УДК 681.5.015

АДАПТИВНЫЙ АЛГОРИТМ ОЦЕНИВАНИЯ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ ХАОТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ БАЗИСА НЕРЕГУЛЯРНЫХ ФУНКЦИЙ[1]

А.Н. Дилигенская

Самарский государственный технический университет
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244
E-mail: adiligenskaya@mail.ru

Рассматривается задача оценивания хаотических временных рядов в условиях действия возмущений. В режиме непрерывной обработки данных для более точного оценивания используется корректирующая обратная связь по наблюдаемому процессу. В качестве математической модели применяется разложение по системе ортогональных хаотических процессов.

Ключевые слова: *хаотический процесс, нелинейные нерегулярные колебания, разложение временного ряда, ортогональный базис, рекуррентный алгоритм оценивания.*

В настоящее время при решении различных прикладных задач в технических, экономических, информационных системах требуется рассматривать протекающие в них процессы как сугубо нелинейные, проявляющие нерегулярную хаотическую динамику. Поведение систем, на первый взгляд кажущееся случайным, при более глубоком анализе обнаруживает наличие сложных детерминированных составляющих.

В таких системах для последующего решения задачи управления сначала необходимо провести оценивание, от точности которого напрямую зависит точность управления. Возникает задача восстановления поведения динамических систем по наблюдаемым экспериментальным данным в условиях действия различного рода возмущений с учетом хаотического поведения процессов. При этом актуально решение этой задачи в одном темпе со временем протекания процессов функционирования системы.

Для решения данной проблемы применяются вероятностные подходы, нейронные сети, методы разложения сигналов и другие [1], [2]. Большая часть работ посвящена построению моделей на коротких временных интервалах. Существенный интерес и особую сложность имеет задача получения математического описания процесса со сложной хаотической динамикой на длинном временном интервале. В этом случае необходимо постоянно уточнять структуру или параметры модели, рассматривая локальные короткие интервалы.

В работе решается задача оценивания одномерного наблюдаемого временного ряда, содержащего нерегулярную компоненту, на основе адаптивного рекурсивного алгоритма, осуществляющего расчет параметров, полученных на отдельных участках выборок, используемых в качестве математических моделей, разложений по хаотическим процессам.

Сложные системы характеризуются наличием множества факторов как детерминированной, так и стохастической природы, и в таких системах присутствует совокупность устойчивых закономерных и неустойчивых хаотических процессов. Получение адекватного математического описания (в виде дифференциальных уравне-

[1] Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 10-08-00754-а.

Анна Николаевна Дилигенская (к.т.н.), доцент каф. автоматики и управления в технических системах.

ний или дискретных отображений) систем, у которых отсутствуют выраженные тенденции поведения, сопряжено с существенными сложностями, так как учесть все действующие факторы не представляется возможным. В прикладных задачах исходная информация о поведении исследуемых сложных систем обычно представлена в виде выборок экспериментальных значений.

В большинстве работ, посвященных оцениванию и прогнозированию хаотических процессов, задача аппроксимации и прогнозирования решается на коротких выборках в условиях малого числа наблюдений *(N<50)* [3]. В этом случае для построения математических моделей процессов с нерегулярной динамикой наряду с использованием глобальных универсальных моделей и нейронных сетей применяется разложение исходного временного ряда по базису ортогональных хаотических процессов [4]. Базисные процессы выбираются, во-первых, из условия ортогональности, под которым понимается взаимная некоррелированность, и, во-вторых, из условия достижения на некотором доступном множестве параметров базисных функций максимальной корреляции с исходным временным рядом. Если в наблюдаемом сигнале действительно присутствует детерминированная составляющая, содержащая хаотические компоненты, такая модель может аппроксимировать исходный процесс с высокой степенью адекватности. Количество необходимых базисных функций выбирается таким, чтобы в остатке ряда не содержалось подлежащих аппроксимации детерминированных составляющих.

Изложенный подход показывает достаточно высокие результаты идентификации и прогнозирования хаотических процессов на коротких временных рядах, если выбранные базисные функции соответствуют предъявляемым требованиям [4].

При рассмотрении процессов на длинном временном интервале получить универсальную модель, адекватно описывающую поведение всего временного ряда, становится сложно или вовсе невозможно. Характерной особенностью таких процессов является то, что увеличение числа наблюдений не улучшает, а зачастую ухудшает аппроксимирующие и прогнозные свойства моделей. Учет новых измерений, на каждом шаге меняющих свою тенденцию непредсказуемым образом, оказывает влияние на корреляцию модельных составляющих между собой и с экспериментальной выборкой, выводя расчетные коэффициенты корреляции за допустимые пределы.

Кроме того, анализ нелинейных нерегулярных временных рядов до настоящего времени не подлежит полной автоматизации, так что выполнение определенных этапов расчета и нахождение некоторых параметров моделей приходится проводить эмпирическим путем, и при увеличении размера выборки связанные с этим трудности многократно возрастают.

Наилучший результат при оценивании и прогнозировании процессов со сложной динамикой на длинных выборках дают адаптивные модели, корректирующие свое поведение в зависимости от поступающей информации [5]. В этом случае возможно использование локального оценивания, когда на отдельных коротких участках всего временного интервала выбираются базисные функции, наиболее удовлетворяющие заданным требованиям, а весовые коэффициенты базисных процессов рассчитываются в результате применения адаптивного алгоритма оценивания.

Рассматривается длинный временной ряд экспериментальных значений $y_0(k), k=\overline{1,N^0}$ хаотического процесса (или поступающие в режиме реального времени измерения $y_0(k), k=1,2,...$). В соответствии с изложенными соображениями, всю выборку N^0 значений предлагается разделить на s локальных интервалов

$N^0 = [N^1 \quad N^2 \quad ... \quad N^s]$; $N^{(p)} = (20-40); p = \overline{1,s}$, на каждом из которых определяется структура модели процесса в виде разложения по системе ортогональных функций хаотических процессов $x_i(k)$, $i = \overline{1,m}$ [6]

$$y(q) = \sum_{i=1}^{m} \gamma_i^{(p)}(k) \cdot x_i^{(p)}(k), \quad q = \overline{1,N^0}; k = \overline{1,N^{(p)}}; p = \overline{1,s}. \tag{1}$$

В качестве базисных функций используются процессы, относящиеся к логистическим отображениям

$$x_i^{(p)}(k) = \varphi(x^{(p)}(k-1), \lambda^{(p)}) = \lambda_i^{(p)} x_i^{(p)}(k-1) \cdot \left(1 - x_i^{(p)}(k-1)\right), \quad i = \overline{1,m} \tag{2}$$

и при $\lambda \in (3.57, 4)$ проявляющие хаотическую динамику.

Параметры хаотических базисных процессов $\lambda_i^{(p)}$ и начальные условия $x_i^{(p)}(0), i = \overline{1,m}; p = \overline{1,s}$ выбираются исходя из условия взаимной ортогональности [4]

$$\left| R\left(x_i^{(p)}(k), x_j^{(p)}(k)\right) \right| < r, \;\; i,j = 1,..m, \;\; \forall i \neq j; \;\; k = \overline{1,N^{(p)}}; p = \overline{1,s}, \tag{3}$$

где $R\left(x_i^{(p)}(k), x_j^{(p)}(k)\right)$ – коэффициент взаимной корреляции исследуемых процессов на каждом локальном интервале, а r – допустимая корреляция базисных функций, задаваемая в общем случае в зависимости от длины интервала $N^{(p)}$ и количества базисных функций m. Вторым условием является наибольшая корреляция базисных процессов с наблюдаемым сигналом

$$\left| R\left(x_i^{(p)}(k), y_0(q)\right) \right| > r_0, \; i = \overline{1,m}; \;\; k = \overline{1,N^{(p)}}; p = \overline{1,s}; q = \overline{1,N^0}, \tag{4}$$

где r_0 – минимально допустимая корреляция базисных функций с исходным сигналом.

Количество m базисных функций определяется из анализа ряда остатков $e(q) = y_0(q) - y(q), q = \overline{1,N^0}$: при наличии в нем подлежащих аппроксимации детерминированных хаотических составляющих число базисных процессов может быть увеличено, иначе – улучшить систему аппроксимирующих функций на рассматриваемом интервале нельзя и остатки рассматриваются как случайный процесс.

На практике протекание процессов с хаотической динамикой сопровождается изменением преобладающих тенденций или периодичности циклических составляющих так, что начиная с некоторого очередного измерения на определенном интервале появляются существенные расхождения экспериментальных данных с модельными. В общем случае не имеет смысла строить аппроксимацию по большому количеству значений экспериментальных данных, т. к. в процессах с меняющейся динамикой учет ранних, устаревших данных ухудшает скорость сходимости.

При этом универсального алгоритма определения количества базисных функций и вычисления их параметров и начальных условий не существует, и решение задачи аппроксимации локальных интервалов временного ряда может давать существенно различные результаты. Например, на некоторых интервалах при фиксированной длине выборки может наблюдаться удовлетворительная, и даже высокая точность локальной аппроксимации; на других же участках, наоборот, имеется низкое качество адекватности построенного разложения наблюдаемому процессу. В этом случае приходится уточнять локальную модель, изменяя не только параметры $\lambda_i^{(p)}$ и

$x_i^{(p)}(0)$, но и число базисных процессов m или учитываемое число точек текущего интервала.

Иногда на некоторых локальных выборках удается использовать одну и ту же систему аппроксимирующих функций, но если в наблюдаемом процессе действительно произошла смена тенденций, необходимо определить новую систему, дающую лучшие аппроксимирующие свойства.

Когда число m аппроксимирующих функций, их параметры $\lambda_i^{(p)}$ и начальные условия $x_i^{(p)}(0)$ определены для всех $p=\overline{1,s}$ локальных интервалов наблюдаемого временного ряда, в граничных точках проводится сшивка разных систем базисных функций и этап структурной идентификации можно считать выполненным.

Полученная структура разложения однозначно задает значения вектора базисных процессов $x(q)=\left[x_1(q) \quad x_2(q) \quad \ldots \quad x_m(q)\right]$ на всей исходной выборке N^0, и дальнейшая задача сводится к вычислению коэффициентов $\gamma_i(q),\, i=\overline{1,m};\, q=\overline{1,N^0}$, минимизирующих ошибку восстановления

$$y_0(q)-\sum_{i=1}^{m}\gamma_i(q)\cdot x_i(q)\to\min_{\gamma_i}, \quad q=\overline{1,N^0}. \tag{5}$$

Для этого возможно применить рекуррентную процедуру фильтрации, где для коррекции модели используется обратная связь по наблюдаемому процессу. Определение нестационарного вектора параметров $\gamma(q)=\left[\gamma_1(q) \quad \gamma_2(q) \quad \ldots \quad \gamma_m(q)\right]^T$ можно получить, используя алгоритм адаптивной фильтрации рекурсивного типа, в котором поступающая информация используется для корректировки ранее сделанной оценки

$$\gamma(q)=\gamma(q-1)+\frac{P(q-1)\cdot x^T(q)}{I \ +x(q)P(q-1)\cdot x^T(q)}\left[y_0(q)-x(q)\gamma(q-1)\right], \tag{6}$$

а нестационарная матрица $P(q)$ может быть вычислена рекуррентно

$$P(q)=\left[I-\frac{P(q-1)\cdot x^T(q)}{I \ +x(q)P(q-1)\cdot x^T(q)}x(q)\right]P(q-1)\ . \tag{7}$$

В качестве примера рассматривалась хаотическая компонента одномерного временного ряда из 200 значений. Для построения ее модели выделены локальные участки по 20 точек, на каждом из которых строится система ортогональных базисных процессов. На некоторых локальных участках удается построить разложение исходного сигнала по двум базисным функциям, и при этом наблюдается удовлетворительный коэффициент корреляции полученного разложения с исходным процессом (свыше 80 %), однако на других интервалах приемлемого разложения из двух составляющих построить не удается. В соответствии с этим было принято решение строить базисную систему из трех процессов. На каждом участке находятся параметры $\lambda_i,\, i=\overline{1,3}$ и начальные условия $x_i(0),\, i=\overline{1,3}$ логистических отображений (2). В результате рекуррентного алгоритма адаптивного оценивания (6) получена временная аппроксимация (1) наблюдаемого сигнала, представленная на рис. 1.

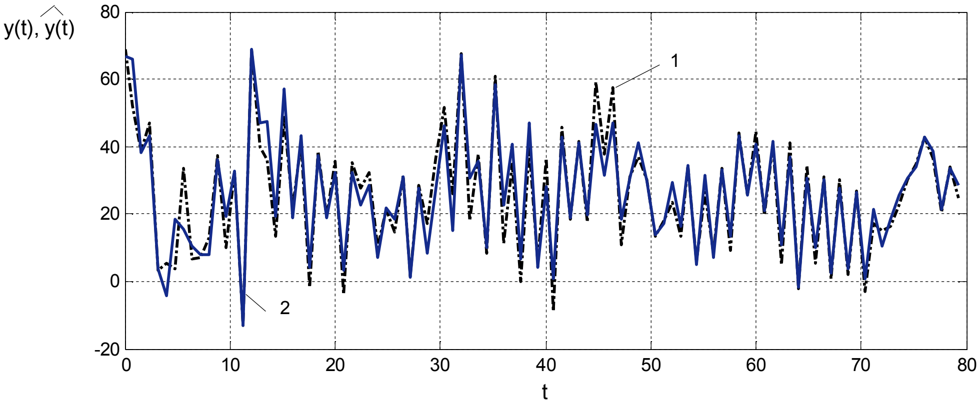

Рис. 1. Наблюдаемый хаотический процесс (1) и его аппроксимация (2) разложением по ортогональной системе логистических отображений

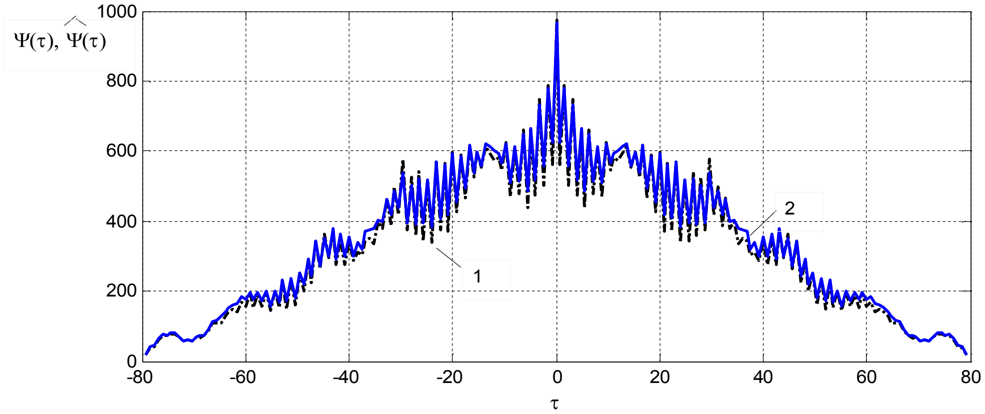

Рис. 2. Автокорреляционные функции $\Psi(\tau)$ наблюдаемого временного ряда (1) и $\hat{\Psi}(\tau)$ его аппроксимации (2)

Анализ приведенных результатов показывает хорошую работоспособность предложенного метода и высокие результаты адекватности модельного представления наблюдаемому процессу на всем длинном временном интервале.

Наиболее сложным и «узким» местом является процедура определения параметров базисных процессов. Так как хаотические процессы очень чувствительны как к параметрам задающих рекуррентных функций, так и к начальным приближениям, то корреляция базисных процессов с исходным временным рядом и их взаимная корреляция могут изменяться в относительно широких диапазонах.

Попытки использовать универсальный алгоритм определения параметров (характеризующийся одним и тем же числом учитываемых точек в каждом интервале и одинаковым числом базисных функций) приводит к тому, что коррелированность исходного временного ряда и построенного разложения на отдельных временных интервалах может достигать 90-98 % при некоторых значениях параметров разложения, а на других опускаться до 70-75 % (в отдельных случаях ниже 60 %).

Если же отойти от универсальности и на каждом интервале добиваться желаемой корреляции базисных процессов как с исходным рядом, так и между собой, то возможно достичь высокого соответствия модельного представления и экспериментальных значений на каждом временном участке и, соответственно, на всей длинной выборке. В результате коэффициент корреляции наблюдаемого процесса и полученного модельного представления может достигать 92-96 % на всем временном интервале при любом учитываемом числе точек (см. рис. 1). Построение автокорреляционной функции полученного модельного представления также показывает высокую адекватность аналогичной характеристике исходного ряда (см. рис. 2). Аппроксимирующая и исходная корреляционные функции имеют идентичную сложную динамику, характеризующуюся выраженными пиками при одинаковых временных сдвигах.

Рассмотренный адаптивный алгоритм оценивания показывает большие возможности применения данного метода и позволяет достичь сравнительно высоких результатов в точности оценивания хаотических процессов.

Эффективность предлагаемого подхода существенно зависит от адекватности построенных моделей базисных процессов на каждом из полученных локальных интервалов всего наблюдаемого ряда. Соблюдение условий взаимной ортогональности базисных компонент на всей выборке и достаточной коррелированности их с наблюдаемым процессом гарантирует хорошую адекватность полученной при последующем рекуррентном оценивании вектора параметров аппроксимирующей функции с высокой степенью вероятности.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Андриевский Б.Р., Фрадков А.Л.* Управление хаосом: методы и приложения. Ч. II. Приложения. – АиТ. 2004 (4). – С. 3-34.
2. *Яковлев В.Л., Яковлева Г.Л., Лисицкий Л.А.* Модели детерминированного хаоса в задаче прогнозирования тенденций финансовых рынков и их нейросетевая реализация // Информационные технологии, 2000. – № 2. – С. 46-52.
3. *Лукашин Ю.П.* Адаптивные методы краткосрочного прогнозирования временных рядов. – М.: Финансы и статистика, 2003. – 415 с.
4. *Шелудько А.С., Ширяев В.И.* Построение ортогонального разложения хаотического процесса // Научная сессия МИФИ – 2011. Сб. научных трудов. – М.: МИФИ, 2011. – Ч. 1: XIII Всероссийская научно-техническая конференция «Нейроинформатика – 2011». Нейронные сети. – С. 44-52.
5. *Синай Я.Г.* Современные проблемы эргодической теории. – М.: Наука, 1995.
6. *Чернов В.М.* Арифметические методы синтеза быстрых алгоритмов дискретных ортогональных преобразований. – М.: Физматлит, 2007.

Статья поступила в редакцию 2 марта 2012 г.

ADAPTIVE ALGORITHM FOR ESTIMATING THE DETERMINED CHAOTIC PROCESSES WITH THE USAGE OF IRREGULAR FUNCTIONS BASIS

A.N. Diligenskaya

Samara State Technical University
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100

The problem of estimation of chaotic time series under the perturbation is examined. For more accurate estimation during the continuous processing the correcting feedback from the observed process is used. As a mathematical model the expansion of the system of orthogonal chaotic processes is applied.

Keywords: *chaotic process, nonlinear irregular oscillations, expansion of time series, orthogonal basis, identify algorithm, recursive estimation algorithm.*

Anna N. Diligenskaya (Ph.D. (Techn.)), Associate Professor.