Энергетика

УДК 681.5.015

АППРОКСИМАЦИЯ СПЛАЙНАМИ ВТОРОГО И ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА ФУНКЦИИ ВНУТРЕННЕГО ТЕПЛОВЫДЕЛЕНИЯ ПРИ РЕШЕНИИ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ [1]

А.Н. Дилигенская

Самарский государственный технический университет
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244

Рассматривается обратная задача теплопроводности с подлежащей восстановлению функцией внутреннего тепловыделения, сформулированная в экстремальной постановке, как задача оптимального управления процессом с распределенными параметрами. Поиск управляющих воздействий осуществляется на множестве непрерывных и непрерывно-дифференцируемых или дважды непрерывно-дифференцируемых функций. Применение параметризации управляющих воздействий сводит задачу к специальной задаче математического программирования, решение которой осуществляется на основе метода, учитывающего альтернансные свойства искомых экстремалей.

Ключевые слова: *Обратная задача теплопроводности, параметрическая оптимизация, альтернансный метод, кусочная аппроксимация, класс функций непрерывных, непрерывно-дифференцируемых, непрерывных со второй производной.*

Обратные задачи, возникающие при диагностике и идентификации процесса теплопроводности, как правило, основаны на экспериментальных данных, когда по определенной информации о выходной характеристике - температурном поле - требуется восстановить входные характеристики, например, функции или параметры, содержащиеся в уравнении математической модели объекта. Исходная постановка таких задач в большинстве случаев не обладает свойством устойчивости решения по отношению к вариациям исходных данных, и для получения устойчивых решений требует применения специальных методов [1, 2].

Исследование обратных задач на достаточно широком классе возможных решений влечет большие погрешности искомых характеристик и обычно требует применения методов регуляризации, поэтому актуален поиск подходов, основанных на соответствующем выборе множества допустимых решений, позволяющих получить искомое решение без использования процедур регуляризации [1]. Одним из таких способов является формулировка задачи в экстремальной постановке с последующим применением численных методов, основанных на аналитических условиях оптимальности.

В качестве типовой модели нестационарного процесса теплопроводности с внутренним тепловыделением рассматривается линейное одномерное неоднородное уравнение Фурье в относительных единицах при краевых условиях третьего рода:

---

[1] *Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ №09-08-00297-а, №10-08-00754-а; АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы», проект №2.1.2/13988.*

Анна Николаевна Дилигенская – к.т.н., доцент.

$$\frac{\partial\theta(x,\varphi)}{\partial\varphi}=\frac{\partial^2\theta(x,\varphi)}{\partial x^2}+F(x,\varphi),\qquad 0<x<1,\quad 0<\varphi\le\varphi^0; \tag{1}$$

$$\frac{\partial\theta(1,\varphi)}{\partial x}+Bi\theta(1,\varphi)=Bi\cdot\theta_{П}(\varphi),\ \frac{\partial\theta(0,\varphi)}{\partial x}=0,\ \varphi\in[0,\varphi^0];\ \theta(x,0)=0,\ x\in[0,1]. \tag{2}$$

Здесь $\theta(x,\varphi)$ - температурное поле, зависящее от безразмерного времени (число Фурье) φ и пространственной координаты $x\in[0,1]$; Bi - безразмерный критерий Био, выражающий теплофизические свойства материала; $\theta_{П}(\varphi)$ - температура внешней среды, определяющая тепловые потери на границе тела $x=1$; $F(x,\varphi)$ - пространственно-временное управление по мощности внутреннего тепловыделения. В некоторых случаях, в частности, при индукционном нагреве, функция $F(x,\varphi)$ может быть представлена в виде произведения двух функций от одной переменной [3, 4]

$$F(x,\varphi)=\Psi(x)u(\varphi)\,, \tag{3}$$

где $u(\varphi)$ - удельная величина полной мощности источников тепла, выделяемого в нагреваемом теле, а $\Psi(x)$ - закон их распределения по пространственной координате.

Считая закон распределения источников тепла по пространственной координате $\Psi(x)$ доступным для определения в зависимости от геометрических, теплофизических параметров объекта и нагревательной установки, подлежащей идентификации функцией является управляющее воздействие $u(\varphi)$ удельной мощности внутреннего тепловыделения, регулируемое обычно напряжением на индукторе и подчиненное ограничению

$$u(\varphi)\in V,\ \varphi>0 \tag{4}$$

принадлежности заданному множеству V соответствующих управляющих воздействий.

В таком случае обратная задача теплопроводности может быть сформулирована в следующей экстремальной постановке. По заданной температурной зависимости $\theta^*(\varphi)$ в некоторой фиксированной точке контроля $x^*\in[0,1)$ требуется восстановить удельную величину мощности внутреннего тепловыделения $u^*(\varphi)$, минимизирующую невязку между заданной $\theta^*(\varphi)$ и точным решением $\theta(x^*,\varphi)$ краевой задачи (1), (2), соответствующим $u^*(\varphi)$.

Оценить эту невязку можно на основе ошибки равномерного приближения результирующего температурного поля $\theta(x^*,\varphi)$ к требуемому $\theta^*(\varphi)$ на заданном временном интервале $\varphi\in[0,\varphi^0]$ [5]

$$I(u)=\max_{\varphi\in[0,\varphi^0]}\left|\theta(x^*,\varphi)-\theta^*(\varphi)\right|\to\min_{u\in V}\,. \tag{5}$$

На практике поиск идентифицирующей функции $u(\varphi)$ приходится осуществлять на основе качественной информации об объекте, обычно исходя из требований максимальной гладкости физически реализуемых функций [1].

В большинстве физически обоснованных случаев поиск $u(\varphi)$ достаточно осуществлять [1] в классе непрерывных и непрерывно-дифференцируемых на интервале идентификации функций $u^{(2)}(\varphi):u(\varphi)\in C^2[0,\varphi^0]$. В некоторых случаях, для типовых моделей объектов с распределенными параметрами, возможно рассмотреть класс функций, непрерывных на рассматриваемом интервале вместе со второй производной $u^{(3)}(\varphi):u(\varphi)\in C^3[0,\varphi^0]$.

Таким образом, необходимо сузить исходное множество V управляющих воздействий до класса физически реализуемых C^2 или C^3 на интервале идентификации [1]. Для этого за управление вместо $u(\varphi)$ достаточно принять ее вторую [5]

$$w(\varphi)=u''(\varphi) \tag{6}$$

или, соответственно, третью производную

$$w(\varphi)=u^{(3)}(\varphi), \tag{7}$$

на которую накладывается типовое ограничение

$$\left|w(\varphi)\right|\le\left|w_{\max}\right|,\ \varphi\in\left(0,\varphi^0\right), \tag{8}$$

гарантирующее непрерывность на интервале $[0,\varphi^0]$ искомой функции $u(\varphi)$ вместе с ее двумя в классе $u=u^2(\varphi)$ или тремя при $u=u^3(\varphi)$ производными соответственно.

В такой постановке при минимизации критерия (5) используется описание объекта (1), (2) в виде бесконечного ряда [3, 4]

$$\begin{aligned}\theta(x,\varphi)={}&\sum_{m=1}^{\infty}A_m(x)\Psi_m(x)\exp(-\mu_m^2\varphi)\int_0^{\varphi}\exp(\mu_m^2\tau)u(\tau)d\tau+\\&+\sum_{m=1}^{\infty}A_m(x)\cos(\mu_m)Bi\cdot\exp(-\mu_m^2\varphi)\int_0^{\varphi}\exp(\mu_m^2\tau)\theta_{\Pi}(\tau)d\tau\end{aligned} \tag{9}$$

разложения температурного поля $\theta(x,\varphi)$ по собственным функциям $\cos(\mu_m x)$ тепловой задачи [3,4], где $A_m(x)=\dfrac{2\mu_m}{\mu_m+\sin\mu_m\cos\mu_m}\cos(\mu_m x)$, собственные числа μ_m определяются решением уравнения $\mu\,tg\mu-Bi=0$, а $\Psi_m(x)$ - коэффициенты разложения $\Psi(x)$.

На основе (9) искомое оптимальное воздействие $w(\varphi)=w^*(\varphi)$ должно обеспечивать на заданном интервале $\varphi\in[0,\varphi^0]$ достижение минимаксного соотношения

$$\begin{aligned}I(w)=\max_{\varphi\in[0,\varphi^0]}\Bigg|&\sum_{m=1}^{\infty}A_m(x)\Psi_m(x)\exp(-\mu_m^2\varphi)\int_0^{\varphi}\exp(\mu_m^2\tau)u(\tau)d\tau+\\&+\sum_{m=1}^{\infty}A_m(x)\cos(\mu_m)Bi\cdot\exp(-\mu_m^2\varphi)\int_0^{\varphi}\exp(\mu_m^2\tau)\theta_{\Pi}(\tau)d\tau-\theta^*(\varphi)\Bigg|\to\min_w\end{aligned} \tag{10}$$

Применение к такой постановке задачи известной процедуры принципа максимума Понтрягина показывает [5], что новое оптимальное управляющее воздействие

$w^*(\varphi)$ представляет собой кусочно-постоянную функцию времени, поочередно принимающую только свои предельно допустимые значения $\pm w_{\max}$, в соответствии с чем определяется числом n и длительностями $\widetilde{\Delta}_i, i=\overline{1,n}$ знакочередующихся интервалов постоянства

$$w^*(\varphi)=\begin{cases} w_{\max}, \quad \varphi<\widetilde{\Delta}_1 \\ (-1)^{j+1} w_{\max}, \quad \forall\varphi: \sum_{i=1}^{j-1}\widetilde{\Delta}_i<\varphi<\sum_{i=1}^{j}\widetilde{\Delta}_i,\ j=\overline{2,n} \end{cases}, \tag{11}$$

где $0<\varphi\le\varphi^0=\sum_{i=1}^{n}\widetilde{\Delta}_i$.

Интегрирование дважды или трижды уравнения (6) или (7) связи нового управляющего воздействия $w(\varphi)$ с соответствующей производной $u(\varphi)$ дает кусочно-параболическую форму искомой мощности внутреннего тепловыделения в классе непрерывных и непрерывно-дифференцируемых функций

$$u^{2*}(\varphi)=\begin{cases} u(0)+u'(0)\varphi+\dfrac{w_{\max}}{2}\varphi^2,\ \varphi\in\left[0,\widetilde{\Delta}_1\right], n\ge 1; \\ u(0)+u'(0)\varphi+\dfrac{w_{\max}}{2}\varphi^2+w_{\max}\sum_{k=2}^{j}(-1)^{k+1}\left(\varphi-\sum_{i=1}^{k-1}\widetilde{\Delta}_i\right)^2, \\ \text{при}\quad \sum_{i=1}^{j-1}\widetilde{\Delta}_i\le\varphi\le\sum_{i=1}^{j}\widetilde{\Delta}_i,\ j=\overline{2,n},\ n\ge 2 \end{cases} \tag{12}$$

или кусочное кубическое представление $u(\varphi)$ в классе функций непрерывных вместе со второй производной

$$u^{3*}(\varphi)=\begin{cases} u(0)+u'(0)\varphi+\dfrac{u''(0)}{2}\varphi^2+\dfrac{w_{\max}}{6}\varphi^3,\ \varphi\in\left[0,\widetilde{\Delta}_1\right], n\ge 1; \\ u(0)+u'(0)\varphi+\dfrac{u''(0)}{2}\varphi^2+\dfrac{w_{\max}}{6}\varphi^3+\dfrac{w_{\max}}{3}\sum_{k=2}^{j}(-1)^{k+1}\left(\varphi-\sum_{i=1}^{k-1}\widetilde{\Delta}_i\right)^3, \\ \text{при}\quad \sum_{i=1}^{j-1}\widetilde{\Delta}_i\le\varphi\le\sum_{i=1}^{j}\widetilde{\Delta}_i,\ j=\overline{2,n},\ n\ge 2. \end{cases} \tag{13}$$

Тем самым устанавливается структура управляющего воздействия, которое параметризуется вектором, содержащим длительности $\widetilde{\Delta}=(\widetilde{\Delta}_i), i=\overline{1,n}$ знакочередующихся интервалов постоянства, а также априори неизвестные значения $w_{\max,}\ u(0), u'(0)$ и, при необходимости, $u''(0)$. Температурное поле, в свою очередь, также однозначно характеризуется вектором $\widetilde{\Delta}$ и значениями $w_{\max,}\ u(0), u'(0), u''(0)$, и в классе непрерывно - дифференцируемых функций $\theta^2(x,\varphi,\Delta)=\theta(x,\varphi,\widetilde{\Delta},w_{\max},u(0),u'(0))$ может быть представлено как реакция на сумму составляющих искомой $u(\varphi)$:

$$\theta^2(x,\varphi,\Delta)=\begin{cases}\Phi(x,\varphi,u(0),u'(0))+\Lambda^2(x,\varphi,w_{\max})+Q(x,\varphi),\ \varphi\in[0,\Delta_1],\ n\ge 1;\\ \Phi(x,\varphi,u(0),u'(0))+\Lambda^2(x,\varphi,w_{\max})+Q(x,\varphi)+\\ +2\sum\limits_{k=2}^{j}(-1)^{k+1}\Lambda^2(x,\varphi-\sum\limits_{i=1}^{k-1}\tilde{\Delta}_i),\ \sum\limits_{i=1}^{j-1}\tilde{\Delta}_i\le\varphi\le\sum\limits_{i=1}^{j}\tilde{\Delta}_i,\ j=\overline{2,n},\ n\ge 2.\end{cases} \tag{14}$$

Здесь $\Phi(x,\varphi,u(0),u'(0))$ - решение краевой задачи (1) (2) при управляющем воздействии $u(\varphi)=u(0)+u'(0)\varphi$ имеет следующий вид:

$$\Phi(x,\varphi,u(0),u'(0))=\sum_{m=1}^{\infty}A_m(x)\Psi_m(x)\left[\frac{u(0)}{\mu_m^2}\left(1-\exp(-\mu_m^2\varphi)\right)+\frac{u'(0)}{\mu_m^4}\left(\mu_m^2\varphi-1+\exp(-\mu_m^2\varphi)\right)\right], \tag{15}$$

$\Lambda^2(x,\varphi,w_{\max})$ - решение той же краевой задачи для $u(\varphi)=\frac{w_{\max}}{2}\varphi^2$ имеет вид:

$$\Lambda^2(x,\varphi,w_{\max})=\sum_{m=1}^{\infty}A_m(x)\Psi_m(x)\frac{w_{\max}}{2}\left[\frac{\varphi^2}{\mu_m^2}-\frac{2\varphi}{\mu_m^4}+\frac{2}{\mu_m^6}\left(1-\exp(-\mu_m^2\varphi)\right)\right], \tag{16}$$

$Q(x,\varphi)$ определяет теплообмен с внешней средой

$$Q(x,\varphi)=\sum_{m=1}^{\infty}A_m(x)\cos(\mu_m)Bi\cdot\exp(-\mu_m^2\varphi)\int_0^{\varphi}\exp(\mu_m^2\tau)\theta_{\Pi}(\tau)d\tau\,. \tag{17}$$

В классе дважды непрерывно - дифференцируемых функций расчетное температурное поле $\theta^3(x,\varphi,\Delta)=\theta(x,\varphi,\tilde{\Delta},w_{\max},u(0),u'(0),u''(0))$ имеет вид:

$$\theta^3(x,\varphi,\Delta)=\begin{cases}\Phi(x,\varphi,u(0),u'(0))+\Phi^3(x,\varphi,u''(0))+\Lambda^3(x,\varphi,w_{\max})+Q(x,\varphi),\ \varphi\in[0,\Delta_1],\ n\ge 1;\\ \Phi(x,\varphi,u(0),u'(0))+\Phi^3(x,\varphi,u''(0))+\Lambda^3(x,\varphi,w_{\max})+Q(x,\varphi)+\\ +2\sum\limits_{k=2}^{j}(-1)^{k+1}\Lambda^3(x,\varphi-\sum\limits_{i=1}^{k-1}\tilde{\Delta}_i),\ \sum\limits_{i=1}^{j-1}\tilde{\Delta}_i\le\varphi\le\sum\limits_{i=1}^{j}\tilde{\Delta}_i,\ j=\overline{2,n},\ n\ge 2\end{cases} \tag{18}$$

Здесь $\Phi(x,\varphi,u(0),u'(0))$, $Q(x,\varphi)$ определяются в соответствии с (15) и (17), а $\Phi^3(x,\varphi,u''(0))$ -решение краевой задачи (1) (2) при $u(\varphi)=\frac{u''(0)}{2}\varphi^2$ имеет вид

$$\begin{aligned}\Phi^3(x,\varphi,u''(0))=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2\mu_m}{\mu_m+\sin\mu_m\cos\mu_m}\cos(\mu_m x)\Psi_m(x)\frac{u''(0)}{2}\times\\ \times\left[\frac{\varphi^2}{\mu_m^2}-\frac{2\varphi}{\mu_m^4}+\frac{2}{\mu_m^6}\left(1-\exp(-\mu_m^2\varphi)\right)\right],\end{aligned} \tag{19}$$

а $\Lambda^3(x,\varphi,w_{\max})$ - решение той же задачи для $u(\varphi)=\frac{w_{\max}}{6}\varphi^3$:

$$\Lambda^3(x,\varphi,w_{\max})=\sum_{m=1}^{\infty}A_m(x)\Psi_m(x)\frac{w_{\max}}{6\mu_m^2}\left[\varphi^3-\frac{3\varphi^2}{\mu_m^2}+\frac{6\varphi}{\mu_m^4}-\frac{6}{\mu_m^6}\left(1-\exp(-\mu_m^2\varphi)\right)\right]. \tag{20}$$

На основании (12)-(20) искомое управляющее воздействие $u^*(\varphi)$ и соответствующее ему температурное поле $\theta(x,\varphi,\Delta)$ однозначно характеризуется вектором параметров $\Delta = (\widetilde{\Delta}, w_{\max}, u(0), u'(0))$, заданным при известном значении φ^0 на замкнутом ограниченном множестве $G_m = G_{n+2} : \Delta \in G_{n+2}$ при $u(\varphi) \in C^2[0, \varphi^0]$ или $\Delta = (\widetilde{\Delta}, w_{\max}, u(0), u'(0), u''(0))$ на множестве $G_m = G_{n+3} : \Delta \in G_{n+3}$ в классе $u = u^3(\varphi)$.

Используя полученное описание $\theta(x, \varphi, \Delta)$, на основе критерия оптимальности (10) осуществляется точная редукция исходной некорректной постановки обратной задачи теплопроводности (1), (2) к задаче параметрической оптимизации, являющейся специальной негладкой задачей математического программирования

$$I_0(\Delta) = \max_{\varphi \in [0, \varphi^0]} \left| \theta(x^*, \varphi, \Delta) - \theta^*(\varphi) \right| \to \min_{\Delta \in G_m} . \quad (21)$$

Надлежащим выбором числа n и вектора Δ искомая функция $u(\varphi)$ может быть аппроксимирована с любой требуемой точностью, что обеспечивает корректную постановку задачи без дополнительных процедур регуляризации.

К ошибке приближения температурного поля $\theta(x^*, \varphi, \Delta) - \theta^*(\varphi)$ могут быть применены специальные свойства чебышевского альтернанса, фиксирующие достижение знакочередующихся максимальных по абсолютной величине отклонений на интервале $\varphi \in [0, \varphi^0]$ в точках $\varphi_q^0, q = \overline{1, R}$, общее число которых R на единицу превышает число искомых параметров $R = m + 1$, на основании которых составляется замкнутая система соотношений.

В зависимости от числа точек достижения максимальных значений разности $\theta(x^*, \varphi, \Delta) - \theta^*(\varphi)$, от их расположения на интервале $[0, \varphi^0]$ возможны различные формы пространственной конфигурации кривой погрешности аппроксимации температуры [5].

Переход от класса функций $C^2[0, \varphi^0]$ в класс $C^3[0, \varphi^0]$ при одно-, двух- и трехинтервальном управлении приводит к увеличению числа неизвестных параметров идентифицируемого воздействия, и, следовательно, количества расчетных уравнений системы, и влечет усложнение результирующей конфигурации разности температур, но дает существенное уменьшение погрешности аппроксимации искомой функции (таблица 1) при рассмотренном в качестве примера экспоненциальном изменении $u_0(\varphi) = 1 - \exp(-\beta\varphi); \varphi \in [0, \ 1]$ и следующих значениях параметров $Bi = 0.5; \theta_{\Pi}(\varphi) = 0.05; x^* = 0.8; \beta = 5$. Максимальная погрешность аппроксимации, как правило, достигается на границах интервала $\varphi = 0$ или $\varphi = \varphi^0$.

Таблица 1

Погрешность аппроксимации входного воздействия	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$
$u^2(0); u^2(\varphi^0)$	15%; 13%	10%; 10%	7%; 8%
$u^3(0); u^3(\varphi^0)$	5%; 5%	3%; 3%	2%; 2%

Аппроксимация сплайнами второго (12) или третьего порядка (13) искомой функции внутреннего тепловыделения приводит к соответствующей структуре полученного решения (рис. 1).

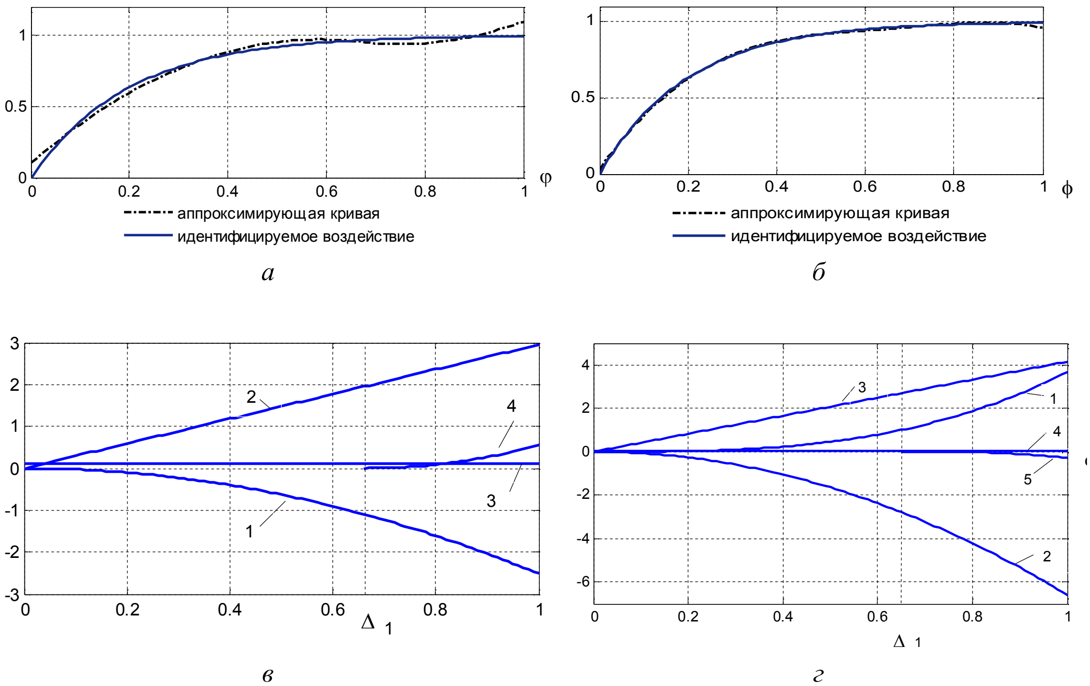

Рис.1. Аппроксимация управляющего воздействия в случае двухинтервального управления:
а - сплайнами второго порядка;
б - сплайнами третьего порядка;

в– составляющие аппроксимирующей функции:

$$1 - \frac{w_{\max}}{2}\varphi^2 ; 2 - u'(0)\varphi ; 3 - u(0) ; 4 - -w_{\max}(\varphi - \Delta_1)^2 ;$$

г – составляющие:

$$1 - \frac{w_{\max}}{6}\varphi^3 ; 2 - \frac{u''(0)}{2}\varphi^2 ; 3 - u'(0)\varphi ; 4 - u(0) ; 5 - -\frac{w_{\max}}{3}(\varphi - \Delta_1)^3 .$$

Проведенные расчеты показывают возможность получения аппроксимирующих решений как в классе функций с минимальной гладкостью (непрерывных и непрерывно-дифференцируемых), так и повышенной (непрерывных со второй производной) при решении обратных задач теплопроводности на основе альтернансного метода при наиболее распространенных случаях управляющих воздействий с одним, двумя или тремя интервалами постоянства.

Увеличение степени гладкости решений влечет усложнение формы результирующей кривой отклонения расчетной температуры от заданной $\theta(x^*,\varphi,\Delta) - \theta^*(\varphi)$, и, соответственно, системы расчетных уравнений, но дает значительный выигрыш в точности восстановления искомой функции.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Алифанов О.М.* Обратные задачи теплообмена. М.: Машиностроение, 1988. – 280 с.
2. *Цирлин А.М., Балакирев В.С., Дудников Е.Г.* Вариационные методы оптимизации управляемых объектов. М.: Энергия, 1976. – 448 с.
3. *Рапопорт Э.Я.* Оптимизация процессов индукционного нагрева металла. М.: Металлургия, 1993. – 278 с.

4. *Рапопорт Э.Я.* Альтернансный метод в прикладных задачах оптимизации. М.: Наука, 2000. – 336 с.
5. *Рапопорт Э.Я. Плешивцева Ю.Э.* Специальные методы оптимизации в обратных задачах теплопроводности. Известия РАН. Энергетика, 2002. № 5. С. 144-155.

Статья поступила в редакцию 20 мая 2011 г.

THE BOUNDARY INVERSE HEAT CONDUCTION PROBLEMS BASED ON PARAMETRIC OPTIMIZATION

A.N. Diligenskaya

Samara State Technical University
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100

Inverse heat conductivity problem with identifiable inside heat emission function, formulated in the extremal statement is considered as an optimal control process with distributed parameters. Search control actions carried out on the set of continuous and continuously differentiable or twice continuously differentiable functions. Using the parameterization of control actions, the problem reduces to a special problem of mathematical programming, whose solution is based on a method that takes into account alternance properties desired extremals.

Key words: *Inverse heat conductivity problem, parametric optimization, alternance method, piecewise approximation, class of function continuous, continuously differentiable, twice continuously differentiable functions*

Anna N. Diligenskaya - Candidate of Technical Sciences, Associate professor.