УДК 517.977.56

АНАЛИТИЧЕСКОЕ КОНСТРУИРОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО РЕГУЛЯТОРА В СИСТЕМЕ УПРАВЛЕНИЯ ПРОЦЕССОМ ИНДУКЦИОННОГО НАГРЕВА ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ЗАГОТОВОК

М.Х. Лапицкая

Самарский государственный технический университет
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244

Решается задача поиска оптимального алгоритма управления внутренними источниками тепла в системе с обратной связью для стабилизации температурного распределения по объему нагреваемой алюминиевой заготовки цилиндрической формы. Для решения задачи используются методы динамического программирования и конечных интегральных преобразований.

Ключевые слова*: объект с распределенными параметрами, критерий оптимальности, конечное интегральное преобразование, температурное поле, удельная мощность внутренних источников тепла, замкнутая система.*

Введение. В работе рассматривается проблема синтеза замкнутой системы оптимального управления процессом индукционного нагрева алюминиевой заготовки цилиндрической формы, представляющего собой объект с распределенными параметрами (ОРП). Для случая полного измерения функции состояния формулируется и решается задача поиска оптимального алгоритма пространственно-временного управления внутренними источниками тепла $F^*(\Theta(x,t))$, определяемого как функция управляемой величины, представляющей собой распределение температурного поля $\Theta(x,t)$ по пространственной координате x и во времени t. В роли показателя качества выступает взвешенная с постоянными коэффициентами сумма интегральных квадратичных ошибок приближения температурного поля на всем протяжении процесса управления к заданному распределению и энергетических затрат.

Для поиска алгоритма оптимального управления применяется метод динамического программирования, основное соотношение которого находится с использованием принципа оптимальности Беллмана.

Постановка задачи аналитического конструирования регулятора. Рассмотрим задачу аналитического конструирования регулятора (АКОР) при управлении распределением температурного поля $\Theta(x,t)$ по радиусу R бесконечного цилиндра в процессе его индукционного нагрева.

Для объекта управления, описываемого в отклонениях от невозмущенного состояния $\Theta(x,t)=0$ уравнением теплопроводности Фурье вида

$$\frac{\partial\Theta(x,t)}{\partial t}=a\frac{\partial^2\Theta(x,t)}{\partial x^2}+\frac{a}{x}\frac{\partial\Theta(x,t)}{\partial x}+\frac{1}{c\gamma}F(x,t);\ 0<x<R,\ t>0 \tag{1}$$

с граничными и начальными условиями

Мария Хамильевна Лапицкая, аспирант, каф. автоматики и управления в технических системах.

$$\lambda\frac{\partial\Theta(R,t)}{\partial x}+\alpha\Theta(R,t)=0;$$
$$\frac{\partial\Theta(0,t)}{\partial x}=0;\ \Theta(x,0)=\Theta_0(x);\ x\in[0,R],\tag{2}$$

требуется найти алгоритм управления с обратной связью $F^*(\Theta,x,t)$, обеспечивающий минимум следующего критерия оптимальности:

$$I=\int_0^\infty S\,dt\to\min,\tag{3}$$

где

$$S=\omega_1\int_0^R\Theta^2(x,t)\,dx+\omega_2\int_0^R F^2(x,t)\,dx.\tag{4}$$

Здесь $F(x,t)$ – управляющее воздействие, в роли которого выступает удельная мощность внутреннего тепловыделения; λ – коэффициент теплопроводности; c – удельная теплоемкость; γ – плотность; a – коэффициент температуропроводности; α – коэффициент конвективной теплоотдачи; ω_1 и ω_2 – заранее фиксируемые весовые коэффициенты. Отклонения от заданного состояния $\Theta(x,t)=0$ возникают за счет ненулевых начальных условий.

Критерий оптимальности (4) представляет собой взвешенную сумму интегральных квадратичных ошибок приближения температурного поля на всем протяжении процесса управления к невозмущенному состоянию $\Theta(x,t)=0$ и энергетических затрат, оцениваемых величиной интеграла от квадрата управляющего воздействия по области его определения.

Решение задачи АКОР. Используя принцип оптимальности Беллмана [1], получим основное уравнение метода динамического программирования:

$$\min_{F(x,t)}\left(\frac{dV(\Theta(x,t),t)}{dt}+S(\Theta,F,t)\right)=\left(\frac{dV(\Theta(x,t),t)}{dt}+S(\Theta,F,t)\right)_{F=F^*}=0,\tag{5}$$

согласно которому в любой момент времени $t\in[0,t_1]$ в оптимальном процессе должно выполняться равенство (5). Здесь функционал $S(\Theta,F,t)$ задается при выборе критерия оптимальности в форме (3), а заранее неизвестный функционал $V(\Theta(x,t),t)$ представляет собой минимальную величину его составляющей на участке (t',t_1) оптимального процесса:

$$V(\Theta',t')=\min_{F(x,t),t\in[t',t_1]}\left[\int_{t'}^{t_1}S\,dt\right],\tag{6}$$

где t' – произвольное значение времени, принимаемое в качестве начального момента.

Уравнение динамического программирования при $t\to\infty$ следует дополнить условием

$$\lim_{t\to\infty}V(\Theta(x,t),t)=0,\tag{7}$$

которое эквивалентно требованию асимптотической устойчивости процесса управления [2].

Для поиска алгоритма оптимального управления используем метод динамического программирования. Решение уравнения (5) относительно V будем искать в форме, зависящей от произведения $\Theta(x,t)\Theta(\xi,t)$:

$$V=\int_0^R\int_0^R \upsilon(x,\xi)\,\Theta(x,t)\,\Theta(\xi,t)\;dx\,d\xi, \tag{8}$$

где $\upsilon(x,\xi)$ – подлежащая определению функция только пространственных координат; ξ – переменная интегрирования по пространственной координате [1].

После преобразований получим алгоритм оптимального управления в искомой форме закона обратной связи по управляемой функции состояния (уравнения регулятора), определяемый через функцию $\upsilon(x,\xi)$ [1]:

$$F^*(\Theta(x,t))=-\frac{\sigma}{2\omega_2}\int_0^R\left[\upsilon(x,\eta)+\upsilon(\eta,x)\right]\Theta(\eta,t)\,d\eta, \tag{9}$$

где $\sigma=\dfrac{1}{c\gamma}$.

Функция $\upsilon(x,\xi)$ является решением интегро-дифференциального уравнения следующего вида [1]:

$$L(\upsilon)+\omega_1-\frac{1}{4}\frac{\sigma^2}{\omega_2}\int_0^R\left[\upsilon(\eta,x)+\upsilon(x,\eta)\right]\left[\upsilon(\eta,\xi)+\upsilon(\xi,\eta)\right]d\eta=0, \tag{10}$$

где

$$L(\upsilon)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[a\,\upsilon(x,\xi)\right]-\frac{\partial}{\partial x}\left[\,\upsilon(x,\xi)\right]+\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\left[a\,\upsilon(x,\xi)\right]-\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\frac{a}{\xi}\upsilon(x,\xi)\right]. \tag{1}$$

Уравнение (10) можно рассматривать с учетом выражения (11) для оператора $L(\upsilon)$ как нелинейное интегро-дифференциальное по пространственным переменным x и ξ уравнение относительно искомой функции $\upsilon(x,\xi)$ с граничными условиями следующего вида:

$$\begin{aligned}
&\frac{\alpha}{\lambda}\upsilon(x_1,\xi)\,a+\left[\frac{\partial}{\partial x}\big(a\upsilon(x,\xi)\big)\right]_{x=x_1}-\frac{a}{x_1}\upsilon(x_1,\xi)=0;\\
&\left[\frac{\partial}{\partial x}\big(a\,\upsilon(x,\xi)\big)\right]_{x=x_0}-\frac{a}{x_0}\upsilon(x_0,\xi)=0;\\
&\frac{\alpha}{\lambda}\upsilon(x,x_1)\,a+\left[\frac{\partial}{\partial \xi}\big(a\,\upsilon(x,\xi)\big)\right]_{\xi=x_1}-\frac{a}{x_1}\upsilon(x,x_1)=0;\\
&\left[\frac{\partial}{\partial \xi}\big(a\,\upsilon(x,\xi)\big)\right]_{\xi=x_0}-\frac{a}{x_0}\upsilon(x,x_0)=0,\;x_0=0,\;x_1=R.
\end{aligned} \tag{2}$$

Отсюда следует, что $\upsilon(x,\xi)=\upsilon(\xi,x)$, т. е. эти функции симметричны.

Используя метод конечных интегральных преобразований [2], можно привести уравнение (10) к бесконечной системе квадратичных алгебраических уравнений и построить итерационную процедуру приближенного отыскания ее корней с требуемой точностью [1].

В качестве ядра преобразования используем собственные функции $\widetilde{\varphi}_n(\mu_n,x),\widetilde{\varphi}_m(\mu_m,\xi)$ составляющих L_1 и L_2 оператора $L(\upsilon)$ в (11) с собственными числами $\widetilde{\mu}_n^2, \widetilde{\mu}_m^2$, т. е. такие функции, для которых выполняются равенства:

$$L_1(\widetilde{\varphi}_n(\widetilde{\mu}_n,x)) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[a\widetilde{\varphi}_n(\widetilde{\mu}_n,x)\right] - \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{a}{x}\widetilde{\varphi}_n(\widetilde{\mu}_n,x)\right] = -\widetilde{\mu}_n^2\widetilde{\varphi}_n(\widetilde{\mu}_n,x);$$

$$L_2(\widetilde{\varphi}_m(\widetilde{\mu}_m,\xi)) = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\left[a\widetilde{\varphi}_m(\widetilde{\mu}_m,\xi)\right] - \frac{\partial}{\partial \xi}\left[\frac{a}{\xi}\widetilde{\varphi}_m(\widetilde{\mu}_m,x)\right] = -\widetilde{\mu}_m^2\widetilde{\varphi}_m(\widetilde{\mu}_m,\xi) \qquad (3)$$

$$n = 1,2,\ldots, m = 1,2,\ldots$$

Собственные функции $\widetilde{\varphi}_n(\widetilde{\mu}_n, x)$ $n = 1,2,\ldots,$ операторов $L_1(\widetilde{\varphi}_n)$ и $L_2(\widetilde{\varphi}_m)$ ортогональны друг другу с весом $\widetilde{r}(x)$ [1,2],

$$\int_{x_0}^{x_1} \widetilde{\varphi}_m(\mu_m,x)\widetilde{\varphi}_n(\mu_n,x)\widetilde{r}(x)\,dx = 0 \text{ для всех } m \neq n, \qquad (4)$$

$$\widetilde{r}(x) = \frac{x}{a}. \qquad (5)$$

Представим далее функцию $\upsilon(x,\xi)$ в (8) форме ее разложения в бесконечный ряд по ортонормированному семейству $\widetilde{\varphi}_n(\widetilde{\mu}_n, x)$ [1]:

$$\upsilon(x,\xi) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \overline{\overline{\upsilon}}_{nm}\widetilde{\varphi}_n(\widetilde{\mu}_n,x)\widetilde{\varphi}_n(\widetilde{\mu}_m,\xi), \qquad (6)$$

где остается при известных собственных функциях $\widetilde{\varphi}_n, \widetilde{\varphi}_m$ определить коэффициенты

$$\overline{\overline{\upsilon}}_{nm} = \int_{x_0}^{x_1}\int_{x_0}^{x_1} \upsilon(x,\xi)\widetilde{\varphi}_n(\widetilde{\mu}_n,x)\widetilde{\varphi}_m(\widetilde{\mu}_m,\xi)\widetilde{r}(x)\widetilde{r}(\xi)\,dx\,d\xi. \qquad (7)$$

Функции $\widetilde{\varphi}_n(\widetilde{\mu}_n,x)$, $\widetilde{\varphi}_m(\widetilde{\mu}_m,\xi)$ и $\widetilde{\mu}_n, \widetilde{\mu}_m$ могут быть найдены как решения уравнений (13) со следующими из (12) при представлении $\upsilon(x,\xi)$ в форме (16) , граничными условиями:

$$-\frac{a}{x_0}\widetilde{\varphi}_n(\widetilde{\mu}_n,x_0) + a\frac{d\widetilde{\varphi}_n(\widetilde{\mu}_n,x_0)}{dx} = 0; \qquad (8)$$

$$\left(\frac{\alpha}{\lambda}a - \frac{a}{x_1}\right)\times\widetilde{\varphi}_m(\widetilde{\mu}_m,x_1) + a\frac{d\widetilde{\varphi}_m(\widetilde{\mu}_m,x_1)}{d\xi} = 0. \qquad (9)$$

Общие решение уравнений (13) определяется следующим выражением:

$$\widetilde{\varphi}_n(\widetilde{\mu}_n,x) = D1xJ0\left(\frac{\widetilde{\mu}_n}{\sqrt{a}}x\right) + D2xY0\left(\frac{\widetilde{\mu}_n}{\sqrt{a}}x\right), \qquad (2010)$$

где $J0(z)$ – функция Бесселя первого рода нулевого порядка; $Y0(z)$ – функция Бесселя второго рода нулевого порядка.

Далее необходимо найти значения коэффициентов $D1$, $D2$, и $\widetilde{\mu}_n$. Подставив в выражение (18) общее решение для $\widetilde{\varphi}_n(\widetilde{\mu}_n,x)$ в форме (20), после некоторых преобразований получим, что равенства (18) выполняются при любых коэффициентах $D1$, $D2$. Для удобства примем значения $D1 = 1$, $D2 = 0$.

Далее, используя замену вида

$$\widetilde{\mu}_n^2 = \frac{a\eta_n^2}{R^2},\ n = 0,1,2,..., \tag{11}$$

запишем граничное условие (19) в виде уравнения

$$BiJ_0(\eta_n) - (\eta_n)J_1(\eta_n) = 0,\ \ Bi = \frac{\alpha R}{\lambda}. \tag{12}$$

Тогда собственные функции будут иметь следующий вид:

$$\widetilde{\varphi}_n(\widetilde{\mu}_n, x) = xJ_0\left(\eta_n \frac{x}{R}\right),\ \ n = 0,1,2,... \tag{13}$$

Для дальнейшего решения необходимо вместо $D1 = 1$ принять $D1 = 1/E_n$, т.е.

$$\widetilde{\varphi}_n(\widetilde{\mu}_n, x) = \frac{1}{E_n}\widetilde{\varphi}_n^*(\widetilde{\mu}_n, x), \tag{14}$$

где $\widetilde{\varphi}_n^*(\widetilde{\mu}_n, x)$ есть решение (13), (12) с единичным множителем, а E_n^2 – квадрат нормы собственных функций, который определяется по формуле

$$E_n^2 = \int_0^R \left[\widetilde{\varphi}_n^*(\mu_n, x)\right]^2 \widetilde{r}(x)\,dx, n = 0,1,2,... \tag{15}$$

Таким образом, система $\{\widetilde{\varphi}_n\}$ становится ортонормированной.

Подставив $\upsilon(x,\xi)$ в форме (16) в выражение (11), после преобразований в силу равенств (13), получим выражение для $L(\upsilon)$ следующего вида [1]:

$$L(\upsilon) = -\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \overline{\overline{\upsilon}}_{nm}\left(\widetilde{\mu}_n^2 + \widetilde{\mu}_m^2\right) \varphi_n(\widetilde{\mu}_n, x)\ \varphi_m(\widetilde{\mu}_m, \xi). \tag{16}$$

Аналогично $\upsilon(x,\xi)$, представим весовой множитель ω_1 в (10) его разложением в бесконечный ряд

$$\omega_1 = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \overline{\overline{\omega}}_{1nm}\ \widetilde{\varphi}_n(\widetilde{\mu}_n, x)\widetilde{\varphi}_m(\widetilde{\mu}_m, \xi)\ , \tag{17}$$

где

$$\overline{\overline{\omega}}_{1nm} = \int_0^R\int_0^R \omega_1\ \widetilde{\varphi}_n(\widetilde{\mu}_n, x)\widetilde{\varphi}_m(\widetilde{\mu}_m, \xi)\,\widetilde{r}(x)\,\widetilde{r}(\xi)\,dx\,d\xi. \tag{18}$$

Далее найдем выражение для подынтегральной функции в (10), используя формулу (16), из которой, в частности, следует, что $\overline{\overline{\upsilon}}_{nm} = \overline{\overline{\upsilon}}_{mn}$ для симметричных функций $\upsilon(x,\xi)$.

В рассматриваемом случае уравнение (10) после преобразований сводится к бесконечной системе квадратичных уравнений относительно коэффициентов $\overline{\overline{\upsilon}}_{nm}$ разложения искомой функции $\upsilon(x,\xi)$ в ряд (16) [1]:

$$\left(\widetilde{\mu}_n^2 + \widetilde{\mu}_m^2\right)\overline{\overline{\upsilon}}_{nm} + \sum_{n_1,m_1=1}^{\infty} I_{n_1 m_1}\overline{\overline{\upsilon}}_{nn_1}\overline{\overline{\upsilon}}_{mm_1} = \overline{\overline{\omega}}_{1nm};\ n,m = 1,2,... \tag{19}$$

где

$$I_{n_1 m_1} = \frac{\sigma^2}{\omega_2}\int_0^R \widetilde{\varphi}_{n_1}(\widetilde{\mu}_{n_1}, \eta)\widetilde{\varphi}_{m_1}(\widetilde{\mu}_{m_1}, \eta)\ d\eta. \tag{30}$$

Система уравнений (29) при заданных значениях $\tilde{\mu}_n$, $\tilde{\mu}_m$, a, c, γ, ω_2, $\overline{\overline{\omega}}_{1nm}$ решается методом последовательных приближений, предложенным в [1].

По найденным корням системы (29) искомая функция $\upsilon(x,\xi)$ восстанавливается в форме суммы N^2 учитываемых членов бесконечного ряда (16).

Подстановка этой суммы в уравнение регулятора приводит с учетом равенства $\overline{\overline{\upsilon}}_{nm} = \overline{\overline{\upsilon}}_{mn}$ к явной форме зависимости оптимального управления от пространственной координаты и сигнала обратной связи по измеряемой функции состояния:

$$F^*(\Theta(x,t)) = -\frac{\sigma}{\omega_2}\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N}\overline{\overline{\upsilon}}_{nm}\,\tilde{\varphi}_n(\tilde{\mu}_n,x)\int_{x_0}^{x_1}\Theta(\eta,t)\;\tilde{\varphi}_m(\tilde{\mu}_m,\eta)\,d\eta. \qquad (20)$$

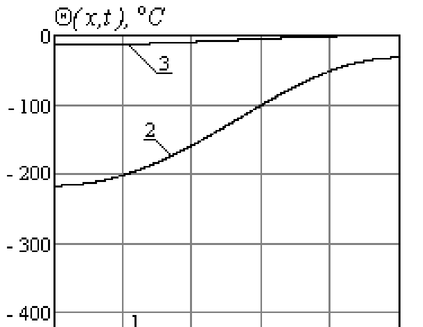
Согласно [2], функция состояния $\Theta(x,t)$ рассматриваемого объекта может быть представлена ее разложением в сходящийся в среднем ряд по ортонормированной с весом $r(x)$ системе собственных функций:

$$\Theta(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\overline{\Theta}_n(\mu_n,t)\;\varphi(\mu_n,x), \qquad (21)$$

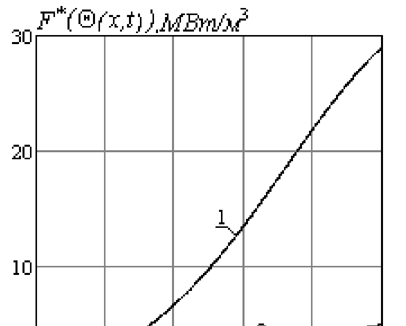
где $\varphi(\mu_n,x)$ – собственные функции, μ_n – собственные числа, весовой коэффициент в данном случае равен $r(x)=\tilde{r}(x)$, $\overline{\Theta}_n(\mu_n,t)$ – моды разложения, определяемые системой уравнений следующего вида [1, 2]:

$$\frac{d\overline{\Theta}_k^*}{dt} + \mu_k^2\overline{\Theta}_k^* + \sum_{v=1}^{N}P_{kv}\overline{\Theta}_v^* = 0,\;\; \overline{\Theta}_k(\mu_k,0) = \overline{\Theta}_0^{(0)}(\mu_k),\;\; k=\overline{1,N}\,, \qquad (22)$$

где P_{kv} определяются следующим выражением [1]:



Р и с. 1. Температурное поле в различные моменты времени оптимального процесса: $1 - t=0c$, $2 - t=100c$, $3 - t=320c$



Р и с. 2. Распределенное управляющее воздействие в различные моменты времени: $1 - t=0c$, $2 - t=100c$, $3 - t=320c$

$$P_{kv} = \frac{\sigma^2}{\omega_2} \int_{x_0}^{x_1} \left[\varphi_k(\mu_k, \xi)\, r(\xi) \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{N} \overline{\overline{\upsilon}}_{nm} \widetilde{\varphi}_n(\widetilde{\mu}_n, \xi) \times \right.$$

$$\left. \times \int_{x_0}^{x_1} \widetilde{\varphi}_m(\widetilde{\mu}_m, \eta)\, \varphi_v(\mu_v, \eta)\, d\eta \right] d\xi = const,\ k, v = \overline{1, N}. \qquad (23)$$

На рис. 1-2 приведены некоторые результаты вычислений для значений $N = 3$ для равномерного начального распределения температурного поля $\Theta_0(x) = -440^\circ C$ в процессе нагрева алюминиевого цилиндра радиусом $R = 0{,}24\,м$ при следующих теплофизических параметрах процесса: $\lambda = 171{,}4\,Вт/м{\cdot}^\circ C$, $a = 7{,}66 \cdot 10^{-5}\, м^2/с$, $\omega_1(x,t) = 1$, $\omega_2(x) = 10^{-10}$, критерий Био $Bi = 0{,}05$.

Заключение. В результате работы получен оптимальный по критерию (3) алгоритм пространственно-временного управления внутренними источниками тепла в процессе индукционного нагрева алюминиевой заготовки цилиндрической формы. Полученный алгоритм оптимального управления обеспечивает асимптотическую сходимость температурного поля к заданному состоянию.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Рапопорт Э.Я.* Оптимальное управление системами с распределенными параметрами. – М.: Высш. шк., 2008. – 677 с.
2. *Рапопорт Э.Я.* Структурное моделирование объектов и систем управления с распределенными параметрами. – М.: Высш. шк., 2003. – 299 с.

Статья поступила в редакцию 4 октября 2011 г.

ANALYTICAL CONTROLLERS DESIGN IN CONTROL PROBLEM FOR INDUCTION HEATING PROCESS OF CYLINDRICAL BILLET

M.H. Lapitskaya

Samara State Technical University
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100

This paper considers the problem of searching for optimal control algorithm by internal heat sources in feed-back system for stabilization of temperature field within the volume of heated aluminum billet. The problem is solved by using dynamic programming method and finite integral transform method.

Keywords: *object with distributed parameters, optimization criterion, finite integral transform method, temperature field, internal heat source density, feedback system.*

Maria H. Lapitskaya, Postgraduate student.