frac{b_3 S^3 + b_2 S^2 + b_1 S + b_0}{d_2 S^2 + d_1 S + d_0} \cdot \frac{-b_3 S^3 + b_2 S^2 - b_1 S + b_0}{d_2 S^2 - d_1 S + d_0}. \quad (13)$$

Постоянный множитель $D_{F_{\text{вз}}}$ в (5) отбрасываем, так как в линейных системах структура регулятора не зависит от уровня входного воздействия. Факторизация числителя и знаменателя производится раздельно. Для этого определяются корни числителя и знаменателя (6), далее полином, раскладывается по корням. При этом

полиномы числителя и знаменателя $S_1(S)$ будут содержать корни в левой полуплоскости, а $S_1(-S)$ - в правой полуплоскости.

2. Факторизуем полином

$$\begin{aligned} A(S) \cdot A(-S) + \lambda &= (a_2 S^2 + a_1 S + a_0) \cdot (a_2 S^2 - a_1 S + a_0) + \lambda = G(S) \cdot G(-S) = \\ &= (c_2 S^2 + c_1 S + c_0) \cdot (c_2 S^2 - c_1 S + c_0). \end{aligned} \quad (14)$$

Анализ выражения (14) показывает, что $c_2 = a_2$.

3. Выполним разложение на дроби

$$\frac{A(-S)}{G(-S)} \cdot S_1(S) = M_0 + M_+ + M_-, \quad (15)$$

где M_0 - целый полином от частного; M_+ - правильная дробь с полюсами в левой полуплоскости; M_- - правильная дробь с полюсами в правой полуплоскости.

С учетом выражений (13), (14) выражение (15) примет вид

$$\frac{a_2 S^2 - a_1 S + a_0}{c_2 S^2 - c_1 S + c_0} \cdot \frac{b_3 S^3 + b_2 S^2 + b_1 S + b_0}{d_2 S^2 + d_1 S + d_0} = \frac{m_5 S^5 + m_4 S^4 + m_3 S^3 + m_2 S^2 + m_1 S + m_0}{l_4 S^4 + l_3 S^3 + l_2 S^2 + l_1 S + l_0}, \quad (16)$$

где $m_5 = a_2 b_3$, $m_4 = a_2 b_2 - a_1 b_3$, $m_3 = a_2 b_1 - a_1 b_2 + a_0 b_3$, $m_2 = a_2 b_0 - a_1 b_1 + a_0 b_2$, $m_1 = a_0 b_1 - a_1 b_0$, $m_0 = a_0 b_0$, $l_4 = c_2 d_2$, $l_3 = c_2 d_1 - c_1 d_2$, $l_2 = c_2 d_0 - c_1 d_1 + c_0 d_2$, $l_1 = c_0 d_1 - c_1 d_0$, $l_0 = c_0 d_0$.

Выделяя из (16) целую часть и учитывая, что $c_2 = a_2$, получим

$$M_0 = \frac{b_3}{d_2} S + \frac{b_2}{d_2} - \frac{a_1 b_3}{c_2 d_2} + \frac{c_1 b_3}{c_2 d_2} - \frac{d_1 b_3}{d_2^2}. \quad (17)$$

Заметим, что корни полинома $d_2 S^2 + d_1 S + d_0$ расположены в левой полуплоскости, а корни полинома $c_2 S^2 - c_1 S + c_0$ - в правой полуплоскости. Тогда M_+ и M_- с использованием неопределенных коэффициентов A_i , подлежащих в дальнейшем определению, можно записать в виде

$$M_+ = \frac{A_1 S + A_2}{d_2 S^2 + d_1 S + d_0}, \quad (18)$$

$$M_- = \frac{A_3 S + A_4}{c_2 S^2 - c_1 S + c_0}. \quad (19)$$

Соотношение (15) с учетом (16), (17), (18) и (19) будет иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{m_5 S^5 + m_4 S^4 + m_3 S^3 + m_2 S^2 + m_1 S + m_0}{l_4 S^4 + l_3 S^3 + l_2 S^2 + l_1 S + l_0} &= \\ &= \frac{b_3}{d_2} S + \frac{b_2}{d_2} - \frac{a_1 b_3}{c_2 d_2} + \frac{c_1 b_3}{c_2 d_2} - \frac{d_1 b_3}{d_2^2} + \frac{A_1 S + A_2}{d_2 S^2 + d_1 S + d_0} + \frac{A_3 S + A_4}{c_2 S^2 - c_1 S + c_0}. \end{aligned} \quad (20)$$

Приводя правую часть равенства (20) к общему знаменателю и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях S числителя левой и правой частей этого равенства, получим систему уравнений для определения коэффициентов

$$\begin{cases}
c_2 = a_2 \\
\frac{b_3 d_1 c_2}{d_2} - b_3 c_1 + d_2 c_2 X = a_2 b_2 - a_1 b_3 \\
b_3 c_0 - \frac{b_3 d_1 c_1}{d_2} + \frac{b_3 d_0 c_2}{d_2} + d_1 c_2 X - d_2 c_1 X + A_1 c_2 + A_3 d_2 = a_2 b_1 - a_1 b_2 + a_0 b_3 \\
\frac{b_3 d_1 c_0}{d_2} - \frac{b_3 d_0 c_1}{d_2} + d_2 c_0 X - d_1 c_1 X + d_0 c_2 X + A_2 c_2 - A_1 c_1 + A_3 d_1 + A_4 d_2 = \\
= a_2 b_0 - a_1 b_1 + a_0 b_2 \\
\frac{b_3 d_0 c_0}{d_2} + d_1 c_0 X - d_0 c_1 X + A_1 c_0 - A_2 c_1 + A_3 d_0 + A_4 d_1 = a_0 b_1 - a_1 b_0 \\
d_0 c_0 X + A_2 c_0 + A_4 d_0 = a_0 b_0 \\
X = \frac{b_2}{d_2} - \frac{a_1 b_3}{c_2 d_2} + \frac{c_1 b_3}{c_2 d_2} - \frac{d_1 b_3}{d_2^2}
\end{cases} \quad (21)$$

4. Вводим в рассмотрение функцию

$$\frac{1}{\Phi(S)} = \frac{G(S)}{M_0 + M_+} \cdot S_1(S). \quad (22)$$

Соотношение (22) с учетом соотношений (13), (14), (17), (18) будет иметь вид

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Phi(S)} &= \frac{c_2 S^2 + c_1 S + c_0}{\frac{b_3}{d_2} S + \frac{b_2}{d_2} - \frac{a_1 b_3}{c_2 d_2} + \frac{c_1 b_3}{c_2 d_2} - \frac{d_1 b_3}{d_2^2} + \frac{A_1 S + A_2}{d_2 S^2 + d_1 S + d_0}} \cdot \frac{b_3 S^3 + b_2 S^2 + b_1 S + b_0}{d_2 S^2 + d_1 S + d_0} = \\
&= \frac{t_5 S^5 + t_4 S^4 + t_3 S^3 + t_2 S^2 + t_1 S + t_0}{b_3 S^3 + \left(\frac{b_3 d_1}{d_2} + d_2 X \right) S^2 + \left(\frac{b_3 d_0}{d_2} + d_1 X + A_1 \right) S + d_0 X + A_2}, \quad (23)
\end{aligned}$$

где $t_5 = c_2 b_3$, $t_4 = c_2 b_2 + c_1 b_3$, $t_3 = c_2 b_1 + c_1 b_2 + c_0 b_3$, $t_2 = c_2 b_0 + c_1 b_1 + c_0 b_2$,
 $t_1 = c_1 b_0 + c_0 b_1$, $t_0 = c_0 b_0$.

Выполнив деление числителя на знаменатель и выделив целую часть, будем иметь

$$\frac{1}{\Phi(S)} = c_2 S^2 + a_1 S + \frac{h_3 S^3 + h_2 S^2 + h_1 S + h_0}{g_3 S^3 + g_2 S^2 + g_1 S + g_0}, \quad (24)$$

где $h_3 = c_2 b_1 + c_1 b_2 + c_0 b_3 - \frac{c_2 b_3 d_0}{d_2} - c_2 d_1 X - c_2 A_1 - \frac{a_1 b_3 d_1}{d_2} - a_1 d_2 X$,

$$h_2 = c_2 b_0 + c_1 b_1 + c_0 b_2 - c_2 d_0 X - c_2 A_2 - \frac{a_1 b_3 d_0}{d_2} - a_1 d_1 X - a_1 A_1,$$

$$h_1 = c_1 b_0 + c_0 b_1 - a_1 d_0 X - a_1 A_2, \quad h_0 = c_0 b_0, \quad g_3 = b_3,$$

$$g_2 = \frac{b_3 d_1}{d_2} + d_2 X, \quad g_1 = \frac{b_3 d_0}{d_2} + d_1 X + A_1, \quad g_0 = d_0 X + A_2.$$

5. Определяем передаточную функцию оптимального регулятора силы резания с учетом подстановки $S = p$

$$W'_{pc}(p) = \frac{1}{\Phi(p)} - A(p) \quad (25)$$

Передаточную функцию оптимального регулятора силы резания с учетом соотношений (1), (25) можно записать следующим образом

$$\begin{aligned} W'_{pc}(p) &= c_2 p^2 + a_1 p + \frac{h_3 p^3 + h_2 p^2 + h_1 p + h_0}{g_3 p^3 + g_2 p^2 + g_1 p + g_0} - a_2 p^2 - a_1 p - a_0 = \\ &= \frac{h_3 p^3 + h_2 p^2 + h_1 p + h_0}{g_3 p^3 + g_2 p^2 + g_1 p + g_0} - a_0 = \frac{h'_3 p^3 + h'_2 p^2 + h'_1 p + h'_0}{g_3 p^3 + g_2 p^2 + g_1 p + g_0} \end{aligned} \quad (26)$$

Учитывая, что объект управления имеет коэффициент усиления K , а в цепи обратной связи системы звено с коэффициентом передачи K_{oc} , передаточная функция регулятора силы резания будет иметь вид

$$W_{pc}(p) = \frac{W'_{pc}(p)}{K_{np} K_{mn} K_{эн} K_{oc}} = \frac{1}{K_{np} K_{mn} K_{эн} K_{oc}} \cdot \frac{h'_3 p^3 + h'_2 p^2 + h'_1 p + h'_0}{g_3 p^3 + g_2 p^2 + g_1 p + g_0} \quad (27)$$

Определим уравнение замкнутой системы стабилизации силы резания. Передаточную функцию оптимального регулятора запишем в следующем виде

$$W'_{pc}(p) = \frac{G(p) \cdot S_1(p)}{M_0 + M_+} - A(p) = \frac{W_1(p)}{W_2(p)} \quad (28)$$

Обозначим
$$S_1(p) = \frac{N(p)}{T(p)},$$

тогда согласно соотношению (22)

$$M_0 + M_+ = \frac{W_2(p)}{T(p)} \quad (29)$$

Тогда

$$W'_{ош}(p) = \frac{W_1(p)}{W_2(p)} = \frac{G(p) \cdot N(p) \cdot T(p)}{W_2(p) \cdot T(p)} - A(p) = \frac{G(p) \cdot N(p)}{W_2(p)} - A(p) \quad (30)$$

Учитывая соотношение (30), уравнение замкнутой системы можно представить следующим образом:

$$F = \frac{W_2(p)}{G(p) \cdot N(p)} \cdot F_{\text{вз}} \quad (31)$$

Средний квадрат отклонения силы резания равен

$$\langle F^2 \rangle = \int_0^{\infty} S_F(\omega) d\omega \quad (32)$$

В (32) $S_F(\omega)$ является спектральной плотностью мощности отклонения силы резания, которая определяется выражением

$$S_F(\omega) = S_{F_{\text{вз}}}(\omega) \cdot \left| \frac{W_2(j\omega)}{G(j\omega) \cdot N(j\omega)} \right|^2 \quad (33)$$

В свою очередь мощность управляющего воздействия в замкнутой системе будет равна

$$\langle U^2 \rangle = \int_0^{\infty} S_u(\omega) d\omega, \quad (34)$$

где $S_u(\omega)$ - спектральная плотность мощности управляющего воздействия, которая определяется выражением

$$S_u(\omega) = S_{F_{\text{вз}}}(\omega) \cdot \left| \frac{W_2(j\omega)}{G(j\omega) \cdot N(j\omega)} \right|^2 \cdot |W'_{pc}(j\omega)|^2. \quad (35)$$

Задавая ряд значений λ' , по вышеизложенному алгоритму проводим синтез оптимального регулятора и по (34) определяем мощность управляющего воздействия. Далее строим кривую $\langle U^2 \rangle = f(\lambda')$, которая будет монотонно возрастающей кривой. Тогда при заданной мощности управляющего воздействия (9) легко определяется λ' [3,4].

Сравнительный анализ показал, что применение полученного оптимального регулятора в системе стабилизации силы резания позволяет получить дисперсию отклонения силы резания в 1,5 раза меньше по сравнению с системой управления силой резания, построенной по принципу подчиненного регулирования.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Курган В.П., Панкин А.А.* Анализ математической модели процесса растачивания. //Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. Технические науки. 2005, Вып 32, С. 157-162.
2. *Абакумов А.М.* Оптимальное управление процессом металлообработки при стационарных возмущениях // Совершенствование систем и технологий. – Севастополь, 1996. – С. 3-8.
3. *Петров Ю.П.* Синтез оптимальных систем управления при не полностью известных возмущающих силах. Л.: ЛГУ, 1987.
4. Синтез оптимального регулятора положения следящего электропривода при случайном задающем воздействии.// *Ф.Н. Рассказов, Е.А. Чистякова, А.В. Тамъяров, В.П. Курган, О.Б. Сигова*, Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. Технические науки. 1998, Вып 5, С. 134-139.

Статья поступила в редакцию 8 июня 2011 г.

THE OPTIMAL REGULATOR SYNTHESIS OF THE STABILIZATION SYSTEM OF CUTTING FORCE WITH DEEP BORING

A.A. Pankin, V.P. Kurgan

Samara State Technical University
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100

The article describes the synthesis of cutting force stabilization system with a random disturbance. The transfer function of the optimal force regulator was determined in a research process.

Keywords: *optimal regulator, cutting force, boring, random process, transfer function, correlation function.*

*Vladimir P. Kurgan – Candidate of Technical Sciences, Associate professor.
Alexey A. Pankin – Assistant.*