УДК 517.977.56, 66.021.2.063.8, 66.067.8.09

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ДИФФУЗИИ КАК РАСПРЕДЕЛЕННОГО ОБЪЕКТА УПРАВЛЕНИЯ С ПЕРЕМЕННОЙ СТРУКТУРОЙ[1]

А.Г. Мандра

Самарский государственный технический университет
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, д. 244

amandra@mail.ru

Рассматривается задача математического моделирования процесса диффузии с управляющим воздействием по скорости движения вещества в химическом реакторе.

***Ключевые слова**: диффузия, распределенный объект, объект с переменной структурой.*

Исследование процесса распространения вещества в технологических установках базируется, в первую очередь, на учете пространственной распределенности концентрации вещества по объему реактора. В зависимости от конструктивных особенностей технологических установок для исследования поведения вещества применяют различные математические модели: идеального вытеснения, смешения, ячеечную, диффузионную и др. [1].

Рассмотрим процесс распространения вещества в реакторе, который описывается однопараметрической диффузионной моделью

$$\frac{\partial C(l,t)}{\partial t}+V(t)\frac{\partial C(l,t)}{\partial l}=D\frac{\partial^2 C(l,t)}{\partial l^2},\ 0<l<L;\ t>0, \qquad (1)$$

с граничными и начальными условиями

$$-D\frac{\partial C(0,t)}{\partial l}=V(t)\left(C_{вх}(t)-C(0,t)\right);\ \frac{\partial C(L,t)}{\partial l}=0; \qquad (2)$$

$$C(l,0)=0, \qquad (3)$$

где $C(l,t)$ − распределение концентрации вещества по длине реактора; $V(t)$ − скорость потока в реактор; D − коэффициент диффузии; $C_{вх}(t)$ – концентрация вещества на входе в реактор; L – длина реактора.

В общем случае скорость подачи вещества в реактор $V(t)$ и концентрация вещества на входе в реактор $C_{вх}(t)$ являются функциями времени. Если предположить, что концентрация вещества на входе в реактор является величиной постоянной $C_{вх}(t)=C_{вх}$, а $V(t)$ принимает только два значения

$$V(t)=\begin{cases}V_0, & t<t_0;\\ 0, & t\ge t_0,\end{cases} \qquad (4)$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ №09-08-00297-а, №10-08-00754-а; ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009-2013 гг.» (2010-1.3.1-230-009/8); АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект №2.1.2/4236).

Андрей Геннадьевич Мандра (к.т.н.), старший преподаватель, каф. автоматики и управления в технических системах.

которые соответствуют крайним положениям исполнительного механизма – открытому и закрытому, при этом время перехода от одного крайнего положения к другому считается пренебрежимо малым, тогда систему уравнений (1)-(3) можно переписать в виде

$$\begin{cases} \dfrac{\partial C_1(l,t)}{\partial t} + V_0 \dfrac{\partial C_1(l,t)}{\partial l} = D \dfrac{\partial^2 C_1(l,t)}{\partial l^2}; \quad 0 < l < L; \quad 0 < t < t_0; \\ \dfrac{\partial C_2(l,t)}{\partial t} = D \dfrac{\partial^2 C_2(l,t)}{\partial l^2}; \quad 0 < l < L; \quad t > t_0, \end{cases} \tag{5}$$

с граничными и начальными условиями

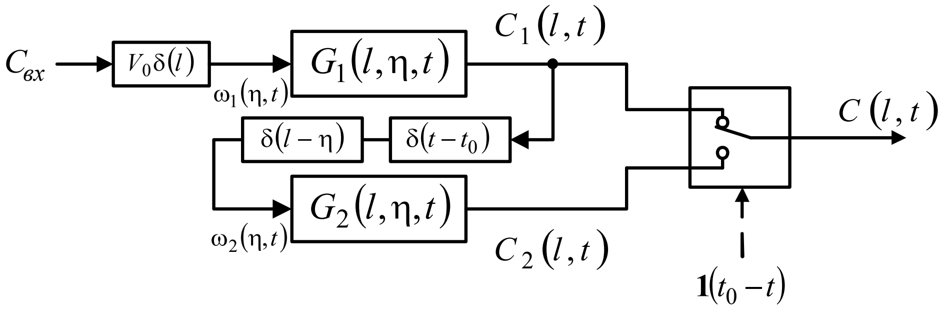
$$-D \frac{\partial C_1(0,t)}{\partial l} = V_0 \left(C_{\hat{a}\tilde{o}} - C_1(0,t) \right); \ \frac{\partial C_1(L,t)}{\partial l} = 0; \tag{6}$$

$$\frac{\partial C_2(0,t)}{\partial l} = 0; \ \frac{\partial C_2(L,t)}{\partial l} = 0; \tag{7}$$

$$C_1(l,0) = 0; \ C_2(l,t_0) = C_1(l,t_0). \tag{8}$$

В системе (5) уравнение для $C_1(l,t)$ с граничными и начальными условиями (6), (8) описывает распространение концентрации вещества при открытом клапане подачи вещества в реактор, а для $C_2(l,t)$ с граничными условиями (7), (8) – при закрытом клапане подачи вещества в реактор.

На основе математической модели (5)-(8) можно построить структурную схему объекта в терминах структурной теории систем с распределенными параметрами [2] (рис. 1).



Р и с. 1. Структурное представление процесса диффузии

Здесь $G_1(l,\eta,t)$ – функция Грина для $C_1(l,t)$ [3], которая имеет вид

$$G_1(l,\eta,t) = \exp\left(\frac{V_0(l-\eta)}{2D} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(l)\varphi_n(\eta)}{B_n} \exp\left(-D\mu_n{}^2 t - \frac{V_0{}^2}{4D^2} t \right), \tag{9}$$

где $B_n = \dfrac{V_0}{2D\mu_n{}^2} + \dfrac{L}{2} + \dfrac{LV_0{}^2}{8D^2\mu_n{}^2}$; $\varphi_n(l) = \cos(\lambda_n l) + \dfrac{V_0}{2D\lambda_n} \sin(\lambda_n l)$ – собственные функции; $\lambda_n = \sqrt{\mu_n{}^2 - \dfrac{V_0{}^2}{4D^2}}$ – собственные числа, где λ_n, $n = 1,2,...,$ – бесконечно возрастающая последовательность корней уравнения

$$\frac{tg(\lambda l)}{\lambda} = \frac{4DV_0}{4D^2\lambda^2 - V_0^2}. \qquad (10)$$

$\omega_1(\eta,t)$ − стандартизирующая функция для $C_1(l,t)$ [3], которая имеет вид

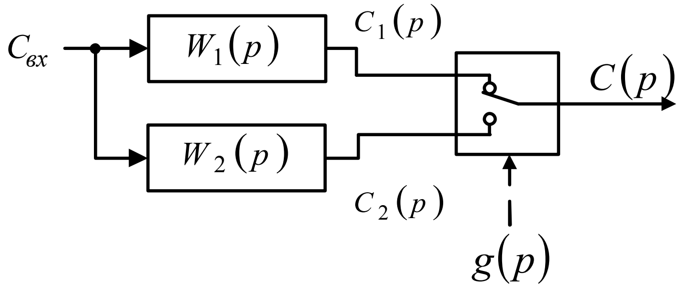
$$\omega_1(\eta,t) = C_{вх}V_0\delta(\eta). \qquad (11)$$

Для $C_2(l,t)$ функция Грина и стандартизирующая функция имеют вид [4]

$$G_2(l,\eta,t) = \frac{1}{L} + \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\left(\frac{\pi n}{L}l\right)\cos\left(\frac{\pi n}{L}\eta\right)\exp\left(-\frac{Dn^2\pi^2}{L^2}t\right); \qquad (12)$$

$$\omega_2(\eta,t) = C_1(\eta,t)\delta(t_0 - t). \qquad (13)$$

Из общей структурной схемы (рис. 1) с распределенными воздействиями и распределенными переходными блоками можно получить на основании (9), (12), используя известные правила структурных преобразований, свойства дельта-функций и преобразование Лапласа, структурную схему распределенного процесса диффузии в реакторе с сосредоточенным воздействием и сосредоточенной управляемой величиной (рис. 2).



Р и с. 2. Структурное представление процесса диффузии с сосредоточенной управляемой величиной

Здесь $g(p)$ – изображение по Лапласу единичной функции $1(t_0 - t)$, $C(p)$ − изображение по Лапласу функции концентрации вещества в точке с координатой $l = L$, $W_1(p)$ и $W_2(p)$ − передаточные функции, в соответствии с (9), (12) имеющие вид

$$W_1(p) = V_0\exp\left(\frac{V_0L}{2D}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_n(L)}{B_n\left(p + D\mu_n^2 + \frac{V_0^2}{4D^2}\right)}; \qquad (14)$$

$$W_2(p) = \frac{1}{Lp}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n}{B_n}\frac{\exp\left(\frac{V_0L}{2D}\right)\sin(\lambda_nL)}{\lambda_n\left(D\mu_n^2 + \frac{V_0^2}{4D^2}\right)} + \frac{2V_0}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{B_k}\frac{A_k}{D\mu_k^2 + \frac{V_0^2}{4D^2}}\frac{Y_{nk}}{p + \frac{Dn^2\pi^2}{L^2}}, \qquad (15)$$

где $A_n = 1 - \exp\left(-\left(D\mu_n^2 + \frac{V_0^2}{4D^2}\right)t_0\right)$, $Y_{nk} = \int_0^L \varphi_k(\eta)\cos\left(\frac{\pi n}{L}\eta\right)\exp\left(\frac{V_0\eta}{2D}\right)d\eta$.

В результате процесс распространения вещества в химическом реакторе (1)-(3) описывается математической моделью переменной структуры с распределенными параметрами с сосредоточенной управляемой величиной

$$C(t)=\begin{cases} C_{вх}\cdot C_1(t), & t<t_0; \\ C_{вх}\cdot C_2(t), & t\ge t_0. \end{cases} \qquad (16)$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Кафаров В.В., Глебов М.Б.* Математическое моделирование основных процессов химических производств: Учеб. пособие для вузов. – М.: Высш. шк., 1991. – 400 с.
2. *Рапопорт Э.Я.* Структурное моделирование объектов и систем управления с распределенными параметрами. – М.: Высш. шк., 2003. – 299 с.
3. *Полянин А.Д.* Справочник по линейным уравнениям математической физики. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 576 с.

Статья поступила в редакцию 15 сентября 2011 г.

MATHEMATICAL MODELLING OF PROCESS OF DIFFUSION AS DISTRIBUTED OBJECT OF CONTROL WITH VARIABLE STRUCTURE

A.G. Mandra

Samara State Technical University
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100

The problem of mathematical modeling of process of diffusion, with control action on speed of movement of substance in the chemical reactor is described.

Keywords: *diffusion, distributed object, object with variable structure.*

Andrey G. Mandra (Ph.D. (Techn.)), Senior lecturer.